Miroslav Šisler

O řešení soustav nelineárních rovnic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 414--429

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117477

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

O ŘEŠENÍ SOUSTAV NELINEÁRNÍCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER, Praha

(Došlo dne 14. března 1962)

V článku je navržena a zkoumána jedna iterační metoda pro řešení soustav nelineárních rovnic. Jsou uvedeny dva numerické příklady. Článek navazuje na [2], [3] (viz literatura).

I

Buď dána (podobně jako v [2]) soustava n nelineárních rovnic o n neznámých

$$f_i(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{x}$ je reálný sloupcový vektor o složkách $x_1, \ldots, x_n$, a $f_1, \ldots, f_n$ jsou reálné funkce n reálných proměnných. Buď $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = (\partial f_i / \partial x_j(\boldsymbol{x}))$ funkční matice soustavy (1) a předpokládejme, že det $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ v okolí reálného řešení $\boldsymbol{a}$ soustavy (1). Řešíme-li tuto soustavu Newtonovou metodou, počítáme postupně aproximace $\boldsymbol{x}_{\nu+1}$ řešení $\boldsymbol{a}$ z rovnice

$$\boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_\nu)\,,$$

kde $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_\nu)$ je sloupcový vektor o složkách $f_1(\boldsymbol{x}_\nu), f_2(\boldsymbol{x}_\nu), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}_\nu)$. Je tedy patrno, že při každém kroku je třeba invertovat matici $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ (nebo — což je prakticky totéž, řešit soustavu lineárních rovnic s maticí $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$). V článku [2] je proto navržena jiná metoda, při které je aproximace $\boldsymbol{x}_{\nu+1}$ prvou aproximací při řešení soustavy lineárních rovnic

$$\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_\nu) \tag{2}$$

Seidelovou metodou. V [2] a [3] je tato metoda ještě dále zobecněna.

V tomto článku budeme zkoumat iterační metodu, která vznikla zobecněním metody, při které je aproximace $\boldsymbol{x}_{\nu+1}$ prvou aproximací při řešení soustavy (2) tzv. metodou iterací (viz např. [5]). Zobecnění chápeme v tom smyslu, že metoda iterací bude speciálním případem jistého obecného početního schematu, užitého k řešení jisté soustavy lineárních rovnic, jejímž speciálním případem může být soustava (2). Budou zkoumány podmínky konvergence této obecné iterační metody a odhady pro chybu. Některé zvláštní důležité případy této metody budou vytčeny zvláště.

II

Lemma 1. *Buď* $\mathbf{F}$ *positivně definitní hermitovská matice a nechť platí* $\mathbf{F} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$, *přičemž matice* $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ *je hermitovská, positivně definitní. Potom je matice* $\mathbf{P}$ *regulární a je-li* λ_i *kořenem rovnice* $\det(\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = 0$, je λ_i *reálné a* $|\lambda_i| < 1$.

Důkaz. Protože obě matice $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ i $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ jsou positivně definitní hermitovské, má tuto vlastnost i matice $\mathbf{P} - \mathbf{Q} + \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 2\mathbf{P}$, tj. i matice $\mathbf{P}$. Buď dále λ_i kořenem rovnice $\det(\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = 0$. Potom existuje vektor $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{o}$ tak, že $\lambda_i\mathbf{P}\mathbf{x}_i - \mathbf{Q}\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$ a tedy

$$\lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - (\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0\,. \tag{3}$$

Z (3) plyne postupně

$$\bar{\lambda}_i\overline{(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)} - \overline{(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)} = 0\,, \quad \bar{\lambda}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}\mathbf{x}_i) - (\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}\mathbf{x}_i) = 0\,. \tag{4}$$

Protože $\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{F}$, je $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}^* - \mathbf{F}^* = \mathbf{P} - \mathbf{F} = \mathbf{Q}$ a tedy $\mathbf{Q}$ je hermitovská. Ze (4) tedy plyne

$$\bar{\lambda}_i(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - (\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0\,. \tag{5}$$

Protože $(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) > 0$, plyne z (3) a (5) rovnost $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, takže λ_i je reálné.

Nyní dokážeme, že platí $-1 < \lambda_i < 1$. Protože $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ je positivně definitní hermitovská, je pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ $((\mathbf{P} + \mathbf{Q})\,\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ čili $(\mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x}) > -(\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Protože $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, je

$$-1 < \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x})}\,. \tag{6}$$

Protože dále $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ je hermitovská positivně definitní, je pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ $((\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, čili $(\mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x}) > (\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x})$,

$$1 > \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x})}\,. \tag{7}$$

Z nerovností (6) a (7) plyne

$$-1 < \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x})} < 1\,.$$

Protože je podle (3)

$$\lambda_i = \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)}{(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)}\,,$$

je $-1 < \lambda_i < 1$, čili $|\lambda_i| < 1$.

Poznámka 1. Lemma 1 použijeme za předpokladu, že příslušné matice jsou reálné a tedy symetrické.

Důsledek lemmatu 1. *Pro vlastní čísla* λ_i *matice* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$ *platí* $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$. (To je zřejmé, neboť matice $\mathbf{P}$ je regulární.)

Buďte nyní $F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x})$ reálné funkce n reálných proměnných, definované v jistém okolí Ω reálného řešení $\mathbf{a}$ soustavy (1) a nabývající v Ω nulové hodnoty právě tehdy, jestliže funkce $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$ jsou rovny nule. Předpokládejme dále, že jsou v okolí Ω spojité a že mají v tomto okolí spojité první parciální derivace podle všech svých proměnných. V okolí Ω nechť dále platí

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = F_{kj}(\mathbf{x}) + e_{kj}(\mathbf{x}), \quad k = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

přičemž funkce $F_{kj}(\mathbf{x}), e_{kj}(\mathbf{x})$ jsou v okolí Ω spojité, $e_{kj}(\mathbf{a}) = 0$ a matice $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_{kj}(\mathbf{x}))$ je symetrická, positivně definitní.

Buďte dále $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ reálné matice takové, že jejich prvky jsou v Ω spojité funkce, a že pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ platí

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Budeme nyní definovat iterační metodu takto: je-li $\det \mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) \neq 0$, $\mathbf{x}_\nu \in \Omega$, je

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu), \tag{10}$$

kde

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu). \tag{11}$$

Přitom je $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ sloupcovým vektorem o složkách $F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x})$. Z rovnic (10), (11) dostáváme ihned jednoduchý vzorec pro $\mathbf{x}_{\nu+1}$:

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu). \tag{12}$$

Poznámka 2. Výše uvedeným způsobem, tj. zavedením funkcí $F_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, n$ lze zřejmě zobecnit i metodu zkoumanou ve [2] a [3].

Zaveďme nyní normu vektoru $\mathbf{x} = (x_i)$ vztahem

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Pro normu matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ příslušnou výše definované normě vektoru platí

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Buď $\mathbf{z}$ nějaký bod (slovo bod a vektor budeme často zaměňovat, bude-li to vhodné). Zaveďme tato označení:

a) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\, \mathbf{Q}(\mathbf{x})$;

b) $\lambda_{\mathbf{z}} = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(\mathbf{z})|$, kde $\lambda_i(\mathbf{x})$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$;

e) $\mathbf{S}_\varepsilon$ je regulární matice, pro kterou platí $\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{z}) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1} = \{\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m\}$,[1]) kde

$$\mathbf{L}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i(\mathbf{z}), & \frac{1}{2}\varepsilon, & \ldots\ldots\ldots, & & 0 \\ & \lambda_i(\mathbf{z}), & \frac{1}{2}\varepsilon, & \ldots, & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i(\mathbf{z}), & \frac{1}{2}\varepsilon \\ 0 & & & & \lambda_i(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

(Matice $\{\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m\}$ je tedy v podstatě kanonickým Jordanovým tvarem, avšak místo jedniček nad diagonálou je na příslušných místech číslo $\frac{1}{2}\varepsilon$.)

d) $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{z})$;

e) $\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ značí množinu bodů $\mathbf{x}$, pro které je $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leqq \frac{1}{2}\mu$ ($\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ je tedy n-rozměrná krychle o středu $\mathbf{z}$ a délce strany μ).

Potom platí toto lemma:

Lemma 2. *Buď μ kladné číslo, $\mathbf{z}$ nějaký bod a nechť pro každé $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu] \subset \Omega$ matice $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ definované vztahem (9) splňují předpoklady lemmatu 1. Buď dále $\varepsilon > 0$ takové, že $\lambda_\mathbf{z} + \varepsilon = q < 1$, a $K = \|\mathbf{S}_\varepsilon\| \, \|\mathbf{S}_\varepsilon^{-1}\|$. Pak existuje číslo λ, $0 < < \lambda \leqq \mu$ tak, že $\sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]} \|\mathbf{V}(\mathbf{x})\| < \varepsilon/2K$ a pro libovolné body $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$, $i = 1, \ldots, \nu$, kde ν je libovolné přirozené číslo, pak platí*

$$\left\| \prod_{i=1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \right\| \leqq K q^\nu . \tag{13}$$

Důkaz. Podle důsledku lemmatu 1 platí pro vlastní čísla $\lambda_i(\mathbf{x})$ matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ nerovnosti $|\lambda_i(\mathbf{x})| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, takže $\lambda_\mathbf{z} < 1$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby $\lambda_\mathbf{z} + \varepsilon = q < 1$ a buď $K = \|\mathbf{S}_\varepsilon\| \, \|\mathbf{S}_\varepsilon^{-1}\|$. V důsledku spojitosti prvků matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ v $\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ existuje λ, $0 < \lambda \leqq \mu$ tak, že $\sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]} \|\mathbf{V}(\mathbf{x})\| < \varepsilon/2K$. Buďte dále $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$, $i = 1, \ldots, \nu$ libovolné body. Potom je $\|\mathbf{V}(\mathbf{x}_i)\| < \varepsilon/2K$. Vzhledem k definici matice $\mathbf{S}_\varepsilon$ platí

$$\|\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{z}) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1}\| \leqq \lambda_\mathbf{z} + \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Dále platí

$$\mathbf{S}_\varepsilon\left(\prod_{i=1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)\right) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1} = \mathbf{S}_\varepsilon\left(\prod_{i=1}^{\nu} (\mathbf{A}(\mathbf{z}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_i))\right) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1} = \prod_{i=1}^{\nu} (\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{z}) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1} + \mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1}) .$$

Je však

$$\|\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{z}) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1} + \mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1}\| \leqq \|\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{z}) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1}\| + \|\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \mathbf{S}_\varepsilon^{-1}\| \leqq$$

$$\leqq \lambda_\mathbf{z} + \frac{\varepsilon}{2} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \lambda_\mathbf{z} + \varepsilon$$

[1]) $\{\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m\}$ značí jako obvykle blokově diagonální matici.

a tedy

$$\|S_\varepsilon(\prod_{i=1}^{\nu} A(x_i))\, S_\varepsilon^{-1}\| \leqq (\lambda_z + \varepsilon)^\nu ,$$

$$\|\prod_{i=1}^{\nu} A(x_i)\| = \|S_\varepsilon^{-1}\, S_\varepsilon(\prod_{i=1}^{\nu} A(x_i))\, S_\varepsilon^{-1} S_\varepsilon\| \leqq K(\lambda_z + \varepsilon)^\nu ,$$

kde $\lambda_z + \varepsilon = q$. Tím je lemma 2 dokázáno.

Zavedeme nyní toto označení (viz (8)): Zvolme body $q_1, \ldots, q_n$. Potom

$$F(q_1, \ldots, q_n) = \begin{pmatrix} F_{11}(q_1), & E_{12}(q_1), & \ldots, & F_{1n}(q_1) \\ F_{21}(q_2), & F_{22}(q_2), & \ldots, & F_{2n}(q_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1}(q_n), & F_{n2}(q_n), & \ldots, & F_{nn}(q_n) \end{pmatrix},$$

$$Z(q_1, \ldots, q_n) = \begin{pmatrix} e_{11}(q_1), & e_{12}(q_1), & \ldots, & e_{1n}(q_1) \\ e_{21}(q_2), & e_{22}(q_2), & \ldots, & e_{2n}(q_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1}(q_n), & e_{n2}(q_n), & \ldots, & e_{nn}(q_n) \end{pmatrix}.$$

Platí pak následující lemma:

Lemma 3. *Je-li $a = (a_i)$ řešení soustavy (1), pak z (10), (11) plyne*

$$\text{(14)} \quad \text{a)} \quad x_{\nu+1} - a = A(x_\nu)(x_\nu - a) - P^{-1}(x_\nu)(F(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n}) - F(x_\nu))(x_\nu - a) - \\ - P^{-1}(x_\nu)\, Z(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) ;$$

$$\text{(15)} \quad \text{b)} \quad x_\nu - a = A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_\mu)(x_\mu - a) - \\ - \sum_{i=\mu}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, P^{-1}(x_i)(F(p_{i1}, \ldots, p_{in}) - F(x_i))(x_i - a) - \\ - \sum_{i=\mu}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, P^{-1}(x_i)\, Z(p_{i1}, \ldots, p_{in})(x_i - a) ,$$

kde $p_{ik} = \xi_{ik} x_i + (1 - \xi_{ik})\, a,\ 0 < \xi_{ik} < 1,\ k = 1, 2, \ldots, n.$

Důkaz. a) Protože a je řešením soustavy (1), plyne z věty o přírůstku funkce a z (8)

$$F_k(x_\nu) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(p_{\nu k})(x_{\nu,j} - a_j) = \sum_{j=1}^{n} F_{kj}(p_{\nu k})(x_{\nu,j} - a_j) + \sum_{j=1}^{n} e_{kj}(p_{\nu k})(x_{\nu,j} - a_j) ,$$

takže je

$$\text{(16)} \qquad z(x_\nu) = F(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) + Z(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) ,$$

kde $p_{\nu k} = \xi_{\nu k} x_\nu + (1 - \xi_{\nu k})\, a,\ 0 < \xi_{\nu k} < 1,\ k = 1, 2, \ldots, n.$

Ze (16) a (12) plyne

$$x_{\nu+1} - a = x_\nu - a - P^{-1}(x_\nu)\, F(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) - P^{-1}(x_\nu) \, . \\ . \, Z(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) = A(x_\nu)(x_\nu - a) - P^{-1}(x_\nu)(F(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n}) - \\ - F(x_\nu))(x_\nu - a) - P^{-1}(x_\nu)\, Z(p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) ,$$

což je (14).

b) Důkaz vztahu (15) se provede pomocí vztahů (16), (10), (11) formálně obdobným způsobem, jako důkaz tvrzení b) lemmatu 6 v práci [2]. Nebudeme ho proto provádět.

Podobně jako v práci [2], [3] označme $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$ (chyba ν-té aproximace) a $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$ (oprava ν-té aproximace).

Věta 1. *Buď $\mathbf{a}$ řešení soustavy* (1) *a μ kladné číslo. Pro každé $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \mu] \subset \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \mu]$ nechť je matice $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ symetrická, positivně definitní, $\|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\| \leqq$ $\leqq p$ a nechť $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|e_{kj}(\mathbf{x})| \leqq M_2$ pro každé $k = 1, \ldots, n$, $j =$ $= 1, \ldots, n$.*[2]) *Potom existují čísla λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ (jejich velikost je udána lemmatem 2) taková, že pro libovolné body $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $i =$ $= 1, 2, \ldots, \nu$ platí nerovnost* (13). *Je-li $pn(1 + Kq/(1 - q))(M_1 + M_2) < 1$, buď ν_0 přirozené číslo takové, že platí*

$$P = Kq^{\nu_0} + pn\left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2) < 1$$

a $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, pro něž

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| \leqq \frac{\lambda}{2(Kq + pn(M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}}\,.$$

Posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ definovaná vztahy (10), (11) *pak konverguje a je* $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. *Pro chybu platí tyto odhady*:

$$\delta_{k\nu_0} \leqq P\delta_l\,, \quad \text{kde} \quad \delta_l = \max_{i=(k-1)\nu_0, \ldots, k\nu_0 - 1} \delta_i\,; \tag{17}$$

$$\delta_{k\nu_0} \leqq P^k \delta_m\,, \quad \text{kde} \quad \delta_m = \max_{i=0, \ldots, \nu_0 - 1} \delta_i\,. \tag{18}$$

Důkaz této věty se provádí pomocí lemmat 2, 3 a je formálně zcela analogický důkazu věty 2 práce [2]. Nebudeme ho proto provádět.

Označme nyní $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (P_{ij}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (Q_{ij}(\mathbf{x}))$, takže $F_{ij}(\mathbf{x}) = P_{ij}(\mathbf{x}) - Q_{ij}(\mathbf{x})$, $i = 1 \ldots, n, j = 1, \ldots n$. Mějme dánu matici $\mathbf{F}(\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_n)$. V jejím i-tém řádku a j-tém sloupci stojí prvek $F_{ij}(\mathbf{q}_i)$. Utvořme matici $\mathbf{P}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = (P_{ij}(\mathbf{q}_i))$, $\mathbf{Q}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) =$ $= (Q_{ij}(\mathbf{q}_i))$. Pak je $F_{ij}(\mathbf{q}_i) = P_{ij}(\mathbf{q}_i) - Q_{ij}(\mathbf{q}_i)$, takže

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{q}_1 \ldots, \mathbf{q}_n) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)\,.$$

Platí pak následující lemma:

Lemma 4. Z (10), (11) *plyne*

$$\begin{aligned}(19)\quad \text{a)}\quad \mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{P}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) - \\ &- \mathbf{P}(\mathbf{x}_{\nu-1}))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}))\,. \\ &.\,(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu-1,n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1})\,,\end{aligned}$$

kde $\mathbf{p}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k}\mathbf{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k})\,\mathbf{x}_{\nu-1}$, $0 < \xi_{\nu-1,k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

---

[2]) Protože $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je symetrická, stačí předpokládat $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$ pro $k \leqq j$.

b) *pro* $\nu > \mu \geqq 0$ *platí*

$$\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu = \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\mu+1}) (\mathbf{x}_{\mu+1} - \mathbf{x}_\mu) - \tag{20}$$
$$- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{P}(\mathbf{p}_{i-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{i-1,n}) - \mathbf{P}(\mathbf{x}_{i-1})) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) -$$
$$- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{Q}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{Q}(\mathbf{p}_{i-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{i-1,n})) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) -$$
$$- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{i-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{i-1,n}) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}),$$

kde $\mathbf{p}_{i-1,k} = \xi_{i-1,k}\mathbf{x}_i + (1 - \xi_{i-1,k}) \mathbf{x}_{i-1}$, $0 < \xi_{i-1,k} < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Důkaz. a) Podle věty o přírůstku funkce platí

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{z}(\mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) \,.$$
$$. (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}),$$

kde $\mathbf{p}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k}\mathbf{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k}) \mathbf{x}_{\nu-1}$, $0 < \xi_{\nu-1,k} < 1$, $k = 1, \dots, n$.

Z (12) plyne postupně

$$\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu = - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) =$$
$$= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) [\mathbf{z}(\mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) +$$
$$+ \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1})] = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{\nu-1}) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) -$$
$$- \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \mathbf{P}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \,.$$
$$. \mathbf{Q}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) \,.$$
$$. (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) (\mathbf{P}(\mathbf{x}_{\nu-1}) - \mathbf{P}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n})) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) -$$
$$- \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) (\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n})) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) +$$
$$+ \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}) - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu-1,1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu-1,n}) (\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}),$$

což je (19).

b) Podobně lze dokázat i tvrzení (20) — viz též obdobný důkaz lemmatu 8 práce [3].

Věta 2. *Buď* $\mathbf{x}_0$ *bod a* μ *kladné číslo. Pro každé* $\mathbf{x} \in K[\mathbf{x}_0, 2\mu] \subset \Omega$, $\mathbf{u} \in K[\mathbf{x}_0, 2\mu]$ *nechť je* $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ *positivně definitní, symetrická matice,* $\|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\| \leqq p$ *a nechť* $|P_{kj}(\mathbf{x}) - P_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|Q_{kj}(\mathbf{x}) - Q_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_2$, $|e_{kj}(\mathbf{x})| \leqq M_3$ *pro každé* $k = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$. *Potom existují čísla* λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ *(jejich velikost je udána lemmatem 2) taková, že pro libovolné body* $\mathbf{x}_i \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \dots, \nu$ *platí nerovnost* (13). *Platí-li pro přirozené číslo* ν_0 *nerovnost*

$$Kq^{\nu_0} + pn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2 + M_3) < \frac{1}{2}$$

a je-li

$$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(Kq + pn(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}}\right),$$

potom posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definovaná vztahy* (10), (11) *konverguje k jistému bodu* $\boldsymbol{a} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, *jež je pak jediným řešením soustavy* (1) *v* $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Pro chybu platí následující odhady*:

$$\delta_{k\nu_0} \leqq \left[Kq^{\nu_0} + pn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_3)\right]\delta_l\,, \tag{21}$$

kde $\delta_l = \max\limits_{i=(k-1)\nu_0,\ldots,k\nu_0-1} \delta_i$, $k = 1, 2, \ldots$;

$$\delta_{k\nu_0} \leqq \left[Kq^{\nu_0} + pn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_3)\right]^k \delta_m\,, \tag{22}$$

kde $\delta_m = \max\limits_{i=0,\ldots,\nu_0-1} \delta_i$, $k = 1, 2, \ldots$.

Důkaz této věty se provádí pomocí lemmatu 2, 3 a 4. Protože je formálně analogický důkazu věty 3 práce [3], nebudeme jej provádět.

III

Nyní budeme zkoumat speciální případy iterační metody dané obecně předpisem (10), (11).

Buď dána soustava (1) a předpokládejme, že funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mají spojité první a druhé parciální derivace v okolí hledaného reálného řešení dané soustavy. Pro prvé a druhé parciální derivace funkcí f_i, $i = 1, \ldots, n$ zaveďme toto označení:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_{k,i}(\mathbf{x})\,, \quad \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}) = f_{k,ij}(\mathbf{x})\,.$$

Funkce $F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x})$ definujme vztahem

$$F_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})\,, \quad k = 1, \ldots, n\,. \tag{23}$$

Potom platí

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})\right) = \sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\mathbf{x}) f_{i,j}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})\,. \tag{24}$$

Položíme-li

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\mathbf{x}) f_{i,j}(\mathbf{x}) = F_{kj}(\mathbf{x})\,, \quad k = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n\,, \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) = e_{kj}(\mathbf{x})\,, \quad k = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n\,, \tag{26}$$

je splněna rovnost (8), přičemž funkce $F_{kj}(\mathbf{x})$, $e_{kj}(\mathbf{x})$ jsou v okolí Ω řešení $\boldsymbol{a}$ soustavy (1) spojité v důsledku spojitosti funkcí $f_{i,k}(\mathbf{x}), f_{i,kj}(\mathbf{x})$. Matice $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_{kj}(\mathbf{x}))$ je zřejmě symetrická a positivně semidefinitní, neboť je podle (25) součinem transponované matice k funkční matici soustavy (1) a matice funkční. Je-li tedy funkční matice soustavy (1) v bodě $\boldsymbol{a}$ regulární, je matice $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$ positivně definitní. Z (26) ihned plyne, že $e_{kj}(\boldsymbol{a}) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Také požadavek, aby funkce $F_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, n$ byly rovny nule právě tehdy, jsou-li funkce $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, n$ rovny nule je pak splněn, neboť soustava homogenních rovnic pro neznámé $f_1(\boldsymbol{a}), \ldots, f_n(\boldsymbol{a})$ (viz (23))

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\boldsymbol{a}) f_i(\boldsymbol{a}) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n \tag{27}$$

má pouze triviální řešení $f_1(\boldsymbol{a}) = 0, \ldots, f_n(\boldsymbol{a}) = 0$, protože její determinant je různý od nuly.

Položíme-li nyní $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$, kde $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$ je diagonální matice $\{F_{11}(\boldsymbol{x}), \ldots, F_{nn}(\boldsymbol{x})\}$, je $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}) = (Q_{ij}(\boldsymbol{x}))$, kde $Q_{ii}(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $Q_{ij}(\boldsymbol{x}) = - F_{ij}(\boldsymbol{x})$, $i \neq j$ a dostáváme iterační metodu zmíněnou v části I tohoto článku, při které řešíme soustavu lineárních rovnic (2) metodou iterací (z prvé rovnice vypočteme x_1, z druhé x_2, z třetí x_3 atd. a dosadíme do pravých stran ν-tou aproximaci. Levé strany pak udávají $(\nu + 1)$-ní aproximaci).

Při řešení soustav, jejichž funkční matice je symetrická positivně definitní můžeme s výhodou volit $F_1(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, F_n(\boldsymbol{x}) = f_n(\boldsymbol{x})$. Pak je

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = f_{k,j}(\boldsymbol{x})$$

a můžeme položit $F_{kj}(\boldsymbol{x}) = f_{k,j}(\boldsymbol{x})$ a $e_{kj}(\boldsymbol{x}) = 0$. (Matice $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$ je pak přímo funkční maticí soustavy). S takovýmito soustavami se můžeme setkat např. při výpočtu extrému funkce více proměnných (viz část III práce [2]).

Všimněme si nyní blíže symetrické, positivně definitní matice $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$ (viz (8)). Aby naše metoda konvergovala, je třeba, aby matice $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$ v rozkladu (9) matice $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$ splňovaly podmínku, že $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$ je positivně definitní, symetrická. Ukážeme nyní, že takovýto rozklad matice $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$ vždy existuje v okolí řešení $\boldsymbol{a}$, a že je možno dokonce požadovat, aby $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$ byla diagonální. Z rovnice $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$ totiž plyne, že $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{x})$. Označíme-li opět $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}) = (Q_{ij}(\boldsymbol{x}))$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = (P_{ij}(\boldsymbol{x}))$ a volíme-li pro $i \neq j$ $Q_{ij}(\boldsymbol{x}) = - F_{ij}(\boldsymbol{x})$ a $Q_{ii}(\boldsymbol{x}) > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |F_{ji}(\boldsymbol{x})|$, $i = 1, \ldots, n$, je zřejmě $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$ diagonální, neboť pro $i \neq j$ je $P_{ij}(\boldsymbol{x}) = F_{ij}(\boldsymbol{x}) + Q_{ij}(\boldsymbol{x}) = F_{ij}(\boldsymbol{x}) - F_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0$. Přitom jsou nutně matice $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$ positivně definitní, symetrické.

Matici $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$ můžeme také volit např. takto (v tomto případě není $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$ positivně definitní): položme $Q_{ij}(\boldsymbol{x}) = - F_{ij}(\boldsymbol{x})$ $(i \neq j)$ a volme $Q_{ii}(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \ldots, n)$ tak, aby platila nerovnost

$$2Q_{ii}(\boldsymbol{x}) + F_{ii}(\boldsymbol{x}) > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |F_{ji}(\boldsymbol{x})|\,. \tag{28}$$

Matice $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ je zřejmě opět diagonální. Matice $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ je pak positivně definitní, symetrická. Z rovnosti (28) totiž postupně plyne

$$Q_{ii}(\mathbf{x}) + F_{ii}(\mathbf{x}) + Q_{ii}(\mathbf{x}) > \sum_{i=1, j \neq i}^{n} |-F_{ji}(\mathbf{x})|,$$

$$P_{ii}(\mathbf{x}) + Q_{ii}(\mathbf{x}) > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |Q_{ji}(\mathbf{x})|.$$

Protože $P_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ pro $i \neq j$, je

$$P_{ii}(\mathbf{x}) + Q_{ii}(\mathbf{x}) > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |P_{ji}(\mathbf{x}) + Q_{ji}(\mathbf{x})|.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ je positivně definitní. Symetrie vyplývá ze symetrie matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Poznamenejme nakonec, že v případě, kdy platí pro matici $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ nerovnosti $F_{ii}(\mathbf{x}) > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |F_{ji}(\mathbf{x})|$, stačí volit

$$\begin{aligned} P_{ii}(\mathbf{x}) &= F_{ii}(\mathbf{x}) \ (i = 1, \ldots, n), \quad P_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \ (i \neq j), \\ Q_{ii}(\mathbf{x}) &= 0 \ (i = 1, \ldots, n), \quad Q_{ij}(\mathbf{x}) = -F_{ij}(\mathbf{x}) \ (i \neq j). \end{aligned} \tag{29}$$

Matice $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ je pak positivně definitní. Její symetrie vyplývá ze symetrie matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. V tomto posledním případě mají podmínky konvergence a odhady pro chybu zvláště jednoduchý tvar. Platí tato věta:

Věta 3. *Buď λ kladné číslo. Pro všechna $\mathbf{x} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ nechť platí $0 < m \leqq F_{ii}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a*

$$\frac{1}{F_{ii}(\mathbf{x})} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |F_{ji}(\mathbf{x})| \leqq q, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Pro libovolné $\mathbf{x} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\mathbf{y} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ nechť dále platí $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{y})| \leqq M_1$, $|e_{kj}(\mathbf{x})| \leqq M_2$. Buď dále

$$R = q + \frac{n(M_1 + M_2)}{m} < 1, \quad \frac{d_0}{1 - R} \leqq \lambda.$$

Potom existuje bod $\mathbf{a} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ takový, že posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ definovaná vztahy (10), (11), kde klademe (29), konverguje a je $\lim_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. Bod $\mathbf{a}$ je pak jediným řešením soustavy (1) v $K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Pro chybu pak platí odhad

$$\delta_{\nu+1} \leqq R\delta_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{31}$$

Důkaz se provádí pomocí lemmatu 3 a 4. Nebudeme jej provádět, neboť je analogický důkazu věty 1 práce [2]. Z důkazu je zřejmo, že symetrie matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ není podstatná za předpokladu podmínky (30), neboť se jí v důkazu nikde nevyužívá. To nám umožňuje za matici $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ vzíti přímo (obecně nesymetrickou) funkční matici soustavy (1), jestliže tato splňuje v okolí řešení podmínku (30). Výpočet se tak zjednoduší.

Numerickou účinnost metody definované vztahy (10), (11) ukážeme na dvou numerických příkladech.

Příklad 1. Abychom mohli porovnat naši metodu s metodou zkoumanou v [2] a [3] a s metodou Newtonovou, volme týž příklad, jako v [3] a [4]. Mějme soustavu

$$x^3 - 2xy + 2 = 0\,, \quad xy^2 - 2y = 0\,,$$

jejímž přesným řešením jsou hodnoty $x = \sqrt[3]{2} \doteq 1{,}259\,9210$ a $y = \sqrt[3]{4} \doteq 1{,}587\,4011$. Budeme postupovat podle (23), (24), (25), (26). Je tedy $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ (matice $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ a vektor $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ byly definovány v části I), tj.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (3x^2 - 2y)^2 + y^4, & -2x(3x^2 - 2y) + y^2(2xy - 2) \\ -2x(3x^2 - 2y) + y^2(2xy - 2), & 4x^2 + (2xy - 2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (3x^2 - 2y)(x^3 - 2xy + 2) + y^2(xy^2 - 2y) \\ -2x(x^3 - 2xy + 2) + (2xy - 2)(xy^2 - 2y) \end{pmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ pak zřejmě v okolí řešení splňuje podmínku (30). Volíme-li $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \{(3x^2 - 2y)^2 + y^4, 4x^2 + (2xy - 2)^2\}$, můžeme použít věty 3.

Aproximace $(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$ počítejme podle vzorce (12). Z (12) plyne

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}_\nu)\,(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu) = -\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)\,, \tag{32}$$

což je soustava lineárních rovnic pro neznámé $x_{\nu+1} - x_\nu$, $y_{\nu+1} - y_\nu$. Tuto soustavu lze při každém kroku snadno řešit, neboť má diagonální matici (srovnej příklad 1 článku [3], kde příslušná matice byla trojúhelníková). To je výhoda, zvl. je-li počet neznámých větší než 2 (srovnej výpočet Newtonovou metodou). Z (32) dostáváme

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{1}{(3x_\nu^2 - 2y_\nu)^2 + y_\nu^4}\left[(3x_\nu^2 - 2y_\nu)(x_\nu^3 - 2x_\nu y_\nu + 2) + y_\nu^2(x_\nu y_\nu^2 - 2y_\nu)\right],$$

$$y_{\nu+1} = y_\nu - \frac{1}{4x_\nu^2 + (2x_\nu y_\nu - 2)^2}\left[-2x_\nu(x_\nu^3 - 2x_\nu y_\nu + 2) + (2x_\nu y_\nu - 2)(x_\nu y_\nu^2 - 2y_\nu)\right].$$

Volíme-li počáteční aproximaci stejně jako v [3] $(x_0, y_0) = (1{,}3; 1{,}6)$, dospíváme k tabulce 1.

TABULKA 1

ν	x_ν	y_ν	δ_ν	d_ν
0	1,300 0000	1,600 0000	0,040 0790	0,039 4876
1	1,260 5124	1,584 2206	0,003 1805	0,003 1247
2	1,260 2741	1,587 3453	0,000 3531	0,000 3465
3	1,259 9276	1,587 3658	0,000 0353	0,000 0346
4	1,259 9252	1,587 4004	0,000 0042	0,000 0041
5	1,259 9211	1,587 4007	0,000 0004	0,000 0004
6	1,259 9210	1,587 4011	0,000 0000	

Poněkud pomalejší konvergence ve srovnání s [3] je vyvážena tím, že soustava (32) s diagonální maticí je snadněji řešitelná, než obdobná soustava s trojúhelníkovou maticí v [3].

Vezměme nyní bod $\boldsymbol{x}_4 = (1{,}259\,9252,\ 1{,}587\,4004)$, $\lambda = 0{,}000\,005$ a zkusíme, zda jsou splněny předpoklady věty 3. V $K[\boldsymbol{x}_4, 2\lambda]$ je $M_1 = 0{,}000\,736$, $M_2 = 0{,}000\,270$, $m = 8{,}869$, $q = 0{,}117\,21$. Je tedy $R = 0{,}117\,44$, takže

$$\frac{d_4}{1 - R} = 0{,}000\,0036 < 0{,}000\,0050 = \lambda\,.$$

Předpoklady věty 3 jsou tedy splněny. Pro $\nu \geqq 4$ platí tedy

$$\delta_{\nu+1} \leqq 0{,}11744\delta_\nu$$

a řešení leží v $K[\boldsymbol{x}_4, 2\lambda]$, tj. v intervalu

$$1{,}259\,9202 \leqq x \leqq 1{,}259\,9302\,, \quad 1{,}587\,3954 \leqq y \leqq 1{,}587\,4054\,.$$

Příklad 2. Stejně jako v [3] uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2z - 10 &= 0\,, \\ 2xy - z^2 - 15 &= 0\,, \\ xz^2 + 3y - 10 &= 0\,, \end{aligned}$$

jejímž přesným řešením je $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$. Matici $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ definujme stejně jako v příkladě 1 pomocí (23), (24), (25), (26). (Matice $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_{ij}(\boldsymbol{x}))$ v tomto případě nesplňuje v okolí řešení podmínku (30). Volíme-li $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \{F_{11}(\boldsymbol{x}), \ldots, F_{nn}(\boldsymbol{x})\}$, lze však snadno ukázat, že matice $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ je positivně definitní a metoda konverguje.) Z (32) dostáváme pro postupné aproximace výrazy

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{1}{9 + 4y_\nu^2 + z_\nu^4} &[3(3x_\nu - 2y_\nu + 2z_\nu - 10) + 2y_\nu(2x_\nu y_\nu - z_\nu^2 - 15) + \\ &+ z_\nu^2(x_\nu z_\nu^2 + 3y_\nu - 10)]\,, \\ y_{\nu+1} = y_\nu - \frac{1}{13 + 4x_\nu^2} &[- 2(3x_\nu - 2y_\nu + 2z_\nu - 10) + 2x_\nu(2x_\nu y_\nu - z_\nu^2 - 15) + \\ &+ 3(x_\nu z_\nu^2 + 3y_\nu - 10)]\,, \\ z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{1}{4 + 4z_\nu^2 + 4x_\nu^2 z_\nu^2} &[2(3x_\nu - 2y_\nu + 2z_\nu - 10) + 2z_\nu(2x_\nu y_\nu - z_\nu^2 - 15) + \\ &+ 2x_\nu z_\nu(x_\nu z_\nu^2 + 3y_\nu - 10)]\,. \end{aligned}$$

Volíme-li počáteční aproximace opět jako v [3]

$$(x_0, y_0, z_0) = (3{,}9;\ 2{,}1;\ 1{,}1)\,,$$

dospíváme k tabulce 2.

TABULKA 2

ν	x_ν	y_ν	z_ν	δ_ν
0	3,900 00	2,100 00	1,100 00	0,100 00
1	3,862 74	2,032 51	1,005 78	0,137 25
2	3,962 50	2,052 39	1,009 70	0,052 39
3	3,939 60	2,024 12	1,000 21	0,060 39
4	3,949 64	2,022 92	1,003 72	0,050 35
5	3,973 61	2,018 90	1,002 92	0,026 38
6	3,978 62	2,009 82	1,001 14	0,021 37
7	3,988 91	2,007 98	1,001 02	0,011 08
8	3,990 86	2,004 12	1,000 48	0,009 13
9	3,995 28	2,003 42	1,000 44	0,004 71

Literatura

[1] *A. M. Ostrowski*: Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York and London, 1960.

[2] *M. Šisler*: O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic, I. Čas. pro pěst. mat., *86*, 1961, 439—461.

[3] *M. Šisler*: O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic, II. Čas. pro pěst. mat., *87*, 1962, 81—93.

[4] *M. Šisler*: O konvergenci iteračních metod řešení soustavy nelineárních rovnic. Apl. Mat. *5*, 1960, 141—150.

[5] *В. Н. Феддеева*: Вычислительные методы линейной алгебры. Москва, Ленинград, 1950.

Резюме

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР (Miroslav Šisler), Прага

В работе доказываются некоторые достаточные условия для сходимости одного итерационного метода для вычисления действительного решения систем n нелинейных уравнений с n неизвестными.

Пусть задана система (1), где f_i — функции действительных переменных. Пусть, далее, F_i, $i = 1, \ldots, n$, — непрерывные действительные функции действительных переменных, имеющие в некоторой окрестности Ω действительного решения $\boldsymbol{a}$ системы (1) непрерывные первые частные производные, и пусть в Ω функции F_i, $i = 1, \ldots, n$ равны нулю тогда и только тогда, когда функции f_i, $i = 1, \ldots, n$ равны нулю. Пусть в окрестности Ω имеет место равенство (8), где функции F_{kj}, e_{kj} непрерывны, $e_{kj}(\boldsymbol{a}) = 0$ и матрица $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_{kj}(\boldsymbol{x}))$ симме-

трична и положительно определена. Пусть, далее, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ — действительные матрицы с непрерывными элементами и пусть для каждого $\boldsymbol{x} \in \Omega$ имеет место равенство $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$. $(\nu + 1)$-ая аппроксимация при исследованном итерационном методе определяется формулой

$$\boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_\nu)\,,$$

где $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_\nu) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\nu)\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)$. (Из этих двух формул вытекает более простая формула $\boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)$.) При этом $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ обозначает вектор-столбец, координатами которого суть функции $F_1(\boldsymbol{x}), \ldots, F_n(\boldsymbol{x})$. Выше указанным способом (определением функций F_{kj}, e_{kj}) можно обобщить и метод, исследованный в статьях [2] и [3].

Введем теперь следующие обозначения: $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $\mathrm{K}[\boldsymbol{z}, \mu]$ обозначает множество точек $\boldsymbol{x}$, для которых $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| \leqq \mu/2$. Главным результатом работы является теорема 2:

Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — точка и μ — положительное число. Для каждого $\boldsymbol{x} \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\mu] \subset \Omega$ и $\boldsymbol{u} \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\mu]$ пусть $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ — положительно определенная, симметрическая матрица, $\|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x})\| \leqq p$ и пусть $|P_{kj}(\boldsymbol{x}) - P_{kj}(\boldsymbol{u})| \leqq M_1$, $|Q_{kj}(\boldsymbol{x}) - Q_{kj}(\boldsymbol{u})| \leqq M_2$, $|e_{kj}(\boldsymbol{x})| \leqq M_3$ для каждого $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда существуют числа λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ (числа λ, K, q, определяет лемма 2), что для любых точек $\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ имеет место неравенство (13). Если для натурального числа ν_0 имеет место неравенство

$$Kq^{\nu_0} + pn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2 + M_3) < \frac{1}{2}$$

и если

$$d_0 \leqq \min\left[\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)\,(Kq + pn(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}}\right],$$

то последовательность $\{\boldsymbol{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ сходится к известной точке $\boldsymbol{a} \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, которая является тогда единственным решением системы (1) в $\mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$. Для погрешности найдены оценки (21), (22). (Здесь $\delta_\nu = \|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|$, $d_\nu = \|x_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\|$.)

В абзаце III исследованы некоторые частные случаи определенного метода. Если f_i имеют в окрестности Ω решения $\boldsymbol{a}$ системы (1) непрерывные первые и вторые частные производные $(f_{i,j}, f_{i,jk})$, положим (23) и (25), (26). (Матрица $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_{kj}(\boldsymbol{x}))$ является ,очевидно, произведением транспонированной функциональной матрицы и функциональной матрицы системы (1).) Если, далее, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (P_{ij}(\boldsymbol{x}))$, $P_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0$ $(i \neq j)$ и $P_{ii}(\boldsymbol{x}) = F_{ii}(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \ldots, n)$ и где $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = (Q_{ij}(\boldsymbol{x}))$, $Q_{ij}(\boldsymbol{x}) = -F_{ij}(\boldsymbol{x})$ $(i \neq j)$, $Q_{ii}(\boldsymbol{x}) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то определенный таким образом метод соответствует известному методу итераций для решения линейных уравнений. В этом случае имеет место теорема 3.

В абзаце III тоже показано, что всегда можно матрицу $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ писать в виде (9), где $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ — положительно определенная и $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ диагональная.

Если функциональная матрица системы (1) является симметрической, положительно определенной, можно просто положить $F_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, n$ и $F_{kj}(\mathbf{x}) = f_{k,j}(\mathbf{x})$, $e_{kj}(\mathbf{x}) = 0$ (этот случай очень важен при вычислении экстремумов функций n переменных).

В абзаце IV работы показана вычислительная эффективность метода на двух численных примерах. Скорость сходимости в обоих случаях очевидна из таблиц. Для сравнения скорости сходимости исследованного метода с методом Ньютона и с методом, определенным в работе [2], выбирается пример 1 таким же образом, как в работах [3] и [4].

Zusammenfassung

ÜBER DIE LÖSUNG DER SYSTEME NICHTLINEARER GLEICHUNGEN

MIROSLAV ŠISLER, Praha

In der Arbeit sind hinreichende Bedingungen für die Konvergenz eines Iterationsverfahrens für die Berechung der reellen Lösung der Systeme nichtlinearer Gleichungen mit n Unbekannten bewiesen.

Sei das System (1) gegeben. Hier stellen f_i die reellen Funktionen von n reellen Veränderlichen dar, welche in der Umgebung Ω einer gewissen Lösung $\mathbf{a}$ des Systems (1) stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die Funktionen F_i, $i = 1, \ldots, n$ seien in der Umgebung Ω gleich Null dann und nur dann, wenn die Funktionen f_i, $i = 1, \ldots, n$ gleich Null sind.

In der Umgebung Ω gelte die Gleichung (8), wo die Funktionen F_{kj}, e_{kj} stetig sind, $e_{kj}(\mathbf{a}) = 0$ und die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_{kj}(\mathbf{x}))$ symmetrisch und positiv definit ist. Seien ferner $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ reelle Matrizen mit stetigen Elementen und für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ gelte die Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})$. Die $(\nu + 1)$-ste Approximation wird bei unserem Iterationsverfahren mit Hilfe der Formel

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)$$

definiert, wo $\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)$ gilt (aus diesen zwei Formeln folgt die einfachere Formel $\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)$). Dabei wird mit $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ der Spaltenvektor, dessen Koordinaten die Funktionen $F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x})$ sind, bezeichnet. Durch die oben gezeigte Weise (mit Hilfe der Funktionen F_{kj}, e_{kj}) kann auch die in den Arbeiten [2] und [3] definierte Methode verallgemeinert werden.

Führen wir jetzt folgende Bezeichnungen ein: $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, und $\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ ist die Menge aller Punkte, für welche $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leqq \frac{1}{2}\mu$ gilt. Das Hauptresultat der Arbeit ist der Satz 2:

Es sei $\mathbf{x}_0$ ein Punkt und μ eine positive Zahl. Für jeden $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu] \subset \Omega$ und jeden $\mathbf{u} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$ sei die Matrix $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ symmetrisch und positiv definit, $\|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})\| \leqq p$ und gelte $|P_{kj}(\mathbf{x}) - P_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|Q_{kj}(\mathbf{x}) - Q_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_2$, $|e_{kj}(\mathbf{x})| \leqq M_3$ für jedes $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Dann existieren die Zahlen λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ (die Zahlen λ, K, q sind mit Hilfe des Lemma 2 definiert), dass für beliebige Punkte $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ die Ungleichung (13) gilt. Falls für eine natürliche Zahl ν_0 die Ungleichung

$$Kq^{\nu_0} + pn\left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2 + M_3) < \frac{1}{2}$$

und die Ungleichung

$$d_0 \leqq \min\left[\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(Kq + pn(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}}\right]$$

gilt, dann konvergiert die Folge $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ zu einem Punkt $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ und der Punkt $\mathbf{a}$ ist dann die einzige Lösung des Systems (1) in $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Dabei gelten die Fehlerabschätzungen (21), (22). (Hier ist $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$, $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$.)

Im Absatz III werden einige spezielle Fälle der oben definierten Methode untersucht. Falls f_i in der Umgebung Ω der reellen Lösung $\mathbf{a}$ des Systems (1) stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung $(f_{i,j}, f_{i,jk})$ haben, so setzen wir (23) und (25), (26). (Die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_{kj}(\mathbf{x}))$ ist offenbar das Produkt der transponierten Funktionalmatrix des Systems (1) und der Funktionalmatrix.) Schreiben wir ferner $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})$, wo $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (P_{ij}(\mathbf{x}))$, $P_{ij}(\mathbf{x}) = 0\ (i \neq j)$, $P_{ii}(\mathbf{x}) = F_{ii}(\mathbf{x})\ (i = 1, \ldots, n)$ und $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (Q_{ij}(\mathbf{x}))$, $Q_{ij}(\mathbf{x}) = -F_{ij}(\mathbf{x})\ (i \neq j)$, $Q_{ii}(\mathbf{x}) = 0\ (i = 1, \ldots, n)$ gilt, dann entspricht das so definierte Verfahren der bekannten Iterationsmethode für die Lösung des Systeme linearer Gleichungen und dabei gilt der Satz 3.

Im Absatz III ist auch bewiesen, dass die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ immer in der Form (9), wo $\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ positiv definit und $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ diagonal ist, geschrieben werden kann.

Falls die Funktionalmatrix des Systems (1) symmetrisch ist, man kann einfach $F_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, n$ und $F_{kj}(\mathbf{x}) = f_{k,j}(\mathbf{x})$, $e_{kj}(\mathbf{x}) = 0$ setzen (dieser Fall ist besonders wichtig bei der Berechnung der Extremen der Funktionen von n Veränderlichen).

Im Absatz IV der Arbeit ist die numerische Wirksamkeit des Verfahrens an zwei Beispielen gezeigt. Die Geschwindigkeit der Konvergenz in beiden Beispielen ist aus den Tabellen offenbar. Für den Vergleich der Geschwindigkeit der Konvergenz unseres Verfahrens mit dem Newtonschen Iterationsverfahren und mit dem in der Arbeit [2] definierten Verfahren, wurde dasselbe Beispiel, wie in den Arbeiten [3] und [4], gewählt.