Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Procházka

Заметка о факторно расщепляемых Абелевых группах

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 4, 404--414

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117451`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ЗАМЕТКА О ФАКТОРНО РАСЩЕПЛЯЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 3/V 1961 г.)

В статье [4] был описан один класс факторно расщепляемых абелевых групп без кручения; но без исключения все группы этого класса были вполне разложимы. В предлагаемой работе будут описаны дальнейшие классы факторно расщепляемых групп, содержащие даже группы, неразложимые в прямую сумму.

Прежде всего мы условимся, что словом „группа" будем всегда обозначать аддитивно записанную абелеву группу с нулевым элементом $\mathbf{0}$.

Для формулировки первой теоремы напомним, что периодическая группа P называется группой конечного D-ранга, если можно выразить группу P в виде прямой суммы конечной группы и конечного числа полных групп Прюфера типа $C(p^\infty)$ (для различных простых чисел p). В статье [5] доказана теорема (см. теорему 6), дающая необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G (обладающая периодической частью специального вида), как расширение смешанной группы H, являлась расщепляемой группой. Непосредственно из этой теоремы можно вывести следующую вспомогательную теорему:

Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической группой конечного D-ранга. Если каждое p-примарное слагаемое $P^{(p)}$ группы P является группой конечного D-ранга, то группа G будет расщепляемой тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа H.

В [4] было введено следующее определение.

Определение 1. Группа без кручения G называется *факторно расщепляемой* группой, если каждая её фактор-группа G/H расщепляема.

Теорема 1. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической группой конечного D-ранга. Группа G будет факторно расщепляемой тогда и только тогда, если подгруппа H факторно расщепляема.*

Доказательство. Пусть, в первую очередь, группа G факторно расщепляема и пусть A — произвольная подгруппа группы H; тогда группа G/A расщепляема. Из теоремы 1 в [6] непосредственно следует, что каждое p-примарное слагаемое периодической части группы G/A является группой конечного D-ранга. Кроме того, по второй теореме об изоморфизме имеем

$$G/H \cong (G/A)/(H/A) .$$

Отсюда, ввиду того, что группа G/H обладает конечным D-рангом, применением вспомогательной теоремы уже получим, что группа H/A расщепляема. Итак H является факторно расщепляемой.

Пусть теперь наоборот факторно расщепляема подгруппа H и пусть A — произвольная подгруппа группы G. Если положим $H_1 = \{A, H\}$, то по второй теореме об изоморфизме будет

$$G/H_1 \cong (G/H)/(H_1/H) ,$$

или, G/H_1 изоморфна с фактор-группой периодической группы конечного D-ранга. Но тогда сама группа G/H_1 должна быть периодической группой конечного D-ранга (см. [6], лемма 2.4). В то же время имеет место изоморфизм

$$G/H_1 \cong (G/A)/(H_1/A) ; \tag{1}$$

притом, как мы уже один раз отметили, каждое p-примарное слагаемое периодической части группы G/A обладает конечным D-рангом. Кроме того, группа H_1/A расщепляема, так как

$$H_1/A = \{A, H\}/A \cong H/(A \cap H) ,$$

и так как группа H факторно расщепляема. Отсюда, воспользовавшись соотношением (1) и вспомогательной теоремой, получаем расщепляемость группы G/A; итак, группа G факторно расщепляема. Теорема полностью доказана.

Теперь введем понятие примитивной группы без кручения, являющееся простым обобщением того же понятия, введенного Курошом в [3].

Определение 2. Пусть G – группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$. Группу G мы будем называть *примитивной*, если существует свободная подгруппа U группы G и конечное множество (положительных) простых чисел Π так, что для каждого элемента $g \in G$ существует такое $n \in Q(\Pi)$ (здесь символом $Q(\Pi)$ обозначаем множество всех натуральных чисел, выражаемых в виде произведения степеней простых чисел из Π), что $ng \in U$.

Замечание. Легко видеть, что предшествующее определение можно высказать также следующим образом: Группу без кручения G конечного ранга $r \geqq 1$ будем называть примитивной, если для какой - то свободной подгруппы U фактор-группа G/U будет периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел.

Теорема 2. *Каждая примитивная группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ является факторно расщепляемой.*

Доказательство. Пусть G — данная примитивная группа без кручения, и пусть U — свободная подгруппа и Π — множество простых чисел, обладающие свойствами из определения 2. Тогда фактор-группа $G/U = \widetilde{G}$ является периодической Π-примарной группой. Как было доказано в статье [6] (см. [6], теорема 1), для каждого простого $p \in \Pi$ p-примарное слагаемое $\widetilde{G}^{(p)}$ группы $\widetilde{G}$ обладает конечным D-рангом, или, в силу конечности множества Π, вся группа $\widetilde{G}$ должна быть группой конечного D-ранга. Свободная группа U (конечного ранга) очевидно факторно расщепляема, так как каждая её фактор-группа является группой с конечным числом образующих. Теперь достаточно применить теорему 1 и теорема полностью доказана.

Остаётся открытым вопрос, если прямая сумма двух факторно расщепляемых групп будет также факторно расщепляемой группой. Мы покажем, что в некоторых случаях утверждение такого рода имеет место. Но прежде всего напомним теорему, доказанную в [4] (см. [4], теорема 6):

Пусть G — факторно расщепляемая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть I — такая группа без кручения ранга 1, что для произвольной сервантной подгруппы S ранга 1 группы G справедливо неравенство $typ\ I \leqq typ\ S$. Тогда группа $G' = G \dotplus I$ является также факторно расщепляемой.

Следующая лемма служит простым следствием этой теоремы.

Лемма 1. *Пусть G — факторно расщепляемая группа без кручения конечного ранга и пусть U — свободная группа также конечного ранга. Тогда группа $G' = G \dotplus U$ факторно расщепляема.*

Теорема 3. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является примитивной группой без кручения. Группа G факторно расщепляема тогда и только тогда, если факторно расщепляема подгруппа H.*

Доказательство. Положим $\widetilde{G} = G/H$. Так как по предположению $\widetilde{G}$ является примитивной группой без кручения (конечного ранга), то существует такая свободная подгруппа $\widetilde{U}$ группы $\widetilde{G}$, что $\widetilde{G}/\widetilde{U}$ должна быть периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел; итак, $\widetilde{G}/\widetilde{U}$ — периодическая группа конечного D-ранга. Если U — такая подгруппа группы G, что $H \subseteq U$ и $\widetilde{U} = U/H$, то в силу хорошо известной теоремы (см. [1], теорема 9.2) будет $U = H \dotplus V$, где $V \cong \widetilde{U}$, или, V — свободная группа конечного ранга. Тогда по второй теореме об изоморфизме имеем

$$\widetilde{G}/\widetilde{U} = (G/H)/((H \dotplus V)/H) \cong G/(H \dotplus V)\,. \tag{2}$$

Если группа G факторно расщепляема, то, в силу (2) и теоремы 1, такой же будет и группа $H \dotplus V$ и также группа H.

Если наоборот факторно расщепляемой будет группа H, то такой же должна быть по лемме 1 и группа $H \dotplus V$. Отсюда следует в силу (2) и теоремы 1 факторная расщепляемость группы G.

Этим теорема уже доказана.

Теорема 4. *Пусть G — факторно расщепляемая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть H — примитивная группа без кручения также конечного ранга. Тогда группа $G' = G \dotplus H$ является факторно расщепляемой.*

Доказательство. Теорема является простым следствием предшествующей теоремы 3.

Теперь будет описан другой класс факторно расщепляемых групп.

Определение 3. Пусть G — группа без кручения конечного ранга. Группу G будем называть *почти-полной,* если для почти всех (т. е. за исключением не более чем конечного числа) простых чисел p имеет место соотношение $pG = G$, т. е. группа G является p-полной.

Замечание. Пусть G — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть G является p-полной (p — какое-то простое число) группой. Тогда, как это было доказано в [6] (см. [6], теорема 9), для p-ранга $r_p(G)$ группы G имеет место соотношение $r_p(G) = r$. Это значит, что если выбрать произвольную свободную подгруппу U ранга r группы G и построить периодическую группу $\widetilde{G} = G/U$, то p-примарное слагаемое $\widetilde{G}^{(p)}$ группы $\widetilde{G}$ будет прямой суммой в точности r полных групп Прюфера типа $C(p^\infty)$ (см. [6], теорема 4 и теорема 1).

Теорема 5. *Каждая почти-полная группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ является факторно расщепляемой.*

Доказательство. Если G — такая почти-полная группа без кручения ранга $r \geqq 1$, то можно её погрузить в полную группу без кручения R ранга r; итак, $G \subseteq R$. Группа R, как полная группа, очевидно, факторно расщепляема, или, в силу теоремы 1, для доказательства факторной расщепляемости группы G достаточно убедиться в том, что R/G является периодической группой конечного D-ранга.

Пусть U — произвольная свободная подгруппа ранга r группы G и пусть $\widetilde{G} = G/U$ и $\widetilde{R} = R/U$. В силу того, что мы заметили, почти все p-примарные слагаемые $\widetilde{G}^{(p)}$ группы $\widetilde{G}$ являются прямыми суммами r групп типа $C(p^\infty)$; в случае группы $\widetilde{R}$ это утверждение имеет место для всех слагаемых $\widetilde{R}^{(p)}$. Так как для каждого простого p $\widetilde{G}^{(p)} \subseteq \widetilde{R}^{(p)}$, то в силу предшествующего для почти всех p будет справедливо равенство $\widetilde{G}^{(p)} = \widetilde{R}^{(p)}$. Если построим фактор-группу $\widetilde{R}/\widetilde{G}$, то имеет место соотношение

$$\widetilde{R}/\widetilde{G} \cong \sum_p{}'_d(\widetilde{R}^{(p)}/\widetilde{G}^{(p)}),$$

где символ $\sum_p{}'_d$ значит, что при построении соответственой прямой суммы надо исключить все нулевые слагаемые. Но в силу того, что мы только что доказали, существует конечное число таких простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, что уже будет

$$\widetilde{R}/\widetilde{G} \cong \sum_{i=1}^{n}{}_d(\widetilde{R}^{(p_i)}/\widetilde{G}^{(p_i)}). \tag{3}$$

Так как каждая из групп $\widetilde{R}^{(p_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ обладает конечным D-рангом, то тем же свойством обладает и каждая из групп $\widetilde{R}^{(p_i)}/\widetilde{G}^{(p_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Отсюда в силу (3) уже следует, что группа $\widetilde{R}/\widetilde{G}$ является группой конечного D-ранга. Но по второй теореме об изоморфизме имеем

$$\widetilde{R}/\widetilde{G} = (R/U)/(G/U) \cong R/G\,,$$

и теорема полностью доказана.

Замечание. Примером почти-полной группы без кручения конечного ранга служит каждая сервантная подгруппа конечного ранга аддитивной группы целых p-адических чисел; как известно, каждая из этих групп неразложима в прямую сумму.

Лемма 2. *Пусть G — факторно расщепляемая группа без кручения и пусть R — произвольная полная группа без кручения. Тогда группа $G' = G \dotplus R$ является факторно расщепляемой.*

Доказательство. Пусть A — произвольная подгруппа группы G' и пусть $\widetilde{G}' = G'/A$. Группа $\widetilde{G}'$ содержит подгруппу $\widetilde{R} = \{R, A\}/A$; но так как группа $\widetilde{R}$ является полной, то она служит для группы $\widetilde{G}'$ прямым слагаемым: $\widetilde{G}' = \widetilde{G}_1 \dotplus \widetilde{R}$. Отсюда $\widetilde{G}_1 \cong \widetilde{G}'/\widetilde{R}$, или, по второй теореме об изоморфизме

$$\widetilde{G}_1 \cong (G'/A)/(\{R, A\}/A) \cong G'/\{R, A\}\,. \tag{4}$$

В силу того, что группа R является полной, можно писать $\{A, R\} = B \dotplus R$, где B — удобная подгруппа группы $\{A, R\}$. Если символом G_1 обозначим такую максимальную подгруппу группы G', что $G_1 \cap R = (0)$ и $B \subseteq G_1$, то будет $G' = G_1 \dotplus R$ (здесь пользуемся тем, что группа R является полной). Из равенства $G' = G \dotplus R = G_1 \dotplus R$ следует соотношение $G \cong G_1$, или, группа G_1 также факторно расщепляема. Но тогда имеем (см. (4))

$$\widetilde{G}_1 \cong (G_1 \dotplus R)/(B \dotplus R) \cong G_1/B\,,$$

или, группа $\widetilde{G}_1$ должна быть расщепляемой. Таким образом мы уже доказали, что группа $\widetilde{G}' = \widetilde{G}_1 \dotplus \widetilde{R}$ будет расщепляемой.

Этим лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть G — факторно расщепляемая группа без кручения конечного ранга и пусть H — почти-полная группа без кручения также конечного ранга. Тогда группа $G' = G \dotplus H$ является также факторно расщепляемой.*

Доказательство. Почти-полную группу H погрузим в полную группу без кручения R того же ранга как H. По лемме 2 группа $G \dotplus R$ является факторно расщепляемой группой без кручения конечного ранга и одновременно имеем

$$(G \dotplus R)/(G \dotplus H) \cong R/H\,.$$

Фактор-группа R/H является периодической группой конечного D-ранга (смотри доказательство теоремы 5); итак, в силу теоремы 1 из факторной расщепляемости группы $G \dotplus R$ следует факторная расщепляемость группы $G \dotplus H$. Теорема полностью доказана.

До сих пор все факторно расщепляемые группы без кручения, с которыми мы встретились, вообще обладали конечным рангом. Существование факторно расщепляемых групп бесконечного ранга следует из того простого факта, что каждая полная группа без кручения является факторно расщепляемой группой. Другим примером факторно расщепляемой группы без кручения бесконечного ранга служит аддитивная группа целых p-адических чисел $\mathfrak{P}$. Прежде чем выскажем соответственную теорему, докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{P}$ — аддитивная группа целых p-адических чисел и пусть H, K — такие подгруппы группы $\mathfrak{P}$, что $K \subseteq H$ и $H/K \cong C(p) \dotplus C(p)$.*[1] *Тогда подгруппа H не является сервантной подгруппой группы $\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Предположим, что H — сервантная подгруппа в $\mathfrak{P}$; тогда, как хорошо известно (см. [1], доказательство теоремы 43.1), будет $H/pH \cong C(p)$. Так как $H/K \cong C(p) \dotplus C(p)$, то каждый ненулевой элемент группы H/K обладает порядком p, или, для каждого $h \in H$ должно быть $ph \in K$. Это значит, что $pH \subseteq K$. Тогда по второй теореме об изоморфизме имеем

$$C(p) \dotplus C(p) \cong H/K \cong (H/pH)/(K/pH)\,,$$

что противоречит соотношению $H/pH \cong C(p)$.

Итак, H не является сервантной подгруппой в $\mathfrak{P}$, и лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{P}$ — аддитивная группа целых p-адических чисел, пусть H, K — такие подгруппы группы $\mathfrak{P}$, что $K \subseteq H$, H — сервантная в $\mathfrak{P}$ и H/K является редуцированной периодической p-примарной группой. Тогда $H/K \cong C(p^k)$.*

Доказательство. Если H/K неразложимая в прямую сумму, то необходимо $H/K \cong C(p^k)$, и доказательство леммы завершено. Итак, пусть $\widetilde{H} = H/K$ разложима в прямую сумму. Тогда можно группу $\widetilde{H}$ выразить в виде прямой суммы $\widetilde{H} = \{\tilde{a}\} \dotplus \{\tilde{b}\} \dotplus \widetilde{H}_1$, где $\{\tilde{a}\}$; $\{\tilde{b}\}$ — ненулевые циклические группы,[2] и $\widetilde{H}_1$ — удобная подгруппа группы $\widetilde{H}$, которая может быть и нулевой группой. Если H_1 — такая подгруппа группы H, что $K \subseteq H_1$ и $H_1/K = \widetilde{H}_1$, то будет

$$\{\tilde{a}\} \dotplus \{\tilde{b}\} \cong \widetilde{H}/\widetilde{H}_1 \cong H/H_1\,.$$

Но тогда существует подгруппа H'/H_1 группы H/H_1, для которой имеет место соотношение

$$H/H' \cong (H/H_1)/(H'/H_1) \cong C(p) \dotplus C(p)\,.$$

Отсюда в силу леммы 3 следует, что подгруппа H не является сервантной в $\mathfrak{P}$, что противоречит предположению леммы. Итак, группа H/K должна быть неразложимой, и лемма доказана.

[1]) Символом $C(p^k)$ обозначаем циклическую группу порядка p^k.

[2]) Смотри [1], следствие 24. 3.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{P}$ — аддитивная группа целых p-адических чисел, пусть H, K — такие подгруппы группы $\mathfrak{P}$, что $K \subseteq H$, H — сервантная в $\mathfrak{P}$ и H/K является периодической группой. Тогда группа H/K является прямой суммой конечной циклической группы и полной группы.*

Доказательство. Если q — простое число, $q \neq p$, то каждое уравнение вида $qx = g$, где $g \in \mathfrak{P}$, обладает в $\mathfrak{P}$ решением; итак, $q\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$. Но так как H — — сервантная подгруппа в $\mathfrak{P}$, то также будет $qH = H$ и одновременно $q\widetilde{H} = \widetilde{H}$, если положим $\widetilde{H} = H/K$. Это значит, что для каждого такого простого числа q будет q-примарное слагаемое $\widetilde{H}^{(q)}$ периодической группы $\widetilde{H}$ полной группой; итак, $\widetilde{H} = \widetilde{H}^{(p)} \dotplus \widetilde{H}_*$, где $\widetilde{H}_*$ — полная и $\widetilde{H}^{(p)}$ — p-примарная группа. Если выразим группу $\widetilde{H}^{(p)}$ в виде прямой суммы полной группы $\widetilde{U}^{(p)}$ и редуцированной группы $\widetilde{R}^{(p)}$, то имеем

$$\widetilde{H} = \widetilde{R}^{(p)} \dotplus (\widetilde{U}^{(p)} \dotplus \widetilde{H}^*) = \widetilde{R}^{(p)} \dotplus \widetilde{V}\,, \tag{5}$$

где $\widetilde{V} = \widetilde{U}^{(p)} \dotplus \widetilde{H}^*$ является полной группой. Если V — такая подгруппа группы H, что $K \subseteq V$ и $V/K = \widetilde{V}$, то по второй теореме об изоморфизме будет (см. соотношение (5))

$$H/V \cong \widetilde{H}/\widetilde{V} \cong \widetilde{R}^{(p)}\,.$$

Так как $\widetilde{R}^{(p)}$ — редуцированная p-примарная группа и H — сервантная в $\mathfrak{P}$, то по лемме 4 должно быть $\widetilde{R}^{(p)} \cong C(p^k)$. Отсюда и из (5) уже следует утверждение леммы.

Теорема 7. *Аддитивная группа целых p-адических чисел $\mathfrak{P}$ является факторно расщепляемой.*

Доказательство. Пусть A — произвольная подгруппа групны $\mathfrak{P}$, пусть $\widetilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/A$ и пусть $\widetilde{P}$ — периодическая часть группы $\widetilde{\mathfrak{P}}$. Если символом $\mathscr{S}(A)$ обозначим наименьшую сервантную подгруппу группы $\mathfrak{P}$, содержащую подгруппу A, то, очевидно, будет $\mathscr{S}(A)/A = \widetilde{P}$. Таким образом, по лемме 5, группа $\widetilde{P}$ является прямой суммой полной группы и конечной группы, итак, как известно (см. [1], следствие 24.6), группа $\widetilde{P}$ служит прямым слагаемым для группы $\widetilde{\mathfrak{P}}$, т. е. группа $\widetilde{\mathfrak{P}}$ расщепляема.

Этим теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 7 является следующая теорема.

Теорема 8. *Каждая сервантная подгруппа аддитивной группы целых p-адических чисел $\mathfrak{P}$ является факторно расщепляемой группой.*

Доказательство. Пусть H — сервантная подгруппа группы $\mathfrak{P}$ и пусть A — произвольная подгруппа в H. Если символом $\widetilde{P}$ обозначим периодическую часть группы $\widetilde{H} = H/A$, то будет $\widetilde{P} = \mathscr{S}_H(A)/A$, где $\mathscr{S}_H(A)$ — наименьшая сервантная подгруппа группы H, содержащая подгруппу A. Так как H — сервантная в $\mathfrak{P}$, то группа $\mathscr{S}_H(A)$ является наименьшей сервантной подгруппой группы $\mathfrak{P}$, содержащей A. Отсюда следует, что группа $\widetilde{P}$ является также периодической частью группы $\widetilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/A$. В силу теоремы 7 подгруппа $\widetilde{P}$ служит для группы $\widetilde{\mathfrak{P}}$ прямым слагаемым, или, служит прямым слагаемым для каждой подгруппы группы $\widetilde{\mathfrak{P}}$, которая содержит всю группу $\widetilde{P}$. Но, в частности, имеем $\widetilde{P} \subseteq \widetilde{H}$, т. е. $\widetilde{H}$ является расщепляемой группой, и теорема доказана.

Лемма 2 и теорема 7 показывают, что существуют факторно расщепляемые группы без кручения бесконечного ранга, обладающие существенно отличающимися структурами. Из этого следует, что структуру всех таких факторно расщепляемых групп нельзя описать никаким простым образом. Тем не менее можно определить некоторые свойства групп, которыми обладают все факторно расщепляемые группы без кручения бесконечного ранга.

Следующее определение можно в общем виде найти в [2]; здесь мы ограничимся только случаем групп без кручения.

Определение 4. Пусть G — группа без кручения и пусть $g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ будем называть *p-независимыми* (в G), если уравнение

$$px = k_1g_1 + k_2g_2 + \ldots + k_ng_n\,,$$

где k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — целые рациональные числа, разрешимо в G тогда и только тогда, если $p \mid k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Произвольное непустое множество $M \subseteq G$ будем називат p-независимым (в G), если p-независимо каждое конечное (непустое) подмножество множества M.

Если G — группа без кручения, то произвольное p-независимое множество $M \subseteq G$ можно погрузить в максимальное p-независимое множество; каждое такое максимальное p-независимое множество называется p-базисом группы G. Ещё отметим, что все p-базисы (относительно одного и того же простого числа p) группы без кручения G обладают равными мощностями (см. [2]).

Теорема 9. *Пусть G — факторно расщепляемая группа без кручения бесконечного*[3]) *ранга и пусть p — простое число. Тогда каждый p-базис группы G конечен.*

Доказательство. Предположим, что группа G обладает бесконечным p-базисом. Тогда можно найти в G счётную (бесконечную) p-независимую последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots$. Построим подгруппу U группы G[4]):

$$U = \sum_{i=1}^{\infty}{}_d \{x_i\}\,. \tag{6}$$

Теперь определим подгруппу H группы U так, чтобы фактор-группа U/H являлась нерасщепляемой и чтобы периодическая часть группы U/H была p-при-

[3]) Очевидно, теорема имеет место и для групп конечного ранга; но в таком случае утверждение тривиально.

[4]) Так как элементы x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ p-независимы, то они будут также линейно независимы, или же

$$\{x_1, x_2, \ldots\} = \sum_{i=1}^{\infty}{}_d \{x_i\}\,.$$

марной; такая подгруппа H существует, как следует из [1], § 50, пример 2. Очевидно, что периодической частью группы U/H будет группа $\mathscr{S}_U(H)/H$, где $\mathscr{S}_U(H)$ — наименьшая сервантная подгруппа группы U, содержащая подгруппу H. Если $\mathscr{S}_G(H)$ — наименьшая сервантная подгруппа всей группы G, содержащая подгруппу H, то группа $\mathscr{S}_G(H)/H$ будет периодической частью фактор-группы G/H. Так как $\mathscr{S}_U(H) \subseteq \mathscr{S}_G(H)$, то, очевидно, $\mathscr{S}_U(H)/H \subseteq \mathscr{S}_G(H)/H$. Теперь докажем, что группа $\mathscr{S}_U(H)/H$ служит p-примарным слагаемым для группы $\mathscr{S}_G(H)/H$.

Итак, пусть $g \in \mathscr{S}_G(H)$ такой элемент, что $p^k g \in H$. Так как $H \subseteq U$, то по (6) должно быть

$$p^k g = h = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n \,. \tag{7}$$

Но в силу того, что элементы x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ p-независимы (в G), из (7) следует, что $p^k \mid k_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, или $k_i = p^k \,.\, k'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Это значит, что

$$p^k g = p^k(k'_1 x_1 + k'_2 x_2 + \ldots + k'_n x_n)\,,$$

или также

$$g = k'_1 x_1 + k'_2 x_2 + \ldots + k'_n x_n \in U\,.$$

Если теперь напомним определение группы $\mathscr{S}_U(H)$, то видим, что необходимо будет $g \in \mathscr{S}_U(H)$. Таким образом мы доказали, что всё p-примарное слагаемое группы $\mathscr{S}_G(H)/H$ содержится в группе $\mathscr{S}_U(H)/H$; но так как группа $\mathscr{S}_U(H)/H$ по предположению p-примарна, то $\mathscr{S}_U(H)/H$ является p-примарным слагаемым группы $\mathscr{S}_G(H)/H$. Прежде всего это значит, что группа $\mathscr{S}_U(H)/H$ служит прямым слагаемым для группы $\mathscr{S}_G(H)/H$. Но группа $\mathscr{S}_G(H)/H$, как периодическая часть расщепляемой группы G/H, является прямым слагаемым группы G/H. В силу предшествующего подгруппа $\mathscr{S}_U(H)/H$ также служит прямым слагаемым для группы G/H и для каждой её подгруппы, которая содержит всю группу $\mathscr{S}_U(H)/H$. Отсюда, в частности, получаем, что группа $\mathscr{S}_U(H)/H$ является прямым слагаемым группы U/H; но это противоречит тому факту, что группа U/H нерасщепляема.

Итак, каждый p-базис группы G должен быть конечным, чем теорема доказана.

Литература

[1] *L. Fuchs*: Abelian groups. Budapest 1958.

[2] *L. Fuchs*: Notes on abelian groups II. Acta Math. *XI*, 1—2, 1960, 117—125.

[3] *A. Kurosch*: Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range. Annals of Math., *38* (1937), 175—203.

[4] *Л. Прохазка:* О расщепляемости фактор-групп абелевых групп без кручения конечного ранга. Чех. мат. ж. *11* (*86*), 1961, 521—557.

[5] *Л. Прохазка:* Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп. Чех. мат. ж. *10* (*85*), 1960, 479—492.

[6] *Л. Прохазка:* О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга. Чех. мат. ж. *12* (*87*), 1962, 3—43.

Výtah

POZNÁMKA O FAKTOROVÉ ŠTĚPITELNOSTI ABELOVÝCH GRUP

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

Slovo grupa značí vždy grupu Abelovu.

Grupa bez torse G se nazývá *faktorově štěpitelná*, jestliže každá její faktorová grupa G/H je štěpitelná. Grupa bez torse G konečné hodnosti se nazývá *primitivní*, existuje-li volná podgrupa U grupy G taková, že G/U je periodická Π-primární grupa, kde Π je nějaká konečná množina (kladných) prvočísel.

Především lze dokázat následující věty:

Věta 2. *Každá primitivní grupa bez torse konečné hodnosti $r \geqq 1$ je faktorově štěpitelná.*

Věta 3. *Nechť G je grupa bez torse konečné hodnosti $r \geqq 1$ a nechť H je taková podgrupa grupy G, že G/H je primitivní grupa bez torse. Potom grupa G je faktorově štěpitelná právě tehdy, když je faktorově štěpitelná podgrupa H.*

Odtud ihned plyne následující věta.

Věta 4. *Nechť G je faktorově štěpitelná grupa bez torse konečné hodnosti $r \geqq 1$ a nechť H je primitivní grupa bez torse rovněž konečné hodnosti. Potom grupa $G' = G \dotplus H$ je faktorově štěpitelná.*

Grupa bez torse G se nazývá *skoroúplná*, jestliže pro skoro všechna (tj. s výjimkou nejvýše konečně mnoha) prvočísla p platí vztah $pG = G$, tj. grupa G je p-úplná.

Věta 5. *Každá skoroúplná grupa bez torse konečné hodnosti $r \geqq 1$ je faktorově štěpitelná.*

Věta 6. *Nechť G je faktorově štěpitelná grupa bez torse konečné hodnosti a nechť H je skoroúplná grupa bez torse rovněž konečné hodnosti. Potom grupa $G' = G \dotplus H$ je faktorově štěpitelná.*

Existují i netriviální grupy bez torse nekonečné hodnosti, které jsou faktorově štěpitelné; to ukazuje následující věta:

Věta 8. *Každá servantní podgrupa aditivní grupy celých p-adických čísel $\mathfrak{P}$ je faktorově štěpitelná.*

V pojednání [2] byl zaveden pojem p-base grupy. Pro tento pojem platí následující tvrzení:

Věta 9. *Nechť G je faktorově štěpitelná grupa bez torse nekonečné hodnosti a nechť p je prvočíslo. Potom každá p-base grupy G je konečná.*

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIE FAKTORSPALTBARKEIT ABELSCHER GRUPPEN

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

Das Wort „Gruppe“ bedeutet immer eine abelsche Gruppe.

Eine torsionsfreie Gruppe G heisst *faktorspaltbar*, wenn jede ihre Faktorgruppe G/H spaltbar ist. Eine torsionsfreie Gruppe vom endlichen Range G heisst *primitiv*, wenn es solche ihre freie Untergruppe U gibt, dass die Faktorgruppe G/U eine periodische Π-primäre Gruppe ist, wo Π eine endliche Menge von (positiven) Primzahlen bezeichnet.

Vor allem kann man die folgende Sätze beweisen:

Satz 2. *Jede primitive torsionsfreie Gruppe vom endlichen Range $r \geqq 1$ ist faktorspaltbar.*

Satz 3. *G sei eine torsionsfreie Gruppe vom endlichen Range $r \geqq 1$ und H sei solche Untergruppe der Gruppe G, dass G/H eine primitive torsionsfreie Gruppe ist. Dann ist die Gruppe G genau dann faktorspaltbar, wenn die Untergruppe H faktorspaltbar ist.*

Unmittelbar daraus folgt der folgende Satz:

Satz 4. *G sei eine faktorspaltbare torsionsfreie Gruppe vom endlichen Range $r \geqq 1$ und H sei eine primitive torsionsfreie Gruppe, ebenso vom endlichen Range. Dann ist die Gruppe $G' = G \dotplus H$ faktorspaltbar.*

Eine torsionsfreie Gruppe G heisst *fastvollständig*, wenn für fast alle (d. h. mit Ausnahme höchstens endlich vieler) Primzahlen p die Relation $pG = G$ gilt, d. h. wenn die Gruppe G p-vollständig ist.

Satz 5. *Jede fastvollständige torsionsfreie Gruppe vom endlichen Range $r \geqq 1$ ist faktorspaltbar.*

Satz 6. *G sei eine faktorspaltbare torsionsfreie Gruppe vom endlichen Range und H sei eine fastvollständige torsionsfreie Gruppe, ebenso vom endlichen Range. Dann ist die Gruppe $G' = G \dotplus H$ faktorspaltbar.*

Es existieren auch nichttriviale torsionsfreie Gruppen vom unendlichen Range, die auch faktorspaltbar sind; das besagt der folgende Satz.

Satz 8. *Jede Servanzuntergruppe der additiven Gruppe ganzer p-adischer Zahlen $\mathfrak{P}$ ist faktorspaltbar.*

In der Abhandlung [2] wurde der Begriff der p-Basis einer Gruppe eingeführt. Für diesen Begriff gilt die folgende Behauptung:

Satz 9. *G sei eine faktorspaltbare torsionsfreie Gruppe vom unendlichen Range und p sei eine Primzahl. Dann ist jede p-Basis der Gruppe G endlich.*