Zbyněk Nádeník
O existenci mnohoúhelníka s předepsanými směry stran

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 3, 317--321

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117465

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

O EXISTENCI MNOHOÚHELNÍKA S PŘEDEPSANÝMI SMĚRY STRAN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Došlo dne 29. prosince 1961)

Existence mnohoúhelníka s danými směry stran a příbuzné otázky jsou vyšetřeny na základě elementárních poznatků z geometrické mechaniky. Článek velmi úzce souvisí s pracemi [8], [2], [4] a [5] s [6]; poslední dvě byly publikovány při recensním řízení tohoto příspěvku.

Úvod. K. LÖWNER [7] dokázal, že nejmenší konvexní obal sférického obrazu k tečen prostorové spojitě diferencovatelné uzavřené křivky Γ obsahuje střed jednotkové kulové plochy jako vnitřní bod. W. FENCHEL [3] zjistil, že i obrácení je správné: Je-li k uzavřená rektifikovatelná křivka na jednotkové kulové ploše, jejíž nejmenší konvexní obal obsahuje střed kulové plochy jako vnitřní bod, existuje uzavřená prostorová spojitě diferencovatelná křivka Γ se sférickým obrazem k tečen. SALKOWSKIHO důkaz Löwnerova tvrzení, který uvádí Fenchel v [3], lze snadno přizpůsobit i pro neregulární křivky Γ včetně mnohoúhelníků. Vzniká pak přirozená otázka, lze-li i Fenchelovu větu rozšířit. Odpověď je positivní.

Podrobně budeme diskutovat jen rovinný případ: Na jednotkové kružnici se středem O zvolme soustavu S bodů

(1) $$S_1, S_2, \ldots, S_n \quad (n \geqq 3)\,,$$

z nichž žádné dva sousední nesplývají anebo neleží na témže průměru; body S_1 a S_n považujeme za sousední. O soustavě S prohlásíme, že je uspořádaná vzestupně, má-li tuto vlastnost: Oběhneme-li jednotkovou kružnici v témž jistém smyslu, je za bodem S_1 bod S_2, za bodem S_2 bod $S_3, \ldots$, za bodem S_n bod S_1. Dále zvolme lomenou čáru L s vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$; při $A_{n+1} \equiv A_1$ je čára L mnohoúhelník, který označíme M a budeme o něm předpokládat, že žádné tři jeho sousední vrcholy neleží na přímce. Jestliže pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou u mnohoúhelníka M vázané vektory $A_{i+1} - A_i$ a $S_i - O$ souhlasně rovnoběžné, řekneme, že mnohoúhelník M je určen soustavou S. Pak platí:

Věta 1. *Soustava S určuje mnohoúhelník M tehdy a jen tehdy, když její nejmenší konvexní obal obsahuje střed O jako svůj vnitřní bod.*

Věta 2. *Každá vzestupně uspořádaná soustava S, která splňuje podmínku z věty 1, určuje jednoduchý mnohoúhelník.*

S existencí našeho mnohoúhelníka je spjata i tato věta:

Věta 3. *Nechť je dána soustava dvou rovnic o $n - 1 \geqq 2$ neznámých z_i*

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i + \alpha_n = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i z_i + \beta_n = 0\,.$$

Bod s pravoúhlými souřadnicemi $[\alpha_i, \beta_i]$ označme R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Soustava (2) má řešení složené pouze z kladných čísel tehdy a jen tehdy, když nejmenší konvexní obal bodů $R_1, R_2, \ldots, R_n$ obsahuje počátek soustavy souřadnic jako vnitřní bod.

Všecky věty dokážeme jistou modifikací Fenchelovy myšlenky z důkazu jeho věty. Pro základní pojmy a věty z mechaniky soustavy hmotných bodů odkazujeme na [1], str. 152–157. Zvláště jen vytkneme, že systém hmotných bodů s kladnými hmotami má těžiště uvnitř svého nejmenšího konvexního obalu. Aby vynikla elementárnost celého postupu a užitečnost i dosah Fenchelovy myšlenky, provedeme důkazy podrobněji než by bylo nutně třeba.

V prostoru se jednotková kružnice nahradí jednotkovou kulovou plochou a věta 1 platí beze změny. V jejím důkazu v odst. 1 je dimense prostoru zcela nepodstatná.

1. Důkaz věty 1. V soustavě pravoúhlých souřadnic s počátkem ve středu O buďte $[x_i, y_i]$ souřadnice bodu S_i, (u_i, v_i) souřadnice vektoru $A_{i+1} - A_i$ a dále označme $a_i > 0$ jeho velikost $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Množinu vnitřních bodů nejmenšího konvexního obalu bodů $S_j, S_{j+1}, \ldots, S_n$ $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$ označíme ještě $K(S_j, \ldots, S_n)$.

a) Nechť mnohoúhelník M je určen soustavou S. Pak je $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ a současně $u_i = a_i x_i$, $v_i = a_i y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, takže $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$. Tyto rovnice znamenají, že systém hmotných bodů, který dostaneme, když body (1) opatříme postupně kladnými hmotami $a_1, a_2, \ldots, a_n$, má těžiště v počátku O. Tedy $O \in K(S_1, \ldots, S_n)$.

b) Nechť bod $O \in K(S_1, \ldots, S_n)$. Dokážeme, že pak lze body (1) opatřit kladnými hmotami tak, aby vzniklý systém hmotných bodů měl těžiště v počátku. – 1) Opatřme bod S_1 libovolnou kladnou hmotou m_1. Na prodloužení úsečky S_1O za bod O existuje bod $O_2 \in K(S_2, .., S_n)$; opatřme jej kladnou hmotou m_2^* tak, aby těžiště hmotných bodů S_1, O_2 byl bod O. – 2) Na prodloužení úsečky S_2O_2 za bod O_2 existuje bod $O_3 \in K(S_3, \ldots, S_n)$. Opatřme body S_2 a O_3 kladnými hmotami m_2 a m_3^* tak, aby jejich těžiště byl bod O_2 s totální hmotou m_2^*. – 3) … – n – 2)Na prodloužení úsečky $S_{n-2}O_{n-2}$ za bod O_{n-2} existuje bod $O_{n-1} \in K(S_{n-1}, S_n)$, tj. bod otevřené úsečky $S_{n-1}S_n$. Opatřme body S_{n-2} a O_{n-1} kladnými hmotami m_{n-2} a m_{n-1}^* tak, aby jejich těžiště byl bod O_{n-2} s totální hmotou m_{n-2}^*. – n – 1) Opatřme body S_{n-1} a S_n kladnými hmotami m_{n-1} a m_n tak, aby jejich těžiště byl bod O_{n-1} s totální hmotou m^*_{n-1}.

Pak systém hmotných bodů (1) opatřených postupně kladnými hmotami m_1 $m_2, \ldots, m_n$ podle výše uvedené konstrukce má těžiště v počátku O. Je tedy $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0$. Zvolme lomenou čáru L s vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ tak, aby platilo $A_{i+1} - A_i = m_i(S_i - O)$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Pro souřadnice (u_i, v_i) vektorů $A_{i+1} - A_i$ tedy platí $u_i = m_i x_i$, $v_i = m_i y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, takže $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. To však znamená $A_{n+1} \equiv A_1$, takže lomená čára L je vskutku mnohoúhelník M určený soustavou S.

Důkaz obsahuje i konstrukci všech mnohoúhelníků M určených soustavou S.

2. Důkaz věty 2. V celém odst. 2 budeme předpokládat, že soustava S určuje mnohoúhelník M. Opatříme-li body (1) postupně kladnými hmotami

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \tag{3}$$

vznikne systém hmotných bodů, který podle odst. 1 má těžiště v bodě O. Mnohoúhelník M nikoliv jednoduchý má buďto a) dva vrcholy totožné, nebo b) jedna strana obsahuje vrchol jako vnitřní bod, nebo c) dvě strany mají společný vnitřní bod; jiné možnosti není (viz [2], str. 417).

Podmínku pro jednoduchost mnohoúhelníka M lze pak vyslovit takto: *Budiž*

$$S_i, S_{i+1}, \ldots, S_j \tag{4}$$

libovolná skupina alespoň tří a nejvýše $n - 1$ po sobě jdoucích bodů (1) v cyklickém uspořádání[1]) *a opatřených příslušnými hmotami z (3). Těžiště tohoto systému hmotných bodů nesplývá α) se středem O, a to ani po případném zmenšení β) hmoty v jednom z bodů S_i, S_j nebo γ) hmot v obou bodech S_i, S_j.*

Důkaz. Kdyby nenastal případ α) [resp. β) resp. γ)], došlo by podle odst. 1 k situaci uvedené výše v tomto odst. 2 sub a) [resp. sub b) resp. sub c)]. (Eventuální rovnoběžnost dvou sousedních stran, která tu může nastat — a již jsme dříve předpokladem o soustavě bodů (1) vylučovali — zřejmě nevadí, neboť vzájemná poloha bodů (1) byla v dosavadních úvahách zcela nepodstatná.)

Poznamenejme vyslovně, že v prostoru se podmínka pro jednoduchost mnohoúhelníka M určeného soustavou S formuluje a dokáže úplně stejně.

Nechť nyní soustava S je uspořádána vzestupně. — Předpokládejme předně, že nejmenší konvexní obal bodů (4) neobsahuje bod O jako svůj vnitřní bod; pak jistě platí všecky tři případy z výše uvedené podmínky. — Za druhé předpokládejme, že bod O je vnitřní bod nejmenšího konvexního obalu bodů (4). Těžiště T systému hmotných bodů (4) leží — i po případném zmenšení hmot m_i a m_j — v téže otevřené polorovině

[1]) Tedy např. $S_{n-1}S_nS_1$ atp.

vyťaté spojnicí S_iS_j jako bod O a v opačné otevřené polorovině leží těžiště T^* systému hmotných bodů, který dostaneme, když z hmotných bodů (1) odstraníme hmotné body (4). Těžiště T je tedy vždy vzdálenější od spojnice $S_i\,S_j$ než bod O. Opět platí všecky tři případy z naší podmínky.

3. Důkaz věty 3. Snadno se nahlédne, že obecně nehomogenní soustava (2) má řešení složené pouze z kladných čísel tehdy a jen tehdy, má-li takové řešení i homogenní soustava s n neznámými t_j

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j t_j = 0\,, \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j t_j = 0\,. \tag{5}$$

Nechť soustava (5) má řešení

$$t_1, t_2, \ldots, t_n\,; \quad t_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{6}$$

Opatříme-li bod R_j kladnou hmotou t_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, dostaneme systém n hmotných bodů, jehož těžiště je podle (5) v počátku. To znamená, že počátek je vnitřním bodem nejmenšího konvexního obalu bodů $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Naopak nechť nejmenší konvexní obal těchto bodů obsahuje počátek jako vnitřní bod. Pak je můžeme – podle konstrukce v části b) odst. 1 – opatřit hmotami (6) tak, aby vzniklý systém n hmotných bodů měl těžiště v počátku. Pak však platí (5).

Literatura

[1] *S. Banach*: Mechanics. Warszawa-Wrocław 1951.

[2] *K. Čulík*: O existenci rovinných mnohoúhelníků s předepsanými úhly. Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), str. 415–426.

[3] *W. Fenchel*: Geschlossene Raumkurven mit vorgeschriebenem Tangentenbild. Jber. Deutsch. Math. Vereinig. *XXXIX* (1930), str. 183–185.

[4] *V. Havel*: Poznámka o existenci mnohoúhelníka. Čas. pro pěst. mat. *81* (1956), str. 405–409.

[5] *V. Havel*: Sur la solution strictement positive d'un système d'équations linéaires homogènes. Čas. pro pěst. mat. *87* (1962), str. 22–30.

[6] *V. Polák*: O existenci jednoduchého zborceného mnohoúhelníka v E_3 s předepsanými směry stran. Čas. pro pěst. mat. *87* (1962), str. 267–283.

[7] *G. Pólya-G. Szegö*: Aufgaben und Lehrsätze. Bd. II, Berlin 1925, str. 165 a 391, úloha 13.

[8] *A. Rényi*: Poznámka o úhlech mnohoúhelníka. Čas. pro pěst. mat. *78* (1953), str. 305–306.

Резюме

О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОГОУГОЛЬНИКА С ПРЕДПИСАННЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ СТОРОН

ЗВЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Геометрия материальных точек использована к элементарному выражению условий, по которым данные направления являются направлениями сторон многоугольника.

Zusammenfassung

ÜBER DIE EXISTENZ EINES VIELECKES MIT VORGESCHRIEBENEN SEITENRICHTUNGEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Die Geometrie der Massenpunkte wird zur elementaren Formulierung der Bedingungen benutzt, bei denen die gegebenen Richtungen die Seitenrichtungen eines Vieleckes sind.