Čestmír Vitner

O úhlech lineárních podprostorů v E_n

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 4, 415--423

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117452`

O ÚHLECH LINEÁRNÍCH PODPROSTORŮ V E_n

ČESTMÍR VITNER, Praha

(Došlo dne 5. května 1961)

V této práci je především ukázáno, že nalezení úhlů dvou lineárních podprostorů se v podstatě redukuje na řešení charakteristické rovnice jisté matice. Dále je zde ukázána souvislost algebraických vlastností zmíněné matice s geometrickými vlastnostmi uvažovaných podprostorů. Konečně je zde ukázán vztah mezi úhly dvou prostorů a mezi úhly jejich ortogonálních doplňků.

Vektory v reálném euklidovském prostoru E_n tvoří lineární vektorový prostor $\mathfrak{R}_n$. Při studiu úhlů lineárních podprostorů v E_n lze se omezit na studium lineárních podprostorů v $\mathfrak{R}_n$.

Lineární podprostory v $\mathfrak{R}_n$ budeme označovat $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_s$, ..., kde index bude vždy znamenat dimensi uvažovaného podprostoru. Je-li lineární podprostor vytvořen vektory $b_1, \ldots, b_r$, označíme ho $\{b_1, \ldots, b_r\}$.

Mějme jednotkový vektor a a lineární podprostor $\mathfrak{B}_r = \{b_1, \ldots, b_r\}$, kde vektory $b_1, \ldots, b_r$ tvoří ortonormální basi v $\mathfrak{B}_r$. Pro ostrý úhel $\varphi = \sphericalangle (a, \mathfrak{B}_r)$ (tj. $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$) jednotkového vektoru a s podprostorem $\mathfrak{B}_r$ se snadno odvodí vzorec

$$\sin^2 \varphi = 1 - \sum_{i=1}^{r} (a, b_i)^2 . \tag{1}$$

Uvažujme nyní vektorové podprostory $\mathfrak{B}_s$, $\mathfrak{A}_r$ a hledejme extrémy úhlu $\sphericalangle (a, \mathfrak{B}_s)$, probíhá-li vektor a prostor $\mathfrak{A}_r$. Přitom se zřejmě stačí omezit na jednotkové vektory a tj. $(a, a) = 1$.

Zvolíme-li v $\mathfrak{A}_r$ ortonormální basi $a_1, \ldots, a_r$, v $\mathfrak{B}_s$ ortonormální basi $b_1, \ldots, b_s$, jest podle vzorce (1) třeba zkoumat extrémy funkce

$$f = 1 - \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} (a_k, b_i)\, u^k \right)^2 \tag{2}$$

proměnných $u^1, \ldots, u^r$, za vedlejší podmínky

$$\sum_{i,j=1}^{r} (a_i, a_j)\, u^i u^j - 1 = 0 , \tag{3}$$

tj. extrémy funkce $f = 1 - \sum_{i=1}^{s} (a, b_i)^2$ proměnného vektorového argumentu a za vedlejší podmínky $(a, a) - 1 = 0$.

Protože jde o spojitou funkci f na kompaktní množině (3), jest existence extrémů zaručena. Hledejme stacionární vektory podle Lagrangeovy metody. Utvořme funkci

$$\omega = 1 - \sum_{i=1}^{s} (a, b_i)^2 + \lambda((a, a) - 1) .$$

Derivováním podle u^l dostaneme podmínky

$$\sum_{i=1}^{s} (a, b_i)(a_l, b_i) - \lambda(a, a_l) = 0 , \quad l = 1, 2, \ldots, r , \tag{4}$$

což je homogenní soustava r lineárních rovnic pro r neznámých $u^1, \ldots, u^r$. Determinant této soustavy se musí rovnat nule. Dostáváme tedy pro λ rovnici

$$\left| \sum_{i=1}^{s} (a_k, b_i)(a_l, b_i) - \lambda \delta_{kl} \right| = 0 , \tag{5}$$

kde δ_{kl} je Kroneckerovo delta.

Označíme-li matici $\|(a_k, b_i)\|$, $k = 1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, s$ písmenem A, matici k ní transponovanou A' a jednotkovou matici stupně r J_r, můžeme rovnici (5) přepsat na

$$|AA' - \lambda J_r| = 0 . \tag{5'}$$

Jest tedy λ kořenem charakteristického polynomu čtvercové matice AA'.

Buď $a = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k u^k$ stacionární vektor příslušný k číslu λ. Vynásobíme-li rovnice (4) α_l a sečteme, dostaneme $\sum_{i=1}^{s} (a, b_i)^2 - \lambda = 0$, což podle (1) jest

$$\lambda = \cos^2 \varphi , \tag{6}$$

kde φ znamená úhel stacionárního vektoru a s prostorem $\mathfrak{B}_s$. Stejný úhel s prostorem $\mathfrak{B}_s$ svírají všechny nenulové vektory jednorozměrného prostoru $\{a\}$. Tyto vektory jsou zřejmě také řešením rovnic (4), nemusí ovšem splňovat podmínku $(a, a) = 1$. Nyní platí dále:

Věta 1. *Polynom $|AA' - \lambda J_r|$ z rovnice (5′) nezávisí na volbě ortonormálních basí v prostorech $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_s$.*

Důkaz. Nechť $a_1^*, \ldots, a_r^*$ je nějaká nová ortonormální base v $\mathfrak{A}_r$ a $b_1^*, \ldots, b_s^*$ nějaká nová ortonormální base v $\mathfrak{B}_s$. Potom platí

$$a_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} a_j^* , \quad b_i = \sum_{l=1}^{s} d_{il} b_l^* , \quad k = 1, \ldots, r, \ i = 1, \ldots, s , \tag{7}$$

kde matice $C = \|c_{kj}\|$, $D = \|d_{il}\|$ $(k, j = 1, \ldots, r, i, l = 1, \ldots, s)$ jsou ortogonální. Odtud dostaneme snadno pro matici A^* v nových basích

$$A = CA^*D' . \tag{8}$$

Odtud plyne

$$|AA' - \lambda J_r| = |CA^*D'DA^{*\prime}C' - \lambda CJ_rC'| = \\ = |C|\,|A^*A^{*\prime} - \lambda J_r|\,|C'| = |A^*A^{*\prime} - \lambda J_r|\,,$$

c. b. d. Dále platí

Věta 2. *Kořeny λ rovnice* (5′) *jsou reálné a platí pro ně*

$$0 \leqq \lambda \leqq 1\,.$$

Důkaz. a) Zřejmě platí $(AA')' = AA'$. *Je tedy matice AA' symetrická.* Odtud plyne, jak známo z lineární algebry (viz např. [1]), reálnost kořenů rovnice (5′).

b) Abychom dokázali, že pro kořeny λ platí nerovnost $0 \leqq \lambda$, stačí, jak známo z lineární algebry (viz např. [1]) dokázat, že *matice AA' je positivně semidefinitní.* Pro kvadratickou formu $\sum\limits_{k,l=1}^{r} \sum\limits_{i=1}^{s} (a_k, b_i)(a_l, b_i)\, x^k x^l$ však platí

$$\sum_{k,l=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} (a_k, b_i)(a_l, b_i)\, x^k x^l = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k,l=1}^{r} (a_k x^k, b_i)(a_l x^l, b_i) = \\ = \sum_{i=1}^{s} \Big(\sum_{k=1}^{r} (a_k x^k, b_i) \Big)^2 \geqq 0\,.$$

Odtud plyne positivní semidefinitnost matice AA'.

c) Rovnici (5′) můžeme zřejmě přepsat na

$$|AA' - J_r - (\lambda - 1)\, J_r| = 0\,. \tag{5″}$$

Abychom dokázali, že platí nerovnost $\lambda \leqq 1$, stačí podle (5″) a podle známé věty z lineární algebry (viz [1]) dokázat, že matice $AA' - J_r$ je *negativně semidefinitní.* Abychom to dokázali, uvažujme kvadratickou formu

$$\sum_{k,l=1}^{r} \Big(\sum_{i=1}^{s} (a_k, b_i)(a_l, b_i) - \delta_{kl} \Big) x^k x^l = \sum_{k,l=1}^{r} \Big(\sum_{i=1}^{s} (a_k, b_i)(a_l, b_i) - (a_k, a_l) \Big) x^k x^l\,.$$

Položíme-li pro stručnost $c = \sum\limits_{k=1}^{r} a_k x^k$, dostaneme pro tuto kvadratickou formu snadno $\sum\limits_{i=1}^{s} (c, b_i)^2 - (c, c)$, což je podle Besselovy nerovnosti menší anebo rovno nule. To jsme právě chtěli dokázat. Tím je věta 2 dokázána.

Věty 1 a 2 nás ospravedlňují k následující definici:

Definice 1. *Úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$* jsou čísla

$$\varphi_i = \arccos \sqrt{\lambda_i}\,, \tag{9}$$

kde λ_i jsou kořeny rovnice (5′).

Vektor, který je řešením soustavy (4) pro některé $\lambda = \cos^2 \varphi$ (nepožadujeme, aby byl jednotkový), budeme nazývat *vlastním vektorem* (příslušným kořenu $\lambda = \cos^2 \varphi$, nebo také příslušným úhlu φ) prostoru $\mathfrak{A}_r$, vlastním vzhledem k prostoru $\mathfrak{B}_s$.

Rovnici (5′) budeme nazývat rovnicí pro úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$. Obdržené výsledky můžeme shrnout do následující věty:

Věta 3. *Lineární prostor $\mathfrak{A}_r$ svírá s lineárním prostorem $\mathfrak{B}_s$ r úhlů, pro které platí*

$$0 \leqq \varphi_i \leqq \pi/2\,, \tag{10}$$

při čemž některé z těchto úhlů mohou splynout.

Úhel φ_i je přitom úhlem vlastního vektoru c_i – odpovídajícího úhlu φ_i – s prostorem $\mathfrak{B}_s$.

Jednotkové vlastní vektory prostoru $\mathfrak{A}_r$ dostaneme jako všechny stacionární vektory funkce $\sin^2 \psi = 1 - \sum_{i=1}^{s} (a, b_i)^2$ proměnného vektorového argumentu a při vedlejší podmínce $(a, a) = 1$ (ψ je – jak známo – úhel libovolného vektoru $a \in \mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$).

Následující věta mluví o dalších vlastnostech vlastních vektorů:

Věta 4. a) *K-násobnému kořenu $\lambda = \cos^2 \varphi$ rovnice (5) odpovídá v prostoru $\mathfrak{A}_r$ k-dimensionální podprostor vlastních vektorů.*

b) *Vlastní vektory, odpovídající dvěma různým kořenům rovnice (5) jsou vzájemně ortogonální.*

Důkaz. a) Z lineární algebry je známo (viz např. [1]), že číslo λ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice symetrické matice právě tehdy, má-li soustava rovnic (4) hodnot $n - k$. Odtud plyne ihned důkaz tvrzení a).

b) Označme ${}^1a = \sum_{i=1}^{r} a_i\, {}^1u^i$ vektor odpovídající kořenu λ_1 a ${}^2a = \sum_{i=1}^{r} a_i\, {}^2u^i$ vektor odpovídající kořenu λ_2. Platí tedy

$$\sum_{i=1}^{s} ({}^1a, b_i)(a_l, b_i) - \lambda_1({}^1a, a_l) = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{s} ({}^2a, b_i)(a_l, b_i) - \lambda_2({}^2a, a_l) = 0\,.$$

Vynásobením prvých rovnic ${}^2u^l$ a sečtením dostaneme

$$\sum_{i=1}^{s} ({}^1a, b_i)({}^2a, b_i) - \lambda_1({}^1a, {}^2a) = 0\,. \tag{11}$$

Vynásobením druhých rovnic ${}^1u^l$ a sečtením dostaneme

$$\sum_{i=1}^{s} ({}^2a, b_i)({}^1a, b_i) - \lambda_2({}^2a, {}^1a) = 0\,. \tag{12}$$

Odečtením rovnic (11) a (12) dostaneme $(\lambda_2 - \lambda_1)({}^1a, {}^2a) = 0$. Odtud plyne okamžitě dokazované tvrzení. Z věty 4 plyne snadno

Věta 5. *V prostoru $\mathfrak{A}_r$ existuje ortonormální base, skládající se z vektorů $e_1, \ldots, e_r$, vlastních vzhledem k prostoru $\mathfrak{B}_s$. (Úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$ se pak ovšem rovnají úhlům vektorů base s prostorem $\mathfrak{B}_s$.)*

Dále platí

Věta 6. *Buďiž $e_1, \ldots, e_r$ ortonormální base, skládající se z vlastních vektorů prostoru $\mathfrak{A}_r$, vlastních vzhledem k prostoru $\mathfrak{B}_s$. Úhly prostoru $\mathfrak{A}_s$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$ označme φ_i, při čemž úhel φ_i nechť odpovídá vlastnímu vektoru e_i. Podprostor $\{e_1, \ldots, e_t\} \subset \subset \mathfrak{A}_r$, $t < r$ svírá s prostorem $\mathfrak{B}_s$ úhly $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$. Těmto úhlům odpovídají vlastní vektory $e_1, \ldots, e_t$, jakožto vlastní vektory prostoru $\{e_1, \ldots, e_t\}$, vlastní vzhledem k prostoru $\mathfrak{B}_s$.*

Důkaz. Jednotkové vlastní vektory prostoru $\mathfrak{A}_r$, vlastní vzhledem k prostoru $\mathfrak{B}_s$, jsou podle definice zřejmě stacionární vektory funkce $1 - \sum_{i=1}^{s} (a, b_i)^2$ za vedlejší podmínky $(a, a) = 1$ ($b_1, \ldots, b_s$ je nějaká ortonormální base v $\mathfrak{B}_s$). Vlastní vektory prostoru $\{e_1, \ldots, e_t\}$, vlastní vzhledem k prostoru $\mathfrak{B}_s$, jsou stacionární vektory funkce $1 - \sum_{i=1}^{s} (a, b_i)^2$ za vedlejších podmínek $(a, a) = 1$, $(e_{t+1}, a) = 0$, $\ldots$, $(e_r, a) = 0$. Odtud se snadno nahlédne, že vlastní vektory prostoru $\mathfrak{A}_r$, ležící v prostoru $\{e_1, \ldots, e_t\}$ jsou rovněž vlastními vektory prostoru $\{e_1, \ldots, e_t\}$. Odtud již lehce plyne dokazované tvrzení.

Poznámka 1. Z toho, co bylo až doposud vyloženo, snadno plyne, že úhly $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$ a ortonormální basi $e_1, \ldots, e_r$ v $\mathfrak{A}_r$ z vlastních vektorů lze úplnou indukcí definovat následujícím způsobem: Nalezneme nejdříve jednotkový vektor $e_1 \in \mathfrak{A}_r$, který svírá s $\mathfrak{B}_s$ minimální ostrý úhel. Předpokládejme, že už máme sestrojeny vektory $e_1, \ldots, e_{i-1}$ a úhly $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$, $2 \leqq i \leqq r$. Utvořme nyní ortogonální doplněk $\mathfrak{A}_{r-i+1}$ k prostoru $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ a v $\mathfrak{A}_{r-i+1}$ najděme jednotkový vektor e_i, který svírá s prostorem $\mathfrak{B}_s$ minimální ostrý úhel φ_i. Z konstrukce snadno plyne, že při zvoleném označení platí $0 \leqq \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \ldots \leqq \varphi_r \leqq \pi/2$. Podobně jako minim bychom mohli použít maxim.

V případě prostorů nestejné dimense platí následující věta:

Věta 7. *Nechť $r < s$. Potom v prostoru $\mathfrak{B}_s$ existuje podprostor $\mathfrak{S}_{s-r}$ totálně kolmý k prostoru $\mathfrak{A}_r$. Buď $\mathfrak{H}_r$ podprostor v $\mathfrak{B}_s$ totálně kolmý ke $\mathfrak{S}_{s-r}$. Potom a) úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$ splývají s úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{H}_r$; b) $s - r$ úhlů prostoru $\mathfrak{B}_s$ s prostorem $\mathfrak{A}_r$ se rovná $\pi/2$ a zbývající úhly splývají s úhly prostoru $\mathfrak{H}_r$ s prostorem $\mathfrak{A}_r$.*

Důkaz. Buď $\overline{\mathfrak{A}}_{n-r}$ ortogonální doplněk k prostoru $\mathfrak{A}_r$ v $\mathfrak{R}_n$. Pro dimensi p průniku $\overline{\mathfrak{A}}_{n-r} \cap \mathfrak{B}_s$ platí zřejmě $n - r + s \leqq p + n$, tj. $p \geqq s - r$. Za prostor $\mathfrak{S}_{s-r}$ můžeme nyní vzít libovolný podprostor dimense $s - r$ v průniku $\overline{\mathfrak{A}}_{n-r} \cap \mathfrak{B}_s$.

Buď $\mathfrak{H}_r$ podprostor v $\mathfrak{B}_s$ totálně kolmý ke $\mathfrak{S}_{s-r}$. Vezměme ortonormální basi $b_1, \ldots, b_s$ v $\mathfrak{B}_s$ takovou, že $b_1, \ldots, b_r \in \mathfrak{H}_r$, $b_{r+1}, \ldots, b_s \in \mathfrak{S}_{s-r}$. Označme matici $\|(a_i, b_k)\|$, $i = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$, písmenem A, $\|(a_i, b_k)\|$, $i = 1, \ldots, r$, $k = = 1, \ldots, r$, písmenem α. Zřejmě platí $A = (\alpha, 0)$, $A' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ 0 \end{pmatrix}$. $AA' = \alpha\alpha'$, $A'A = = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$. Odtud plyne snadno dokazované tvrzení, uvážíme-li, že $|AA' - \lambda J_r| = 0$

je rovnice pro úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$, $|A'A - \lambda J_s| = 0$ je rovnice pro úhly prostoru $\mathfrak{B}_s$ s prostorem $\mathfrak{A}_r$, $|\alpha\alpha' - \lambda J_r| = 0$ rovnice pro úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{H}_r$ a $|\alpha'\alpha - \lambda J_r| = 0$ rovnice pro úhly prostoru $\mathfrak{H}_r$ s prostorem $\mathfrak{A}_r$.

Pro prostory stejné dimense platí

Věta 8. *Úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_r$ jsou stejné jako úhly prostoru $\mathfrak{B}_r$ s prostorem $\mathfrak{A}_r$. Mluvíme pak stručně o úhlech prostorů $\mathfrak{A}_r$ a $\mathfrak{B}_r$.*

Důkaz. Zvolme v $\mathfrak{A}_r$ ortonormální basi $a_1, \ldots, a_r$, v $\mathfrak{B}_r$ ortonormální basi $b_1, \ldots, b_r$. Pro úhly prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_r$ platí rovnice

$$|AA' - \lambda J_r| = 0 . \tag{13}$$

Pro úhly prostoru $\mathfrak{B}_r$ s prostorem $\mathfrak{A}_r$ platí rovnice

$$|A'A - \lambda J_r| = 0 . \tag{14}$$

Z lineární algebry je ale známo (viz [1]), že v případě, že matice C, D jsou čtvercové, mají matice CD a DC stejné charakteristické polynomy. Odtud plyne pomocí (13) a (14) ihned důkaz věty 8.

Větu 8 lze do jisté míry rozšířit i na úhly prostorů nestejných dimensí. Platí

Věta 9. *Nehledíme-li na $s - r$ (resp. $r - s$) pravých úhlů, svírá prostor $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$ stejné úhly jako prostor $\mathfrak{B}_s$ s prostorem $\mathfrak{A}_r$.*

Důkaz plyne ihned podle vět 7 a 8.

Celkem snadno lze nahlédnout, že pro úhly dvou lineárních podprostorů platí následující věty:

Nutná a postačující podmínka k tomu, aby prostory $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_s$ měly společný prostor $\mathfrak{a}_t$ jest, aby t úhlů prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$ se rovnalo nule.

Nutná a postačující podmínka k tomu, aby v prostoru $\mathfrak{A}_r$ existoval podprostor $\mathfrak{a}_t$ totálně kolmý k prostoru $\mathfrak{B}_s$ jest, aby t úhlů prostoru $\mathfrak{A}_r$ s prostorem $\mathfrak{B}_s$ se rovnalo $\pi/2$.

Odtud pomocí důkazu věty 4a) obdržíme snadno zajímavý geometrický význam matice $\|(a_i, b_k)\|$. Platí:

Věta 10. *Buď $a_1, \ldots, a_r$ ortonormální base v $\mathfrak{A}_r$, $b_1, \ldots, b_s$ ortonormální base v $\mathfrak{B}_s$. Matici $\|(a_i, b_k)\|$ označme písmenem A.*

a) *Je-li h hodnost matice AA', potom číslo $r - h$ udává dimensi maximálního podprostoru $\mathfrak{A}_r$ totálně kolmého k $\mathfrak{B}_s$.*

b) *Je-li h hodnost matice $AA' - J_r$, potom číslo $r - h$ udává dimensi průniku prostorů $\mathfrak{A}_r$ a $\mathfrak{B}_s$.*

Poznámka 2. Pro prostory stejné dimense plyne z věty 10 bezprostředně následující tvrzení:

Nutná a postačující podmínka k tomu, aby prostory $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_r$ splynuly, jest, aby matice A byla ortogonální; nutná a postačující podmínka k tomu, aby prostory $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_r$ byly totálně kolmé, jest, aby matice A byla nulová.

Nebylo by těžké podat přímé důkazy těchto tvrzení. (Druhé tvrzení je úplně samozřejmé.)

Všimněme si ještě vztahu mezi úhly prostorů $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_s$ a mezi úhly jejich ortogonálních doplňků. Platí především:

Věta 11. *Nehledíme-li na nulové úhly, svírají podprostory* $\mathfrak{a}_q$, $\mathfrak{A}_q$ *stejné dimense* q *stejné úhly jako jejich ortogonální doplňky* $\mathfrak{b}_{n-q}$, $\mathfrak{B}_{n-q}$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $q \geqq n - q$. Označme P dimensi průniku $\mathfrak{a}_q \cap \mathfrak{A}_q$ a S dimensi sjednocení $\mathfrak{a}_q \cup \mathfrak{A}_q$. Platí, jak známo $2q = P + S \leqq P + n$, tj. $P \geqq 2q - n$. Má tedy průnik prostorů $\mathfrak{a}_q$, $\mathfrak{A}_q$ dimensi rovnou aspoň rozdílu dimense prostoru $\mathfrak{a}_q$ a dimense jeho ortogonálního doplňku $\mathfrak{b}_{n-q}$. Položme $n - q = r$, $2q - n = s$. Zvolme v $\mathfrak{R}_n$ dvě ortogonální base

$$a_1, \ldots, a_r, \; c_1, \ldots, c_s, \; b_1, \ldots, b_r \,, \tag{13}$$

$$A_1, \ldots, A_r, \; c_1, \ldots, c_s, \; B_1, \ldots, B_r \tag{14}$$

takové, že $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathfrak{a}_q \cap \mathfrak{A}_q$;

$$a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s \text{ je base v } \mathfrak{a}_q \,, \quad A_1, \ldots, A_r, c_1, \ldots, c_s \text{ je base v } \mathfrak{A}_q \,,$$
$$b_1, \ldots, b_r \text{ je base v } \mathfrak{b}_{n-q} \,, \quad B_1, \ldots, B_r \text{ je base v } \mathfrak{B}_{n-q} \,.$$

Snadno se nyní nahlédne, že až na s nulových úhlů mají prostory $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $\{A_1, \ldots, A_r\}$ stejné úhly jako prostory $\mathfrak{a}_q$, $\mathfrak{A}_q$. Stačí tedy dokázat, že prostory $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $\{A_1, \ldots, A_r\}$ svírají stejné úhly jako prostory $\mathfrak{b}_{n-q} = \{b_1, \ldots, b_r\}$, $\mathfrak{B}_{n-q} = \{B_1, \ldots, B_r\}$.

Vyjádřeme nyní vektory (14) pomocí vektorů base (13). Vzhledem k tomu, že platí $(A_i, c_j) = 0$, $(B_i, c_j) = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{l=1}^{r} \alpha_{il} a_l + \sum_{m=1}^{r} \beta_{im} b_m \,, \\ c_i &= \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} c_k \,, \\ B_i &= \sum_{l=1}^{r} u_{il} a_l + \sum_{m=1}^{r} v_{im} b_m \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Matice X této transformace je ortogonální. Použijeme-li pro dílčí matice označení $(\alpha_{il}) = \alpha$, $(\beta_{im}) = \beta$, $(\delta_{jk}) = J_s$, $(u_{il}) = u$, $(v_{im}) = v$, $i, l, m = 1, \ldots, r$; $j, k = 1, \ldots, s$, můžeme rozložit matici X na pole následujícím způsobem:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & J_s & 0 \\ u & 0 & v \end{pmatrix}.$$

0 přitom znamená nulovou matici buď typu (r, s) anebo (s, r). Pro transponovanou matici X' platí zřejmě

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & u' \\ 0 & J_s & 0 \\ \beta' & 0 & v' \end{pmatrix}.$$

Podmínka ortogonality pro matici X dává $XX' = J_n$, $X'X = J_n$, tj.

$$\begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\beta', & 0, & \alpha u' + \beta v' \\ 0 & J_s, & 0 \\ u\alpha' + v\beta', & 0, & uu' + vv' \end{pmatrix} = J_n\,, \quad \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + u'u, & 0, & \alpha'\beta + u'v \\ 0 & J_s, & 0 \\ \beta'\alpha + v'u, & 0, & \beta'\beta + v'v \end{pmatrix} = J_n\,,$$

neboli

$$(16)\quad \text{(I)}\ \alpha\alpha' + \beta\beta' = J_r\,, \quad \text{(II)}\ \alpha u' + \beta v' = 0\,, \quad \text{(III)}\ u\alpha' + v\beta' = 0\,,$$
$$\text{(IV)}\ uu' + vv' = J_r\,, \quad \text{(V)}\ \alpha'\alpha + u'u = J_r\,, \quad \text{(VI)}\ \alpha'\beta + u'v = 0\,,$$
$$\text{(VII)}\ \beta'\alpha + v'u = 0\,, \quad \text{(VIII)}\ \beta'\beta + v'v = J_r\,.$$

Z rovnic (15) snadno plyne, že platí $\alpha_{il} = (A_i, a_l)$, $v_{im} = (B_i, b_m)$. To tedy znamená, že rovnice pro úhly prostorů $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $\{A_1, \ldots, A_r\}$ je

$$(17)\qquad |\alpha\alpha' - \lambda J_r| = 0$$

a podobně rovnice pro úhly prostorů $\{b_1, \ldots, b_r\}$, $\{B_1, \ldots, B_r\}$

$$(18)\qquad |v'v - \lambda J_r| = 0\,.$$

a) Předpokládejme nyní nejdříve, že prostory $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $\{A_1, \ldots, A_r\}$ mají průnik dimense nula. To podle věty 10 znamená, že $|\alpha\alpha' - J_r| \neq 0$, a podle vzorce (16,I) $|\beta\beta'| \neq 0$ a zřejmě také $|\beta| \neq 0$.

Nyní vynásobením rovnice (16,II) maticí v zprava dostaneme $\alpha u'v + \beta v'v = 0$. Dosadíme-li sem z (16,VI) $u'v = -\alpha'\beta$ dostaneme $-\alpha\alpha'\beta + \beta v'v = 0$, tj.

$$(19)\qquad \beta^{-1}\alpha\alpha'\beta = v'v\,.$$

Jsou tedy matice $\alpha\alpha'$, $v'v$ podobné; odtud plyne v případě a) dokazované tvrzení.

b) Mají-li prostory $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $\{A_1, \ldots, A_r\}$ průnik dimense $t \neq 0$, lze z rovnic (16) nahlédnout, že prostory $\mathfrak{b}_{n-q}$, $\mathfrak{B}_{n-q}$ mají průnik stejné dimense, načež se případ b) redukuje v podstatě opět na případ a). Tím je věta dokázána.

Větu 11 lze takto doplnit pro případ prostorů nestejné dimense:

Věta 12. *Nehledíme-li vedle nulových úhlů ani na úhly pravé, mají i prostory nestejných dimensí stejné úhly jako jejich ortogonální doplňky.*

Důkaz je celkem snadný. Proto ho neprovádíme.

Literatura

[1] *А. И. Мальцев:* Основы линейной алгебры. Москва-Ленинград 1948.

Резюме

ОБ УГЛАХ ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В E_n

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

В работе показано, что исследование углов линейного подпространства $\mathfrak{A}_r$ размерности r с линейным подпространством $\mathfrak{B}_s$ размерности s в вещественном E_n сводится при подходящем определении этих углов к исследованию характеристического уравнения матрицы AA'. Притом A — матрица, составленная из скалярных произведений (a_i, b_k), где $a_1, \ldots, a_r$ — ортонормированный басиц в $\mathfrak{A}_r$, а $b_1, \ldots, b_s$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{B}_s$. A' есть транспонированная к A матрица.

Прежде всего уделяется внимание собственному определению углов пространства $\mathfrak{A}_r$ с пространством $\mathfrak{B}_s$, и доказывается, что эти углы в основном совпадают с углами пространства $\mathfrak{B}_s$ с пространством $\mathfrak{A}_r$. Далее здесь рассматривается случай, когда некоторые из рассматриваемых углов прямые или равны нулю; притом здесь показано, как эти геометрические свойства отражаются на свойствах матрицы A. В конце работы доказывается, что углы между подпространставами в основном совпадают с углами между их ортогональными дополнениями в E_n.

Zusammenfassung

ÜBER DIE WINKEL DER LINEAREN UNTERRÄUME IN E_n

ČESTMÍR VITNER, Praha

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Ermittelung der Winkel des linearen Unterraumes $\mathfrak{A}_r$ von Dimension r mit dem linearen Unterraum $\mathfrak{B}_s$ von Dimension s im reellen Raume E_n bei einer geeigneten Winkeldefinition sich zur Ermittelung der charakteristischen Gleichung der Matrix AA' reduziert. Dabei ist mit A die aus den Skalarprodukten (a_i, b_k) gebildete Matrix bezeichnet, wo $a_1, \ldots, a_r$ die orthonormale Basis in $\mathfrak{A}_r$, und $b_1, \ldots, b_s$ die orthonormale Basis in $\mathfrak{B}_s$ darstellt. Unter A' ist die zu A transponierte Matrix verstanden.

Zuerst wird die Aufmerksamkeit der eigenen Definition der Winkel des Raumes $\mathfrak{A}_r$ mit dem Raume $\mathfrak{B}_s$ gewidmet und wird gezeigt, dass diese Winkel im wesentlichen mit den Winkeln des Raumes $\mathfrak{B}_s$ mit dem Raume $\mathfrak{A}_r$ übereinstimmen. Ferner wird hier der Fall betrachtet, wenn manche von den betrachteten Winkeln recht sind oder verschwinden; dabei wird darauf hingewiesen, wie sich diese geometrischen Fragen in den Eigenschaften der Matrix A abspiegeln. Zum Schluss wird in der Arbeit bewiesen, dass die Winkel der Unterräume im wesentlichen mit den Winkeln ihrer orthogonalen Komplemente in E_n übereinstimmen.