Vasilij Antonovič Golubev

Точные формулы числа близнецов и других обобщений функции $\pi(x)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 296--304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117442

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛА БЛИЗНЕЦОВ И ДРУГИХ ОБОБЩЕНИЙ ФУНКЦИИ $\pi(x)$

В. А. ГОЛУБЕВ, Кувшиново (СССР)

(Поступило в редакцию 20/XII 1960 г.)

Выводятся рекуррентные формулы для количества пар простых чисел (и других групп простых чисел) и для числа простых чисел вида $x^2 + b$, $x^3 + b$ в отрезках арифметических последовательностей.

1. ЧИСЛО БЛИЗНЕЦОВ ОТ 1 ДО x

1. В работе [1] дана сложная формула для точного числа близнецов от 1 до x. Эту формулу можно упростить, введя следующую функцию:

$$(1)\qquad \mu_2(n) = \begin{cases} (-2)^k, \text{ если } n = p_1 \dots p_k, p_i > 2 - \text{простые числа } (i = 1, 2, \dots, k); \\ (-1)^{k+1} \,.\, 2^k, \text{ если } n = 2p_1 \dots p_k; \\ \mu(n) \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Формулы числа близнецов и других обобщений функции $\pi(x)$ имеют вид, напоминающий известную формулу Лежандра

$$(2)\qquad \pi(x) = \pi(\sqrt{x}) - 1 + \sum_{d|n} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right],$$

где $n = p_1 p_2 \dots p_k$, $p_i \leqq \sqrt{x}$ — простые $(i = 1, 2, \dots, k)$, $\mu(d)$ — функция Мёбиуса.

2. Пусть функция $\varphi_2(n)$ определяет число пар натуральных чисел a_1, a_2, таких, что $a_2 - a_1 = 2$, $(a_1, n) = 1$, $a_1 \leqq n$.

Легко доказать [2], что функция $\varphi_2(n)$, как и функция $\mu_2(n)$, мультипликативна. При четном n получим:

$$\varphi_2(n) = \tfrac{1}{2} n \prod_{p|n} (1 - 2/p), \; p > 2 - \text{простое число.}$$

Пусть функция $\varphi_2(x, n)$ означает число пар натуральных чисел a_1, a_2 таких, что $a_2 - a_1 = 2$, $(a_1, n) = 1$, $(a_2, n) = 1$, $a_1 \leqq x$.

Величина пар простых чисел близнецов, p, $p + 2$ и их число от 1 до x, где $p \leqq x$, вполне определяются по величине и числу чисел p-меньших членов пар близнецов. Это обстоятельство мы будем иметь в виду и в дальнейшем при. выделении групп простых чисел.

Для выделения близнецов p из ряда $1, 2, \ldots, [x]$ достаточно вычеркнуть из этого ряда все составные числа, числа 1, 2 и числа

$$y \equiv -2(\mathrm{mod}\, p_i), \quad y > p_i (i = 2, 3, \ldots, k), \quad \text{где} \quad p_2 < p_3 < \ldots < p_k,$$
$$p_k \leqq \sqrt{(x+2)} < p_{k+1}.$$

После этого останутся меньшие числа p каждой пары близнецов, $p \leqq x$.

Процесс вычёркивания чисел мы разобьём на k стадий:

а) Из ряда $1, 2, \ldots, [x]$ вычеркнем четные числа. Получим число оставшихся чисел:

$$\varphi_2(x, 2) = [x] - [\tfrac{1}{2}x].$$

в) Вычеркнем число $[\frac{1}{3}x]$ чисел $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ и число $[\frac{1}{3}(x+2)]$ чисел $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, 3)$. Из этих чисел были вычеркнуты ранее четные числа, число которых равно $[\frac{1}{6}x] + [\frac{1}{6}(x+2)]$.

Число чисел, вычеркнутых на 2-й стадии:

$$\varphi_2(\tfrac{1}{3}x, 6) + \varphi_2(\tfrac{1}{3}(x+2), 6) = [\tfrac{1}{3}x] + [\tfrac{1}{3}(x+2)] - [\tfrac{1}{6}x] - [\tfrac{1}{6}(x+2)].$$

Остается число:

$$\varphi_2(x, 6) = [x] - [\tfrac{1}{2}x] - [\tfrac{1}{3}x] - [\tfrac{1}{3}(x+2)] + [\tfrac{1}{6}x] + [\tfrac{1}{6}(x+2)].$$

с) После исключения чисел $y \equiv 0$, $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, 5)$ мы получим число оставшихся чисел:

$$\begin{aligned}(3)\quad \varphi_2(x, 30) = {} & [x] - [\tfrac{1}{2}x] - [\tfrac{1}{3}x] - [\tfrac{1}{3}(x+2)] - [\tfrac{1}{5}x] - [\tfrac{1}{5}(x+2)] + [\tfrac{1}{6}x] + \\ & + [\tfrac{1}{6}(x+2)] + [\tfrac{1}{10}x] + [\tfrac{1}{10}(x+2)] + [\tfrac{1}{15}x] + [\tfrac{1}{15}(x+2)] + [\tfrac{1}{15}(x+5)] + \\ & + [\tfrac{1}{15}(x+12)] - [\tfrac{1}{30}x] - [\tfrac{1}{30}(x+2)] - [\tfrac{1}{30}(x+12)] - [\tfrac{1}{30}(x+20)].\end{aligned}$$

Формулу (3) можно записать короче:

$$(4) \qquad \varphi_2(x, 30) = \sum_{d|30} \mu_2(d) \cdot \left[\frac{x+a}{d}\right].$$

Согласно определению функции $\mu_2(n)$ в формуле (4) будет то же число членов, что и в формуле (3). Значения a определяются рекуррентно для каждого d. Если $p = d > 2$, то из сравнений $y \equiv 0$, $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, p)$ получим: $[x/p]$, $[x + 2/p]$. Если $d = 2p$, то из систем сравнений: 1) $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$. $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ и 2) $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$, $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, p)$ получим: $[x/2p]$, $[x + 2/2p]$. Если $d = p_1, p_2$, $p_2 > p_1 > 2$, то решаем 4 системы сравнений:

1) $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, p_1)$, $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, p_2)$; 2) $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, p_1)$, $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, p_2)$; 3) $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, p_1)$, $y \equiv 0(\mathrm{mod}\, p_2)$; 4) $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, p_1)$, $y \equiv -2(\mathrm{mod}\, p_2)$ и т.д.

Применив рекуррентную формулу

$$\text{(5)}\qquad \varphi_2(x; p_1 \dots p_k) = \varphi_2(x; p_1 \dots p_{k-1}) - \varphi_2\left(\frac{x}{p_k}; p_1 \dots p_{k-1}\right) - \varphi_2\left(\frac{x+2}{p_k}; p_1 \dots p_{k-1}\right),$$

методом математической индукции мы получим общую формулу

$$\text{(6)}\qquad \varphi_2(x; p_1 \dots p_k) = \sum_{d \mid p_1 \dots p_k} \mu_2(d) \left[\frac{x+a}{d}\right],$$

где числа a определяются решением соответствующих систем сравнений.

Пусть $n = p_1 \dots p_k$, где p_i-простые числа, не превышающие $\sqrt{(x+2)}$; добавив к (6) вычеркнутые близнецы, число которых равно $\pi_2(\sqrt{(x+2)})$, мы получим формулу числа близнецов для $x \geqq 7$:

$$\text{(7)}\qquad \pi_2(x) = \pi_2(\sqrt{(x+2)}) + \sum_{d \mid n} \mu_2(d) \left[\frac{x+a}{d}\right].$$

В случае $x < 7$ исключаем еще единицу, не исключенную по mod 2.

2. ВЫРАЖЕНИЯ, АНАЛОГИЧНЫЕ ФОРМУЛЕ (7)

Мы получим для чисел $\pi_r^{(m)}(x)$ – числа любых групп из m простых чисел с данными разностями r между ними. Для этого нужно определить соответствующую функцию $\mu_r^{(m)}(n)$ и вычислить значения a для членов $[(x+a)/d]$.

1. Определим, например, функцию $\pi_6^{(m)}(x)$ – число пар простых чисел p, $p + 6$. Имеем при $6 \mid n$:

$$\varphi_6^{(2)}(n) = \tfrac{1}{3} \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 3}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = 2\varphi_2(n).$$

Функцию $\mu_6(n)$ определим так, чтобы абсолютные величины значений $\mu_6(n)$ в случае $3 \mid n$, где n – бесквадратные числа, были в два раза меньше соответствующих значений $\mu_2(n)$:

$$\mu_6(n) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot 2^m, \text{ если } n = 2p_1 \dots p_m, \text{ или } n = 3p_1 \dots p_m,\ p_i > 3; \\ (-2)^m, \text{ если } n = 6p_1 \dots p_m, \text{ или } n = p_1 \dots p_m,\ p_i > 3; \\ \mu(n) \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Значения a членов $[(x+a)/d]$ мы получим решением систем сравнений $y \equiv 0$, $y \equiv -6 (\mathrm{mod}\ p)$.

Получим при $x \geqq 43$:

$$\text{(8)}\qquad \pi_6^{(2)}(x) = \pi_6^{(2)}(\sqrt{(x+6)} + \sum_{d \mid n} \mu_6(d) [(x+a)/d],$$

так как единица исключается по mod 7.

При $x < 43$:

$$\pi_6^{(2)}(x) = \pi_6^{(2)}(\sqrt{(x+6)}) - 1 + \sum_{d|n} \mu_6(d)\,[(x+a)/d]\,.$$

2. Определим функцию $\pi_{2,4}^{(3)}(x)$ — число троек простых чисел p, $p + 2$, $p + 6$ от 1 до x.

Имеем при $6 \mid n$:

$$\varphi_{2,4}^{(3)}(n) = \tfrac{1}{6} n \prod_{\substack{p|n \\ p>3}} \left(1 - \frac{3}{p}\right).$$

Пусть

$$\mu_{2,4}(n) = \begin{cases} (-3)^m, & \text{если } n = p_1 \dots p_m,\ p_i > 3,\ i = 1, 2, \dots, m\,; \\ (-1)^{m+1} \,.\, 3^m, & \text{если } n = 2p_1 \dots p_m; \\ 2\,.\,(-3)^m, & \text{если } n = 6p_1 \dots p_m; \\ (1)^{m+1}\,.\,2\,.\,3^m, & \text{если } n = 3p_1 \dots p_m; \\ \mu(n) \text{ в остальных случях.} \end{cases}$$

Получим при $x \geqq 7$:

$$\pi_{2,4}^{(3)}(x) = \pi_{2,4}^{(3)}(\sqrt{(x+6)}) + \sum_{d|n} \mu_{2,4}(d)\,[(x+a)/d]\,. \tag{9}$$

3. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

1. Пусть функция $\varphi(k, n)$ определяет число натуральных чисел, находящихся в данной арифметической прогресии $kx + l$, $(k, l) = 1$, $0 < l < k$, $x = 0, 1, \dots, n - 1$ и взаимно простых с kn.

Очевидны следующие свойства $\varphi(k, n)$:

a) Если простое число p делит разность k арифметической прогрессии, то, так как $(k, l) = 1$, все числа $kx + l$ являются взаимно простыми с p; их число от $x = 0$ до $x = p - 1$ равно p; поэтому $\varphi(k, p) = p$, $\varphi(k, p^m) = p^m$.

b) Если k не делится на простое число q, то числа $kx + l$ при $0 \leqq x \leqq q - 1$ образуют полную систему вычетов по модулю q; одно из них делится на q, следовательно, $\varphi(k, q) = q - 1$.

c) Легко доказать, что $\varphi(k, n)$ — функция мультипликативная по отношению n, то есть, $\varphi(k, n)\,.\,\varphi(k, m) = \varphi(k, mn)$ если $(n, m) = 1$.

d) Из указанных свойств получим:

$$\varphi(k, n) = n \prod_{\substack{p|n \\ (p,k)=1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{10}$$

Следовательно, если $k > 1$, то $\varphi(k, n) \geqq \varphi(n)$ — функции Эйлера; знак равенства будет при $(k, n) = 1$.

Пусть

$$\mu(k, n) = \begin{cases} 0, \text{ если } p \mid n,\ (p, k) > 1, \\ \mu(n) \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{11}$$

2. Пусть функция $\pi(kx; l)$ означает число простых чисел $p < kx$, $p \equiv l(\mathrm{mod}\ k)$, $(l, k) = 1$, $k > l$.

Точную формулу для $\pi(kx; l)$ мы получим, как в 1. При этом, если в ряде $l, k + l, 2k + l, \ldots, k(n-1) + l$ член $k(m-1) + l$ таков, что $p_i \mid k(m-1) + l$ при $(p_i, k) = 1$, то $a_1 = p_i - m$. Если $d = p_1 p_2$, значения a определяются из сравнений $x \equiv a_1(\mathrm{mod}\ p_1)$, $x \equiv a_2(\mathrm{mod}\ p_2)$ аналогично 1.

При $l > 1$ получим:

$$\pi(kx; l) = \pi(\sqrt{(kx)}; l) + \sum_{d\mid n} \mu(k, d)\,[(x + a)/d]\,, \tag{12}$$

где $n = p \ldots p_m$, $(p_i, k) = 1$, $p_i \leqq \sqrt{(kx)}$, $i = 1, 2, \ldots, .m$

При $l = 1$:

$$\pi(kx; l) = \pi(\sqrt{(kx)}; l) - 1 + \sum_{d\mid n} \mu(k, d)\,[(x + a)/d]\,.$$

4. ЧИСЛО БЛИЗНЕЦОВ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

1. Пусть функция $\varphi_2(k, n)$ определяет число пар натуральных чисел a_1, a_2, таких, что $a_2 - a_1 = 2$, $(a_1, kn) = 1$, $(a_2, kn) = 1$, $a_1 < kn$, при этом a_1 находятся в арифметической прогресии $kx + l$, $(k, l) = 1$, $0 < l < k$, $x = 0, 1, \ldots, n-1$; следовательно, a_2 находятся в прогресии $kx + l + 2$, $(k, l + 2) = 1$.

Устанавливаем мультипликативность функции $\varphi_2(k, n)$ и следующие её свойства:

1. Если $2 \mid k$, то $\varphi_2(k, 2^m) = 2^m$; если $2 \nmid k$, то $\varphi_2(k, 2^m) = 2^{m-1}$;
2. Если простое число $p > 2$ и $p \mid k$, то $\varphi_2(k, p^m) = p^m$; если же $p \nmid k$, то $\varphi_2(k, p^m) = (p - 2)\,p^{m-1}$.

Поэтому при чётных k и n, или при нечётном n и любом натуральном k имеем

$$\varphi_2(k, n) = n \prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \quad \text{при} \quad p \mid k\,. \tag{13}$$

При нечётном k и чётном n:

$$\varphi_2(k, n) = \tfrac{1}{2} n \prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}} \left(1 - \frac{2}{p}\right), \quad p \mid k\,.$$

Определим функцию $\mu_2(k, n)$ при k чётном:

$$\mu_2(k, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \mid n,\ p \mid k,\ p - \text{простое число;} \\ (-2)^m, & \text{если } n = p_1 p_2 \ldots p_m,\ p_i \nmid k,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\ \mu(n) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При k нечётном:

$$\mu_2(k, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \mid n,\ p \mid k,\ p > 2 - \text{простое число;} \\ (-1)^{m+1} \cdot 2^m, & \text{если } n = 2p_1 \ldots p_m,\ p_i \nmid k,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\ (-2)^m, & \text{если } n = p_1 \ldots p_m,\ p_i \nmid k; \\ \mu(n) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для числа $\pi_2(kx; l)$ близнецов p в арифметической прогрессии $kx + l$, $(k, l) = 1$ мы получим, аналогично 1:

$$\pi_2(kx; l) = \pi_2(\sqrt{(kx + 2)}; l) + \sum_{d|n} \mu_2(k, d)\, [(x + a)/d]\,, \tag{15}$$

где $n = p_1 \dots p_m$, $(p_i, k) = 1$, $(p_i + 2, k) = 1$, $p_i \leqq \sqrt{(kx)}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

5. ЧИСЛО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ВИДА $x^2 + 1$

1. Эти числа изучали L. Euler, A. J. C. Cunningham и другие; Л. Эйлер [3] показал, что простыми делителями чисел $x^2 + 1$ являются число 2 и простые числа $p = 4m + 1$. Исходя из разложения $p = x^2 + y^2$, Л. Эйлер дал для каждого $p = 4m + 1$ вид числа a, при котором $p \mid a^2 + 1$. Пусть $p = x^2 + y^2$, $x > y$, $m \mid n$ – предпоследняя подходящая дробь в разложении x/y в непрерывную дробь. Сумма $xm + yn$ будет равна наименьшему значению a_1, при котором $p \mid a_1^2 + 1$. Общий же вид оснований a, при которых $p \mid a^2 + 1$, будет $a = pk \pm a_1$. Доказательство легко получим из свойства двух соседних подходящих дробей.

A. J. C. Cunningham [4] дал таблицу наименьших значений a_1 и $p - a_1$ для всех $p < 100\,000$.

Для вывода формулы для $\pi(y^2 + 1, x)$ – числа простых чисел $y^2 + 1$ от $y = 1$ до $y = x$, введём следующие функции:

Пусть $\varphi(y^2 + 1,\ n)$ определяет число чисел вида $y^2 + 1$ со свойствами $(y^2 + 1, n) = 1$, $y \leqq n$. Легко доказать, что функция $\varphi(y^2 + 1, n)$ мультипликативна и что при чётном n имеет место формула

$$\varphi(y^2 + 1, n) = \tfrac{1}{2}n \prod_{\substack{p|n \\ p=4m+1}} \left(1 - \frac{2}{p}\right). \tag{16}$$

Пусть $\varphi(y^2 + 1, x, n)$ определяет число чисел $y^2 + 1$ таких, что $(y^2 + 1, n) = 1$, $y \leqq x$. Пусть простое число $p = 4m + 1$, простое $q = 4m + 3$ и пусть

$$\mu(x^2 + 1, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \mid n; \\ (-2)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k; \\ (-1)^{k+1} \,.\, 2^k, & \text{если } n = 2p_1 \dots p_k; \\ \mu(n) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко доказать, что

$$\varphi(x^2 + 1, n) = \sum_{d|n} \mu(x^2 + 1, d)\,.\,\frac{n}{d}\,. \tag{17}$$

2. Выведем для $\pi(y^2 + 1, x)$ – числа простых чисел вида $y^2 + 1$ от $y = 1$ до $y = x$, формулу типа Лежандра:

1. Из ряда оснований $1, 2, \dots, x$ чисел $y^2 + 1$ исключаем нечётные основания, так как в этом случае $y^2 + 1$ делится на 2; остается число оснований

$$\varphi(y^2 + 1, x, 2) = [x] - [(x + 1)/2]\,.$$

2. Исключаем основания чисел $y^2 + 1$, делящихся на 5, то есть, основания $y = 5k \pm a_1$, где $a_1 = 2$. Останется число оснований

$$\varphi(y^2 + 1, x, 10) = [x] - [(x + 1)/2] - [(x + 2)/5] - [(x + 3)/5] + \\ + [(x + 3)/10] + [(x + 7)/10].$$

Мы замечаем, что все члены этой формулы имеют вид $[(x + a)/d]$, где a — наименьшие основания, при которых $a^2 + 1$ делится на d; число же членов и их знаки определяются функцией $\mu(x^2 + 1, n)$. Следовательно, как и в § 1, получим:

(18) $$\varphi(y^2 + 1, x, n) = \sum_{d|n} \mu(y^2 + 1, d)\,[(x + a)/d],$$

где a имеет значения, указанные выше.

При $n = 2p_1 \dots p_k$, $p_i \leqq x$, $p_i = 4m + 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, получим:

(19) $$\pi(y^2 + 1, x) = \pi(y^2 + 1, \sqrt{(x)}) + \sum_{d|n} \mu(y^2 + 1, d)\,[(x + a)/d].$$

6. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ВИДА $x^2 + b$, $x^3 + b$

1. Простые числа по отношению делимости на них чисел вида $x^2 + b$, где $b \neq -c^2$, мы разобьём на три группы:

1. Простые делители r числа b. В этом случае существует лишь одно значение $a < r$, именно, $a = 0$, при котором $a^2 + b$ делится на r. К этой же группе отнесём и число $2 = r$, на которое делится $x^2 + b$ при любом b.

2. Простые числа q, на которые данная форма $x^2 + b$ не делится при любом x.

3. Простые числа p, на которые делится $x^2 + b$, но не делится b. В этом случае существуют 2 значения a такие, что $0 < a < p$, при которых $a^2 + b$ делится на p.

Как в § 5 мы получим точную формулу числа простых чисел вида $x^2 + b$ от $x = 1$ до $x = y$:

(20) $$\pi(x^2 + b, y) = \pi(x^2 + b, \sqrt{y}) + \sum_{d|n} \mu(x^2 + b, d)\,[(x + a)/d].$$

Здесь $n = 2r_2r_3 \dots r_m \cdot p_1p_2 \dots p_k$, где произведение распространяется на все простые числа r и p, не превышающие $\sqrt{(y^2 + b)}$, a — наименьшее основание, при котором $d \mid x^2 + b$.

Обозначим $R_0 = r_m \dots r_{m_{2k}}$, если в произведении чётное число множителей; $R_1 = r_{m_1} \dots r_{m_{2k+1}}$, если в произведении-нечётное число множителей r. Функция $\mu(x^2 + b; n)$ означает

$$\mu(x^2 + b, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } q|n; \\ (-2)^k, & \text{если } n = R_0p_1 \dots p_k; \\ (-1)^{k+1} \cdot 2^k & \text{если } n = R_1p_1 \dots p_k; \\ \mu(n) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2. Числа вида $x^3 + b$, $b \neq \pm c^3$, делятся на простое $q \neq 6m + 1$, так как сравнение $x^3 \equiv -b (\bmod q)$ имеет одно решение $a < q$. Точно также одно решение $a = 0 < q$ имеет сравнение $x^3 \equiv -b (\bmod q)$, если любое простое q делит число b.

Если же простое число $p = 6m + 1$ не делит b, то сравнение $x^3 \equiv -b (\bmod p)$ имеет 3 решения $a < p$, или не имеет ни одного решения. Простые числа, не являющиеся делителями $x^3 + b$, обозначим через r. Пусть $Q_0 = q_{m_1} \dots q_{m_{2r}}$ означает произведение чётного числа множителей q, $Q_1 = q_{m_1} \dots q_{m_{2r+1}}$ — произведение нечётного числа любых простых множителей q.

Получим число простых чисел $x^3 + b$ от $x = 1$ до $x = y$:

$$\pi(x^3 + b, y) = \pi(x^2 + b, \sqrt{y}) + \sum_{d|n} \mu(x^3 + b, d) \left[(x + a)/d\right] . \tag{22}$$

Здесь произведение $n = q_1 q_2 \dots q_m \cdot p_1 p_2 \dots p_k$ распространяется на все простые числа p и q, не превышающие $\sqrt{(x^3 + b)}$, функция $\mu(x^3 + b, n)$ означает

$$\mu(x^3 + b, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \mid n; \\ (-3)^k, & \text{если } n = Q_0 p_1 \dots p_k; \\ (-1)^{k+1} \cdot 3^k & \text{если } n = Q_1 p_1 \dots p_k; \\ \mu(n) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Литература

[1] *В. А. Голубев:* Zobecnění funkcí $\varphi(n)$ a $\pi(x)$. Časopis pro pěstování matematiky, *78*, 1953, 47–48.

[2] *V. A. Golubev*: Sur certaines functions multiplicatives et le problème des jumeaux. Mathesis, *67*, 1958, No 1, 2, 3, 11–20.

[3] *L. Euler*: De numeris primis valde magnis. Comment. arithm. coll., *1*, 356–378.

[4] *A. J. C. Cunningham*: Binomial factorisation. London 1923, vol. *1*, p. 17; vol. *4*, p. 1–11.

Výtah

PŘESNÉ FORMULE PRO POČET DVOJČAT A JINÉ ZOBECNĚNÍ FUNKCE $\pi(x)$

V. A. Golubev, Kuvšinovo, SSSR

První část práce je věnována odvození rekurentních formulí pro počet prvočíselných dvojčat $(p, p + 2)$ a jiných skupin prvočísel $(p, q, \dots, r, s)$ s předepsanými rozdíly

$q - p, \ldots, s - r$ v úsecích aritmetických posloupností. Nechť $\pi_2(x)$ je počet prvočíselných dvojčat $(p, p + 2)$, pro které $p \leqq x$, potom platí

$$\pi_2(x) = \pi_2(\sqrt{(x + 2)}) + \sum_{d|n} \mu_2(d) \left[\frac{x + a}{d}\right],$$

přičemž je:

$$\mu_2(n) = \begin{cases} (-2)^k, \text{ jestliže } n = p_1 p_2 \ldots p_k \text{ (různá prvočísla)}, \ p_i > 2 \ (i = 1, 2, \ldots, k); \\ (-1)^{k+1} . 2^k, \text{ jestliže } n = 2p_1 \ldots p_k \ (p_i > 2); \\ \mu(n) \text{ (Möbiusova funkce) v ostatních případech.} \end{cases}$$

Čísla a závisí na d a dají se určit (rekurentně) pomocí jistých systémů kongruencí. Dále se ukazuje zobecnění této formule pro jiné skupiny prvočísel.

V druhé části práce se vyšetřuje rozdělení prvočísel tvaru $x^2 + d$ a $x^3 + d$ a pro ně se odvozují rekurentní formule analogické známé Legendrově formuli pro prvočísla.

Résumé

FORMULES EXACTES POUR LE NOMBRE D'ENTIERS PREMIERS JUMEAUX ET D'AUTRES GÉNÉRALISATIONS DE LA FONCTION $\pi(x)$

V. A. Golubev, Kuvšinovo (URSS)

La première partie du travail a pour but d'établir des formules récurrentes pour le nombre d'entiers premiers jumeaux $(p, p + 2)$ ainsi que d'autres groupes de nombres premiers $(p, q, \ldots, r, s)$, les différences $q - p, \ldots, s - r$ étant données, dans des segments de progressions arithmétiques. Soit $\pi_2(x)$ le nombre de jumeaux $(p, p + 2)$, pour lesquelles $p \leqq x$; on a alors

$$\pi_2(x) = \pi_2(\sqrt{(x + 2)}) + \sum_{d|n} \mu_2(d) \left[\frac{x + a}{d}\right],$$

où

$$\mu_2(n) = \begin{cases} (-2)^k, \text{ lorsque } n = p_1 p_2 \ldots p_k, \ p_i \neq p_j \text{ premiers}, \ p_i > 2 \ (i, j = 1, 2, \ldots, k; \\ \qquad i \neq j), \\ (-1)^{k+1} \, 2^k, \text{ lorsque } n = 2p_1 \ldots p_k, \ p_i > 2, \\ \mu(n), \text{ la fonction de Möbius, dans les autres cas.} \end{cases}$$

Les nombres a dépendent de d; on peut les déterminer (par récurrence), à l'aide de certains systèmes de congruences. Ensuite, on donne une généralisation de cette formule pour d'autres groupes de nombres premiers.

Dans la seconde partie du travail, on examine la distribution des nombres premiers de la forme $x^2 + d$ et $x^3 + d$, et l'on déduit pour eux des formules récurrentes analogues à la formule bien connue de Legendre pour les nombres premiers.