Michal Greguš

Über einige Eigenschaften der Büschel von Lösungen der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 311--319

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117444`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER BÜSCHEL VON LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DRITTER ORDNUNG

MICHAL GREGUŠ, Bratislava

(Eingelangt am 22. April 1961)

In der Arbeit wurden abgeleitet: einige Eigenschaften der sogenannten Büschel von Lösungen der Differentialgleichung (a), ferner notwendige und hinreichende Bedingungen, unter welchen jede Lösung der Differentialgleichung (a) mit einer Nullstelle unendlich viele Nullstellen hat, und hinreichende Bedingungen dazu, dass unter gewissen speziellen Voraussetzungen jede Lösung der Differentialgleichung (a) mit einer Nullstelle oszilliert.

Einleittung. Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt. Im ersten Teil werden die Eigenschaften der sogenannten Büschel von Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0 \tag{a}$$

untersucht. Weiter sind hier einfache Sätze bewiesen, welche die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Oszillationsfähigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (a) darstellen.

Im zweiten Teil wurde der Begriff des sogenannten Büschels von Lösungen der Differentialgleichung (a) im Punkte $-\infty$ eingeführt. Es handelt sich um die Menge von Lösungen der Differentialgleichung (a), welche einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf der ganzen Zahlenachse entsprechen. Jede Differentialgleichung der Form (a) mit den im Intervall $(-\infty, \infty)$ stetigen Koeffizienten erzeugt das Büschel im Punkte $-\infty$, wenn $b(x)$ auf der ganzen Zahlenachse dasselbe Zeichen besitzt, und dabei in keinem Intervall identisch verschwindet. Diese Eigenschaft hat interessante Folgen, z. B. für die Konstruktion der Differentialgleichungen der Form (a) aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung. Weiter wurde hier die notwendige und hinreichende Bedingung für die Oszillationsfähigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (a) mit einer Nullstelle bewiesen, sowie die hinreichende Bedingung für die Oszillationsfähigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung der Form (a) mit einer Nullstelle. G. SANSONE [1] hat nämlich bewiesen, dass wenn die Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + \frac{1}{2}A(x)\, y = 0$ oszillieren, dann oszillieren auch die Lösungen der Gleichung (a), welche wenigstens eine Nullstelle haben. Aus der erwähnten hinreichenden Bedingung folgt die hinreichende Bedingung für die Oszillationsfähigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (a) auch in dem Falle, wenn die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + \frac{1}{2}A(x)\,y = 0$, $A \geqq 0$ für $x \in \in (-\infty, \infty)$, nicht oszillieren.

I. Erwägen wir die Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0\,,$$

deren Koeffizienten $A(x)$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ sind, wobei $b(x) \equiv 0$ in keinem Intervalle gilt. Die zur Differentialgleichung (a) adjungierte Differentialgleichung lautet

$$\text{(b)} \qquad z''' + 2A(x)\,z' + [A'(x) - b(x)]\,z = 0\,.$$

Für die Lösungen der Differentialgleichung (a) gilt die folgende integrale Identität

$$\text{(1)} \qquad yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int_a^x by^2\,\mathrm{d}t = \text{Konst}\,,$$

welche wir erhalten, wenn wir die Gleichung (a) mit y multiplizieren und Glied nach Glied integrieren. $a \in (-\infty, \infty)$ ist eine feste, $x \in (-\infty, \infty)$ eine beliebige Zahl.

Die integrale Identität (1) für die Lösungen der Differentialgleichung (b) ist von der Form

$$\text{(2)} \qquad zz'' - \tfrac{1}{2}z'^2 + Az^2 - \int_a^x bz^2\,\mathrm{d}t = \text{Konst}\,.$$

y_1, y_2 seien die Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften $y_1(a) = y_1'(a) = 0$, $y_1''(a) \neq 0$, $y_2(a) = y_2''(a) = 0$, $y_2'(a) \neq 0$.

Die Menge der Lösungen der Differentialgleichung (a) $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *mit der Eigenschaft* $y(a) = 0$ *werden wir als Büschel von Lösungen der Differentialgleichung* (a) *im Punkte a bezeichnen.* Das Büschel von Lösungen im Punkte a hat folgende Eigenschaften [2]:

a) Für $x > a$ entspricht das Büschel der Lösungen der Differentialgleichung (a) der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(c)} \qquad \omega y'' - \omega' y' + [\omega'' + 2A\omega]\,y = 0\,,$$

wo $\omega = \omega(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (b) mit der Eigenschaft $\omega(a) = \omega'(a) = 0$, $\omega''(a) \neq 0$ ist, wobei $\omega(x) \neq 0$ für $x > a$, wie dies aus der integralen Identität (2) hervorgeht.

b) Wenn eine Lösung des Büschels rechts vom Punkt a oszilliert, dann oszillieren auch die übrigen und ihre Nullstellen teilen sich ab; hierbei, wenn $x_1 > a$ die erste Nullstelle der Lösung y_1 ist, dann hat jede Lösung des Büschels zwischen a und x_1 gerade eine Nullstelle.

c) Wie aus der Identität (1) hervorgeht, hat die Lösung y_1 links von a keine Nullstelle. Die anderen Lösungen des Büschels können links von a Nullstellen haben.

Wenn $\omega(x)$ links von a keine Nullstelle hat, dann hat jede Lösung des Büschels im Punkt a höchstens eine Nullstelle links von a.

d) z_1, z_2 seien Lösungen der Differentialgleichung (b) mit den Eigenschaften $z_1(a) = z_1'(a) = 0$, $z_1''(a) \neq 0$, $z_2(a) = z_2''(a) = 0$, $z_2'(a) \neq 0$. Dann entspricht das Büschel $c_1 z_1 + c_2 z_2$ für $x < a$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y_1 z'' - y_1' z' + [2Ay_1 + y_1''] z = 0, \tag{c'}$$

wo y_1 die Lösung der Gleichung (a) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a ist, wobei für $x < a$ $y_1(x) \neq 0$.

Bemerkung 1. Es ist ersichtlich, dass zwei Lösungen der Differentialgleichung (a) oder (b) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a abhängig sind; also auch $\omega = c \, . \, z_1$.

Satz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit einer Nullstelle unendlich viele Nullstellen hat, ist, dass eine Lösung der Differentialgleichung* (a) *unendlich viele Nullstellen im* (a, ∞) *hat, wo a eine beliebige Zahl ist.*

Beweis. Es ist klar, dass die Bedingung notwendig ist. Dass die Bedingung auch hinreichend ist, folgt aus der Eigenschaft der Büschel. Sei nähmlich $\bar{y}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $\bar{y}(x_1) = 0$ und dabei habe $\bar{y}(x)$ unendlich viele Nullstellen im (a, ∞); $x_1 \in (a, \infty)$. $\bar{y}(x)$ gehört in das Büschel im Punkte x_1, und daher oszilliert in (x_1, ∞) das ganze Büschel. $y(x)$ sei eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(\bar{x}) = 0$. Wir werden zeigen, dass $y(x)$ unendlich viele Nullstellen hat. $y(x)$ gehört in das Büschel im Punkte $\bar{x}$. Wenigstens eine Lösung dieses Büschels quert den Punkt x_1 durch, sie oszilliert also rechts von x_1 und daher oszilliert auch $y(x)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ähnlich könnte man auch die folgenden drei Sätze beweisen:

Satz 2. *Wenn jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit einer doppelten Nullstelle wenigstens eine weitere Nullstelle hat, dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit einer Nullstelle unendlich viele Nullstellen hat.*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus der Eigenschaft b) der Büschel.

Satz 3. *Wenn die Lösung $\bar{y}$ der Differentialgleichung* (a) *k Nullstellen hat, von welchen x_1 die erste sei, dann hat jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit einer Nullstelle links von x_1 wenigstens $k - 1$ Nullstellen.*

Satz 4. *Wenn $\bar{y}(x)$ im Punkte a eine doppelte Nullstelle hat und keine weiteren Nullstellen besitzt, dann hat jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit einer doppelten Nullstelle rechts von a keine weitere Nullstelle.*

Bemerkung 2. Analogische Sätze zu den Sätzen 1, 2, 3, 4 gelten auch für die Lösungen der Differentialgleichung (b). Dabei muss die Eigenschaft d) des Büschels der Lösungen der Differentialgleichung (b) in Erwägung gezogen werden.

II. Die Koeffizienten der Differentialgleichung (a) sollen die Voraussetzungen, welche am Anfang des Abschnittes I angeführt wurden, erfüllen.

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Existenzfrage der Lösungen ohne Nullstellen und mit den Eigenschaften der sogenannten Büschel im Unendlichen befassen. Es ist bekannt [3], dass die Differentialgleichung (a) oder (b) wenigstens eine Lösung y ohne Nullstellen in (a, b) hat, wo $a < b$ reelle Zahlen sind, und wenigstens eine Menge von Lösungen $c_1y_1 + c_2y_2$ mit beliebigen Konstanten c_1, c_2 derart existiert, dass sich die Nullstellen von je zwei Lösungen dieser Menge abteilen.

Satz 5. *Die Differentialgleichung* (a) *hat im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *wenigstens eine Lösung ohne Nullstellen.*

Beweis. y_1, y_2, y_3 sei ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften:

$$y_1(a) = y_1'(a) = 0\,, \quad y_1''(a) = 1\,, \quad y_2(a) = y_2''(a) = 0\,, \quad y_2'(a) = 1\,,$$
$$y_3'(a) = y_3''(a) = 0\,, \quad y_3(a) = 1\,,$$
$$a \in (-\infty, \infty)\,.$$

$a < x_1 < x_2 < \ldots$ sei eine Folge von Zahlen, welche zum ∞ strebt. Aus der integralen Identität (1) folgt, dass y_1 links von a keine Nullstellen hat.

Bilden wir jetzt eine Folge von Lösungen der Differentialgleichung (a) $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n = c_1^n y_1 + c_2^n y_2 + c_3^n y_3$ mit den Eigenschaften, dass $u_n\{x_n\} = u_n'(x_n) = 0$, $u_n''(x_n) > 0$, wobei $u_n^2(a) + u_2'^n(a) + u_n''^2(a) = 1$ sei. Dies ist immer möglich. Aus der integralen Identität (1) für u_n folgt, dass u_n links von x_n keine Nullstelle hat und $u_n(x) > 0$ für $x < x_n$ ist.

Bilden wir die nachstehenden Folgen:

$$\{u_n(a)\}_{n=1}^{\infty}\,, \quad \{u_n'(a)\}_{n=1}^{\infty}\,, \quad \{u_n''(a)\}_{n=1}^{\infty}\,. \tag{3}$$

Es ist ersichtlich, dass jede von ihnen begrenzt ist.

Es existieren deshalb aus den Folgen (3) ausgewählte Folgen, mit denselben Indexen, welche konvergieren. Der Einfachtheit wegen seien diese gerade so wie Folgen (3) bezeichnet. Bezeichnen wir ihre Grenzen als u_0, u_0', u_0''. $u(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (a), welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$u(a) = u_0\,, \quad u'(a) = a_0'\,, \quad u''(a) = u_0''\,.$$

Diese Lösung ist nicht trivial, weil

$$\lim_{n\to\infty} [u_n^2(a) + u_n'^2(a) + u_n''^2(a)] = u_0^2 + u_0'^2 + u_0''^2 = 1\,.$$

Es ist ersichtlich, dass $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ für alle $x \in (-\infty, \infty)$, weil

$$u_n(x) = u_n''(a)\, y_1(x) + u_n'(a)\, y_2(x) + u_n(a)\, y_3(x)\,,$$
$$u(x) = u_0'' y_1 + u_0' y_2 + u_0 y_3$$

ist.

Zeigen wir jetzt, dass $u(x) \neq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ist. Aus der Integralidentität

$$y_n y_n'' - \tfrac{1}{2} y_n'^2 + A y_n^2 - \int_x^{x_n} b y_n^2 \, dt = 0$$

folgt, dass das Integral $\int_x^\infty bu^2 \, dt$ konvergiert und dass die Integralidentität für $n \to \infty$ in die Identität

$$uu'' - \tfrac{1}{2} u'^2 + Au^2 - \int_x^\infty bu^2 \, dt = 0$$

übergeht. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung 3. Ähnlich könnten wir beweisen, dass auch bei der Differentialgleichung (b) eine Lösung ohne Nullstelle existiert.

y_1, y_2 seien unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (a), deren Wronskische Determinante ω auf der ganzen Zahlenachse von Null verschieden ist. *Dann werden wir die Menge der Lösungen $c_1 y_1 + c_2 y_2$ der Differentialgleichung* (a) *als Büschel von Lösungen im Punkte $-\infty$ bezeichnen.*

Ähnlich können wir das Büschel im Punkte $+\infty$ für die Lösungen der Differentialgleichung (b) definieren. Das Büschel der Lösungen im Punkte $-\infty$ entspricht offenbar der Differentialgleichung der Form (c), und ω ist die Lösung der Differentialgleichung (b).

Satz 6. *Zu jeder Lösung ω der Differentialgleichung* (b) *ohne Nullstellen im Intervall $(-\infty, \infty)$ existiert ein solches Büschel von Lösungen $c_1 y_1 + c_2 y_2$ der Differentialgleichung* (a) *im Punkte $-\infty$, dass $\omega = y_1 y_2' - y_1' y_2$.*

Beweis. ω sei eine Lösung der Differentialgleichung (b) ohne Nullstellen im $(-\infty, \infty)$. Zeigen wir, dass solche Lösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung (a) existieren, dass $\omega = y_1 y_2' - y_1' y_2$ gilt. Es sei $a \in (-\infty, \infty)$ eine feste Zahl und $\omega(a) = \omega_0$, $\omega'(a) = \omega_0'$, $\omega''(a) = \omega_0''$. y_1, y_2 seien Lösungen der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y_1(a) = y_2'(a) = 0$. Zeigen wir, dass $y_1'(a)$, $y_1''(a)$, $y_2(a)$, $y_2''(a)$ so gewählt werden können, dass

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix}_a = \omega_0 , \quad \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix}_a' = \omega_0' , \quad \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix}_a'' = \omega_0'' .$$

Aus den letzten Beziehungen folgen die Gleichheiten

$$-y_1'(a)\, y_2(a) = \omega_0 , \quad -y_1''(a)\, y_2(a) = \omega_0' , \quad y_1'(a)\, y_2''(a) = \omega_0'' + 2A(a)\, \omega_0 .$$

Wählen wir $y_2(a) = k_1 \neq 0$; dann erhalten wir aus der ersten Gleichheit, dass $y_1'(a) = -\omega_0/k_1$; aus der zweiten Gleichheit erhalten wir $y_1''(a) = -\omega_0'/k_1$; und aus der dritten

$$y_2''(a) = -\frac{k_1}{\omega_0} \left[\omega_0'' + 2A(a)\, \omega_0\right] .$$

y_1, y_2 sollen jetzt die angeführten Anfangsbedingungen erfüllen. Ihre Wronskische

Determinante [1] ist eine Lösung der Differentialgleichung (b). Da diese im Punkte a die Anfangsbedingungen der Lösung ω ohne Nullstellen erfüllt, so ist $\omega = y_1 y_2' - y_1' y_2$ und daher $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ist ein Büschel von Lösungen der Differentialgleichung (a) im Punkte $-\infty$, welcher zu der Lösung ω der Differentialgleichung (b) gehört. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 7. *Wenn die Lösung $\bar{y}$ der Differentialgleichung* (a) *unendlich viele Nullstellen im Intervall $(-\infty, a)$ hat, dann oszilliert das Büschel der Lösungen der Differentialgleichung* (a) *im Punkte $-\infty$ im Intervall $(-\infty, a)$.*

Beweis. $\bar{y}$ soll im $(-\infty, a)$ oszillieren und dessen Nullstellen in $(-\infty, a)$ seien: $\ldots < x_{-n} < x_{-n+1} < \ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0$. Der Satz wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass zu der beliebigen natürlichen Zahl K wenigstens eine Lösung der Differentialgleichung (a) existiert, welche in das Büschel im Punkte $-\infty$ gehört, und welche mehr als K Nullstellen hat.

Es sei also K eine beliebig grosse natürliche Zahl und es sei z. B. $m > K + 10$, wo m wieder eine natürliche Zahl ist. Dann ist es möglich im Büschel im Punkte $-\infty$, $c_1 y_1 + c_2 y_2$ die Konstanten c_1, c_2 so zu wählen, dass $\bar{c}_1\, y_1(x_{-m}) + \bar{c}_2\, y_2(x_{-m}) = 0$. Aus den Eigenschaften des Büschels geht dann hervor, dass $\bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2$ für $x > x_{-m}$ wenigstens m Nullstellen hat, und dass also jede Lösung des Büschels $c_1 y_1 + c_2 y_2$ in $(-\infty, a)$ mehr als K Nullstellen hat. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 8. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass jede Lösung y der Differentialgleichung* (a) *mit einer Nullstelle unendlich viele Nullstellen in $(-\infty, \infty)$ hat, ist, dass das Büschel im Punkte $-\infty$ im Intervall (a, ∞) oszilliert, wo $a \in (-\infty, \infty)$ eine feste Zahl ist.*

Beweis. Die notwendige Bedingung ist offensichtlich. Die hinreichende Bedingung geht aus den Eigenschaften des Büschels hervor. Es soll nämlich das Büschel im Punkte $-\infty$ im Intervall (a, ∞) oszillieren und $\bar{y}$ se eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $\bar{y}(\alpha) = 0, \alpha \in (-\infty, \infty)$. Im Büschel im Punkte α existiert eine solche Lösung y_α der Differentialgleichung (a), welche den Punkt $\bar{x} > a$ durchquert. Den Punkt $\bar{x}$ quert eine Lösung des Büschels im Punkte $-\infty$ durch, welche für $x > \bar{x}$ oszilliert; folglich oszilliert das ganze Büschel im Punkte $\bar{x}$ und also auch y_α. Da y_α in das Büschel im Punkte α gehört, oszilliert das Büschel im Punkte α und daher auch $\bar{y}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 4. Ein ähnlicher Satz, wie der Satz 7 gilt auch für die Differentialgleichung (b), aber für das Intervall $(-\infty, a)$.

Es ist leicht einzusehen, dass wenn wir die Differentialgleichung (c) Glied nach Glied differenzieren, dass wir die Differentialgleichung (a) erhalten.

Lemma. *$\omega(x)$ sei eine positive Funktion mit stetiger dritten Ableitung im Intervall $(-\infty, \infty)$.*

Es sei weiter

$$(4) \qquad A'(x) + \frac{\omega'''(x)}{\omega(x)} + 2A(x)\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} \leqq 0$$

für $x \in (-\infty, \infty)$, *wobei das Gleichheitszeichen in keinem Intervalle gelte.*

Wenn die Differentialgleichung (c), *in welcher* $\omega = \omega(x)$ *ist, im ganzen Intervall* $(-\infty, \infty)$ *oszillatorische Lösungen hat, dann oszilliert jede Lösung der Differentialgleichung*

$$(\alpha_1) \qquad z''' + 2Az' + \left[-\frac{\omega'''}{\omega} - 2A\frac{\omega'}{\omega}\right]z = 0\,,$$

welche wenigstens eine Nullstelle hat, rechts von dieser Nullstelle.

Beweis. Aus der Oszillatoinsffähigkeit der Differentialgleichung (c) und aus der Voraussetzung (4) geht hervor, dass jede Lösung der Differentialgleichung

$$(\alpha_2) \qquad y''' + 2Ay' + \left[2A' + \frac{\omega'''}{\omega} + 2A\frac{\omega'}{\omega}\right]y = 0\,,$$

die zu der Differentialgleichung (α_1) adjungiert ist, welche wenigstens eine Nullstelle hat, links von dieser oszilliert. $z(x)$ sei jetzt eine Lösung der Differentialgleichung (α_1) mit einer doppelten Nullstelle im Punkte a. $u(x)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung (c), welche rechts vom Punkte a wenigstens drei Nullstellen $a < x_1 < < x_2 < x_3$ hat. Aus den Voraussetzungen des Lemmas folgt, dass eine solche Lösung existiert. Aus den Eigenschaften der Büschel für die Differentialgleichung (α_2) folgt, dass eine solche Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (α_2) mit den Eigenschaften $y(x_3) = y'(x_3) = 0$, $y''(x_3) \neq 0$, existiert, welche eine weitere Nullstelle ξ zwischen x_1 und x_2 hat. Es ist bekannt [4], dass dann eine solche Lösung $\bar{z}(x)$ der Differentialgleichung (α_1) existiert, welche die Bedingungen $\bar{z}(\xi) = \bar{z}'(\xi) = 0$, $\bar{z}''(\xi) \neq 0$, $\bar{z}(x_3) = = 0$ erfüllt. Aus den Eigenschaften der Büschel der Differentialgleichung (α_1) geht hervor, dass $z(x)$ rechts von a wenigstens eine Nullstelle hat. Aus Satz 2 folgt dann die Behauptung des Lemmas.

Satz 9. *Die Voraussetzungen, welche im Lemma angeführt wurden, seien erfüllt und es sei*

$$b(x) \geqq -A'(x) - \frac{\omega''(x)}{\omega(x)} - 2A(x)\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\,.$$

Jede Lösung der Differentialgleichung (a), *welche wenigstens eine Nullstelle hat, oszilliert dann rechts von dieser Nullstelle.*

Beweis. Nach Satz 2 genügt es zu zeigen, dass jede Lösung mit einer doppelten Nullstelle eine weitere Nullstelle hat. Die Differentialgleichung (a) kann man in der Form

$$y''' + 2Ay' + \left[A' - A' - 2A\frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega'''}{\omega}\right]y = \left[-b - A' - 2A\frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega'''}{\omega}\right]y$$

schreiben.

Durch die Methode der Variation der Konstanten stellen wir leicht fest, dass die Lösung y der Differentialgleichung (a) mit Hilfe der Lösung z der Differentialgleichung (α_2) mit denselben Anfangsbedingungen im Punkte a durch die Beziehung

$$(5) \qquad y = z + \int_a^x \left[- b(t) - A'(t) - 2\dot{A}(t) \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} - \frac{\omega'''(t)}{\omega(t)} \right] y(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t$$

ausgedrückt werden kann, wo

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} z_1(x), & z_2(x), & z_3(x) \\ z_1(t), & z_2(t), & z_3(t) \\ z_1'(t), & z_2'(t), & z_3'(t) \end{vmatrix}$$

ist, wobei z_1, z_2, z_3 ein Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung (α_1) bilden, dessen Wronskische Determinante gleich 1 ist. $W(x, t)$ ist bei festem t eine Lösung der Differentialgleichung (α_1) mit doppelter Nullstelle im Punkte t und deshalb $W(x, t) > 0$ für $x > t$.

$y(x)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$; dann erfüllt $z(x)$ in Punkte a die Bedingung $z(a) = z'(a) = 0$, $z''(a) = y''(a)$. Nach dem Lemma hat $z(x)$ eine weitere Nullstelle rechts von a. Aus der Beziehung (5) geht dann hervor, dass auch $y(x)$ eine weitere Nullstelle rechts von a haben muss. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 5. G. Sansone [1] hat bewiesen, dass die Lösung der Differentialgleichung (a) mit einer Nullstelle bei $A(x) \geqq 0$ oszilliert, wenn $A(x)$ eine solche Funktion ist, dass die Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + \frac{1}{2}A(x)\, y = 0$ oszillieren.

Der Satz 9 gibt die hinreichenden Bedingungen für die Oszillationsfähigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (a) bei $A(x) \geqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ auch für den Fall an, wenn die Lösungen der angeführten Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht oszillieren. Dies ist leicht einzusehen, wenn wir z. B. $\omega = e^{-x}$ in die Bedingung (4) setzen.

Literatur

[1] *G. Sansone*: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale. Revista Matem. y Fisica Teorica, Serie *A*, Tucuman 1948, 195–253.

[2] *M. Greguš*: O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *2*, 1955, 73–85.

[3] *G. D. Birkhoff*: On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order. Annales of Math., *2*, 12, 1910–11, 103–127.

[4] *M. Greguš*: O niektorých vzťahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu a o jednom okrajovom probleme. Acta facultatis Rerum naturalium U. C. Bratislava, *1*, 1956, 265–272.

Výťah

O NIEKTORÝCH VLASTNOSTIACH ZVÄZKOV RIEŠENÍ LINEÁRNEJ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE TRETIEHO RÁDU

MICHAL GREGUŠ, Bratislava

V práci sú odvodené niektoré vlastnosti tzv. zväzkov riešení diferenciálnej rovnice tretieho rádu (a), za predpokladu, že koeficienty $A(x)$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ sú spojité funkcie $x \in (-\infty, \infty)$ a $b(x) \equiv 0$ neplatí v žiadnom intervale. Ďalej je tu dokázaná existencia riešení bez nulových bodov v $(-\infty, \infty)$ a existencia tzv. zväzku v bode $-\infty$, t. j. množiny riešení $c_1y_1 + c_2y_2$ diferenciálnej rovnice (a), ktorých nulové body sa oddeľujú v $(-\infty, \infty)$.

Nakoniec je v práci dokázaná postačujúca podmienka pre oscilatoričnosť riešení určitej diferenciálnej rovnice tretieho rádu tvaru (a) s jedným nulovým bodom. Z tejto podmienky vyplývajú dôsledky pre riešenia diferenciálnej rovnice (a) ako špeciálne prípady.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СВЯЗЕЙ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

МИХАЛ ГРЕГУШ (Michal Greguš), Братислава

В работе рассматриваются некоторые свойства т. н. связей решений дифференциального уравнения третьего порядка (a) при предположениях, что коэффициенты $A(x)$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ — непрерывные функции $x \in (-\infty, \infty)$ и что $b(x) \equiv \equiv 0$ неверно ни в каком интервале. Кроме того, в работе доказано существование решений без нулевых точек в интервале $(-\infty, \infty)$ и существование т. н. связей в точке $-\infty$, т. е. множества решений $c_1y_1 + c_2y_2$ дифференциального уравнения (a), нулевые точки которых отделяются в интервале $(-\infty, \infty)$.

Наконец, в работе доказано достаточное условие для колебания решений определенного дифференциального уравнения тертьего порядка типа (a) с одной нулевой точкой. Из этого условия вытекают следствия для решений дифференциального уравнения (a) как частные случаи.