Časopis pro pěstování matematiky

Václav Doležal

O jistých lineárních operátorech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 2, 198--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117427

O JISTÝCH LINEÁRNÍCH OPERÁTORECH

VÁCLAV DOLEŽAL, Praha

(Došlo 6. února 1961)

Práce je věnována vyšetření vlastností jisté třídy lineárních operátorů; těchto operátorů je možno s výhodou užít k řešení otázek dynamiky lineárních fysikálních soustav s proměnnými prvky. Zde uvedené výsledky představují zobecnění výsledků práce [2].

Buď $n \geqq 0$ celé číslo; buď $\mathbf{D}_n$ systém všech distribucí těchto vlastností: je-li $f \in \mathbf{D}_n$, pak existuje na $(-\infty, \infty)$ reálná lokálně integrovatelná funkce $F(t)$, skoro všude rovná nule na $(-\infty, 0)$ tak, že je $f = F^{(n)}$, tj.

$$(f, \varphi) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, \varphi^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad \varphi(t) \in \mathbf{K}\,. \tag{1}$$

($\mathbf{K}$ značí systém všech reálných neomezeně derivovatelných finitních funkcí, srv. [1].)

Z vyslovené definice plyne, že platí:

a) *Ke každé $f \in \mathbf{D}_n$ je $F(t)$ určena jednoznačně až na množinu míry nula.*

b) $f \in \mathbf{D}_n \Rightarrow f = 0$ *na* $(-\infty, 0)$.

c) $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \ldots$

Buď $f \in \mathbf{D}_n$, $k \geqq 1$ celé, a nechť $f = F^{(n)}$. (Zde i v dalším rozumíme pod F onu funkci, o které se hovoří v definici systému $\mathbf{D}_n$.) Je-li $1 \leqq k \leqq n$, kladme $f^{(-k)} = F^{(n-k)}$, je-li $k > n$ buď $f^{(-k)} = F^{(n-k)}$, kde

$$F^{(n-k)}(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-n-1}}{(k-n-1)!} F(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Distribuci $f^{(-k)}$ budeme též nazývat k-tou primitivní distribucí k f. Zřejmě platí tvrzení

a) *Je-li* $f \in \mathbf{D}_n$, $k \geqq 1$, *pak* $f^{(-k)} \in \mathbf{D}_{\max[n-k, 0]}$.

b) *Pro libovolná celá čísla m, k a $f \in \mathbf{D}_n$ platí*

$$(f^{(m)})^{(k)} = f^{(m+k)}\,.$$

(Symbolem $f^{(k)}$, $k \geqq 0$ rozumíme k-tou derivaci f.)

Buď $n \geqq 0$; označme $\mathbf{F}_n$ systém všech reálných funkcí, které mají v $\langle 0, \infty)$ spojitou n-tou derivaci. Zřejmě platí $\mathbf{F}_0 \supset \mathbf{F}_1 \supset \mathbf{F}_2 \supset \ldots$.

Nechť nyní $f \in \mathbf{D}_n$, $a \in \mathbf{F}_n$, $n \geqq 0$; součin af definujme rovnicí

$$af = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (a^{(i)}F)^{(n-i)}, \quad f = F^{(n)}. \tag{2}$$

Zřejmě platí $af \in \mathbf{D}_n$. Dále se snadno přesvědčíme, že součin af je rovnicí (2) definován jednoznačně, tj. je-li $n \geqq 1$, $f \in \mathbf{D}_{n-1}$, $a \in \mathbf{F}_n$, a utvoříme-li af podle (2) pro $n - 1$, dostaneme totéž, utvoříme-li af pro n.

Z definice dále plyne, že součin af je bilineární v a i f.

Dále platí tato věta:

Věta 1. *Buď $f \in \mathbf{D}_n$, $f = F^{(n)}$, $a \in \mathbf{F}_n$; pak platí*

$$(af, \varphi) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(a(t)\,\varphi(t))^{(n)}\, dt, \quad \varphi \in \mathbf{K}. \tag{3}$$

Důkaz. Podle definice je

$$(af, \varphi) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (a^{(k)}F)^{(n-k)}, \varphi\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (a^{(k)}F, (-1)^{n-k}\varphi^{(n-k)}) =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} a^{(k)}(t)\, F(t)\, \varphi^{(n-k)}(t)\, dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, (a(t)\, \varphi(t))^{(n)}\, dt, \quad \text{c. b. d.}$$

Pro další bude užitečné následující

Lemma 1. *Je-li $a \in \mathbf{F}_{n+1}$, $f \in \mathbf{D}_n$, pak je $(af)' = a'f + af'$.* (Důkaz plyne bezprostředně z rov. (2).) Dále platí

Lemma 2. *Je-li $a, b \in \mathbf{F}_n$, $f \in \mathbf{D}_n$, pak platí*

$$a(bf) = (ab)f. \tag{4}$$

Důkaz. Buďte $a, b \in \mathbf{F}_n$ pevné. Rovnost (4) zřejmě platí pro každé $f \in \mathbf{D}_0$; nechť tedy platí i pro každé $f \in \mathbf{D}_{k-1}$, $0 \leqq k - 1 < n$. Zvolme $x \in \mathbf{D}_k$ a buď $y = x^{(-1)} \in \mathbf{D}_{k-1}$. Podle lemmatu 1 pak platí

$$\begin{aligned} a(bx) &= a((by)' - b'y) = a(by)' - (ab')\, y = (a(by))' - a'(by) - (ab')\, y = \\ &= ((ab)\, y)' - (a'b)\, y - (ab')\, y = ((ab)\, y)' - (ab)'\, y = \\ &= (ab)\, y' = (ab)\, x, \quad \text{c. b. d.} \end{aligned}$$

Dále platí

Věta 2. *Buď $x \in \mathbf{D}_n$, $a \in \mathbf{F}_{n+m}$, $0 \leqq k \leqq m$; pak platí*

$$ax^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (a^{(i)}x)^{(k-i)}. \tag{5}$$

Důkaz. Čísla n, m zafixujme; rovnice (5) zřejmě platí pro každé $x \in \mathbf{D}_0$ a každé k, splňující nerovnost $0 \leqq k \leqq m$. (To je definice součinu.) Nechť tedy (5) platí i pro každé $y \in \mathbf{D}_{l-1}, 0 \leqq l - 1 < n$; zvolme $x \in \mathbf{D}_l$ a buď $y = x^{(-1)} \in \mathbf{D}_{l-1}$. Podle lemmatu 1 platí

$$(ay^{(k)})' = a'y^{(k)} + ay^{(k+1)},$$

a tedy

$$ax^{(k)} = (ay^{(k)})' - a'y^{(k)} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} (a^{(i)}y)^{(k-i+1)} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} (a^{(i+1)}y)^{(k-i)}.$$

Avšak $(a^{(r)}y)^{(k-r+1)} - (a^{(r+1)}y)^{(k-r)} = (a^{(r)}y')^{(k-r)}$, čímž je věta dokázána.

Dále zavedeme jistý součin distribuce a funkce dvou proměnných. K tomu cíli zaveďme následující označení:

Buď $\mathbf{W}_n$, $n \geqq 0$, systém všech reálných funkcí $W(t, \tau)$, definovaných v oboru $t \geqq \tau \geqq 0$, které mají tyto vlastnosti: je-li $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$, pak $W(t, \tau)$ má pro $t \geqq \tau \geqq 0$ spojitou derivaci $\dfrac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial \tau^n}$ a je $\left(\dfrac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* \in \mathbf{F}_{n-i-1}$ pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$; přitom symbol H^* značí funkci $H(t, t)$. Očividně platí $\mathbf{W}_0 \supset \mathbf{W}_1 \supset \mathbf{W}_2 \supset \ldots$.

Buď dále $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$, $n \geqq 1$; řekneme, že $W(t, \tau)$ má hodnost q, je-li $1 \leqq q \leqq n$ a platí-li

$$(6) \quad \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* \equiv 0 \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, q-2; \quad \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial \tau^{q-1}}\right)^* \neq 0 \ \text{v} \ \langle 0, \infty).$$

Zamýšlený součin zavedeme takto: Buď $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$, $x \in \mathbf{D}_n$; pak buď

$$(7) \quad [Wx] = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* X^{(n-i-1)} + (-1)^n \int_0^t \frac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial \tau^n} X(\tau)\, d\tau, \quad x = X^{(n)}.$$

Zřejmě definice má smysl, neboť $\left(\dfrac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* \in \mathbf{F}_{n-i-1}$ a $X^{(n-i-1)} \in \mathbf{D}_{n-i-1}$, takže všechny napsané výrazy jsou definovány. Z rovnice (7) vyplývá, že $[Wx] \in \mathbf{D}_{\max[n-1, 0]}$, a má-li $W(t, \tau)$ hodnost q, je $[Wx] \in \mathbf{D}_{n-q}$.

Dále snadno nahlédneme, že součin $[Wx]$ nezávisí na řádu prostoru $\mathbf{D}_p$, do kterého x patří (pokud ovšem $p \leqq n$). Vskutku, je-li $x = X^{(n-1)} \in \mathbf{D}_{n-1}$, $n \geqq 1$, je zároveň $x = (X^{(-1)})^{(n)} \in \mathbf{D}_n$. Podle (7) pak je

$$[Wx] = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* X^{(n-i-2)} + (-1)^n \int_0^t \frac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial \tau^n} X^{(-1)}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* X^{(n-i-2)} + (-1)^{n-1} \int_0^t \frac{\partial^{n-1} W(t, \tau)}{\partial \tau^{n-1}} X(\tau)\, d\tau,$$

což však je výraz pro $[Wx]$, utvořený nad prostorem $\mathbf{D}_{n-1}$.

Všimněme si zároveň, že zavedený součin $[Wx]$ je zobecněním integrálu $\int_0^t W(t, \tau) \,.\, x(\tau)\, d\tau$, neboť pro $n = 0$ je $[Wx]$ tomuto integrálu roven.

Z rovnice (7) je dále ihned zřejmé, že součin $[Wx]$ je bilineární ve W a x.

Pro příslušný funkcionál $([Wx], \varphi)$ platí:

Věta 2a. *Buď $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$, $x \in \mathbf{D}_n$, $x = X^{(n)}$; pak pro každou $\varphi(t) \in \mathbf{K}$ platí*

$$(*) \qquad ([Wx], \varphi) = (-1)^n \int_0^\infty X(t) \left\{ \int_t^\infty W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau \right\}^{(n)} dt\,.$$

Důkaz. Předně je zřejmé, že derivace $\{\ldots\}^{(n)}$ je spojitou funkcí t, která je identicky rovna nule počínajíc některým t_0 (závisícím od $\varphi(t)$). Přitom platí

$$\left\{ \int_t^\infty W(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau \right\}^{(n)} = - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{\partial^i W(t, \tau)}{\partial \tau^i} \right)^* \varphi \right)^{(n-i-1)} + \int_t^\infty \frac{\partial^n W(\tau, t)}{\partial t^n}\, \varphi(\tau)\, d\tau\,.$$

Pro pravou stranu (H, φ) rov. $(*)$ tedy je

$$(H, \varphi) = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} h_i + (-1)^n \int_{-\infty}^\infty X(t) \int_t^\infty \frac{\partial^n W(\tau, t)}{\partial t^n}\, \varphi(\tau)\, d\tau\,,$$

kde

$$h_i = \int_{-\infty}^\infty X(t) \left(\left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i} \right)^* \varphi \right)^{(n-i-1)} dt\,.$$

Podle věty 1 však je $h_i = \left((-1)^{n-i-1} \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i} \right)^* X^{(n-i-1)}, \varphi \right)$. Podle Fubiniovy věty dále platí

$$\int_{-\infty}^\infty X(t) \left(\int_t^\infty \frac{\partial^n W(\tau, t)}{\partial t^n}\, \varphi(\tau)\, d\tau \right) dt = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\tau \frac{\partial^n W(\tau, t)}{\partial t^n}\, X(t)\, dt \right) \varphi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \left(\int_0^t \frac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial \tau^n}\, X(\tau)\, d\tau, \varphi \right).$$

Platí tedy

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i} \right)^* X^{(n-i-1)} + (-1)^n \int_0^t \frac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial \tau^n}\, X(\tau)\, d\tau = [Wx]\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Triviální je následující

Věta 3. *Buď $n, k \geqq 0$, $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_{n+k}$, $x \in \mathbf{D}_n$; pak pro každé celé r, splňující nerovnost $1 \leqq r \leqq k$, platí*

$$(8) \qquad [Wx^{(r)}] = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i} \right)^* x^{(r-i-1)} + (-1)^r \left[\frac{\partial^r W}{\partial \tau^r}\, x \right].$$

(Důkaz plyne bezprostředně z rovnice (7), uvážíme-li, že $x^{(r)} = X^{(n+r)}$.)

Dále platí

Věta 4. *Buď $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$ a nechť $[Wx] \in \mathbf{D}_p$ pro každé $x \in \mathbf{D}_n$; buď dále $\alpha(t) \in \mathbf{F}_p$; potom $\alpha W = \alpha(t)\, W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$ a pro každé $x \in \mathbf{D}_n$ platí*

$$(9) \qquad \alpha[Wx] = [(\alpha W)\, x]\,.$$

Nadto platí: Je-li $n \geqq 1$ a má-li $W(t, \tau)$ hodnost q, přičemž $\alpha(t) \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$, pak $\alpha(t)\, W(t, \tau)$ má rovněž hodnost q.

Důkaz. Pro $n = 0$ je tvrzení věty triviální. Buď tedy $n \geqq 1$; bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $0 \leqq p \leqq n - 1$. Z předpokladu $[Wx] \in \mathbf{D}_p$ pro každé $x \in \mathbf{D}_n$ plyne (srv. s rovnicí (7)), že platí $\left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* \equiv 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, n - p - 2$. Pro $k = 1, 2, \ldots, n$ platí $\frac{\partial^k(\alpha W)}{\partial \tau^k} = \alpha \frac{\partial^k W}{\partial \tau^k}$, a tedy αW má spojitou n-tou derivaci podle τ. Dále odtud plyne, že $a_k = \left(\frac{\partial^k(\alpha W)}{\partial \tau^k}\right)^* \equiv 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, n - p - 2$, a $a_k = \alpha \left(\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k}\right)^*$ pro $k = n - p - 1, \ldots, n - 1$. Je tedy $a_k \in \mathbf{F}_{n-k-1}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, takže platí $\alpha W \in \mathbf{W}_n$. Podle rovnice (7) máme pak pomocí lemmatu 2 pro $x \in \mathbf{D}_n$:

$$[(\alpha W) x] = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i(\alpha W)}{\partial \tau^i}\right)^* X^{(n-i-1)} + (-1)^n \int_0^t \frac{\partial^n(\alpha W)}{\partial \tau^n} X \, d\tau = \alpha[Wx],$$

c. b. d.

Druhé tvrzení věty se dokáže zcela stejně.

Obdobná je

Věta 5. *Buď $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$, $\alpha(t) \in \mathbf{F}_n$, $x \in \mathbf{D}_n$; pak platí*

$$[W(\alpha x)] = [(W\alpha_\tau) x], \tag{10}$$

kde $W\alpha_\tau = W(t, \tau) \alpha(\tau)$. Nadto platí: Je-li $\alpha(t) \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$, $n \geqq 1$, a má-li $W(t, \tau)$ hodnost q, má i $W\alpha_\tau$ hodnost q.

Důkaz. Buďte W, α pevné; předně je zřejmé, že $W\alpha_\tau \in \mathbf{W}_n$. Očividně (10) platí pro každé $x \in \mathbf{D}_0$; předpokládejme, že rovnost (10) platí pro každé $y \in \mathbf{D}_{k-1}$, $\tilde{W} \in \mathbf{W}_{k-1}$, $\tilde{\alpha} \in \mathbf{F}_{k-1}$, kde $0 \leqq k - 1 < n$. Zvolme $x \in \mathbf{D}_k$ a buď $y = x^{(-1)} \in \mathbf{D}_{k-1}$. Podle lemmatu 1 pak platí

$$[W(\alpha x)] = [W(\alpha y')] = [W((\alpha y)' - \alpha' y)] = [W(\alpha y)'] - [W(\alpha' y)] =$$
$$= W^*(\alpha y) - \left[\frac{\partial W}{\partial \tau} (\alpha y)\right] - [(W\alpha'_\tau) y] = (W^*\alpha) y - \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \tau} \alpha_\tau + W\alpha'_\tau\right) y\right] =$$
$$= (W^*\alpha) y - \left[\frac{\partial(W\alpha_\tau)}{\partial \tau} y\right] = [(W\alpha_\tau) y'] = [(W\alpha_\tau) x], \quad \text{c. b. d.}$$

Poslední tvrzení věty je zřejmé.

Zaveďme nyní následující označení: Je-li $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \mathbf{W}_0$, buď

$$(W_1 \times W_2)(t, \tau) = \int_\tau^t W_1(t, z) \, W_2(z, \tau) \, dz \, ; \quad t \geqq \tau \geqq 0 \, . \tag{11}$$

Snadno se lze přesvědčit, že systém $\mathbf{W}_0$ je vzhledem k obyčejnému sčítání a zavedenému součinu (11) nekomutativním okruhem.

Nyní platí následující věta:

Věta 6. *Buď* $W_2 \in \mathbf{W}_n$ *a nechť pro každé* $x \in \mathbf{D}_n$ *je* $[W_2 x] \in \mathbf{D}_p$; *buď dále* $W_1 \in \mathbf{W}_p$; *pak pro každé* $x \in \mathbf{D}_n$ *platí*

$$(11) \qquad [W_1[W_2 x]] = [(W_1 \times W_2)\, x]\,.$$

Dále platí

a) *Je-li* $n \geqq 1$ *a má-li* W_2 *hodnost* q_2, *pak je* $\left(\dfrac{\partial^i(W_1 \times W_2)}{\partial \tau^i}\right)^* \equiv 0$ *pro* $i = 0, 1, \ldots, q_2 - 1$.

b) *Je-li* $n, p \geqq 1$ *a mají-li* W_1, W_2 *hodnosti* q_1, *resp.* q_2, *pak* $W_1 \times W_2$ *má hodnost* $q_1 + q_2$.

Důkaz. Pro $n = 0$ je tvrzení věty triviální, jde v podstatě o Fubiniovu větu. Buď tedy $n \geqq 1$. Ježto $[W_2 x] \in \mathbf{D}_p$ pro každé $x \in \mathbf{D}_n$, značí to (srv. (7)), že $\left(\dfrac{\partial^i W_2}{\partial \tau^i}\right)^* \equiv 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, n - p - 2$. (Bez újmy obecnosti můžeme opět předpokládat, že $0 \leqq p \leqq n - 1$.) Odtud předně vyplývá, že $W_1 \times W_2 \in \mathbf{W}_n$. Dále je lehko vidět, že pro každé $y \in \mathbf{D}_{n-1}$ je splněna rovnost

$$(12) \qquad [W_1(W_2^* y)] = [(W_1 W_2^{*\tau})\, y]\,.$$

Vskutku, v každém případě je $W_2^* \in \mathbf{F}_{n-1}$; je-li $W_2^* \not\equiv 0$, pak je $p = n - 1$, a tedy podle věty 5 rovnost (12) platí; je-li $W_2^* \equiv 0$, pak (12) platí rovněž.

V dalším buďte funkce W_1, W_2 pevné. Předpokládejme, že rovnost (11) platí pro každé $k - 1$ splňující nerovnost $0 \leqq k - 1 < n$, tj. že: je-li $\tilde{W}_2 \in \mathbf{W}_{k-1}$ a $[\tilde{W}_2 y] \in \mathbf{D}_m$ pro každé $y \in \mathbf{D}_{k-1}$, pak pro každé $\tilde{W}_1 \in \mathbf{W}_m$, $y \in \mathbf{D}_{k-1}$ platí $[\tilde{W}_1[\tilde{W}_2 y]] = [(\tilde{W}_1 \times \tilde{W}_2)\, y]$. Všimněme si zároveň, že ježto $W_2 \in \mathbf{W}_n$, je $\dfrac{\partial W_2}{\partial \tau} \in \mathbf{W}_{n-1}$ a tedy též $\dfrac{\partial W_2}{\partial \tau} \in \mathbf{W}_{k-1}$. Zvolme $x \in \mathbf{D}_k$ a buď $y = x^{(-1)} \in \mathbf{D}_{k-1}$; podle indukčního předpokladu a věty 3 pak platí:

$$[W_1[W_2 x]] = \left[W_1\left(W_2^* y - \left[\frac{\partial W_2}{\partial \tau}\, y\right]\right)\right] = [W_1(W_2^* y)] - \left[W_1\left[\frac{\partial W_2}{\partial \tau}\, y\right]\right] =$$

$$= [(W_1 W_2^{*\tau})\, y] - \left[\left(W_1 \times \frac{\partial W_2}{\partial \tau}\right) y\right] = \left[\left(W_1 W_2^{*\tau} - W_1 \times \frac{\partial W_2}{\partial \tau}\right) y\right] =$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(W_1 \times W_2)\right) y\right].$$

Na druhé straně opět podle věty 3 platí

$$[(W_1 \times W_2)\, x] = (W_1 \times W_2)^*\, y - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(W_1 \times W_2)\right) y\right],$$

a ježto $(W_1 \times W_2)^* \equiv 0$, je tím první tvrzení věty dokázáno.

Nechť nyní $n \geqq 1$ a W_2 má hodnost q_2; z předpokladu věty plyne, že pak je $W_1 \in \in \mathbf{W}_{n-q_2}$. Podle definice je

$$H = W_1 \times W_2 = \int_\tau^t W_1(t, z)\, W_2(z, \tau)\, dz\,. \tag{13}$$

Derivováním (13) dostaneme

$$\frac{\partial^m H}{\partial \tau^m} = \int_\tau^t W_1(t, z) \frac{\partial^m W_2(z, \tau)}{\partial \tau^m}\, dz \quad \text{pro} \quad m = 1, 2, \ldots, q_2 - 1\,, \tag{14}$$

a tedy pro tato m je $\left(\frac{\partial^m H}{\partial \tau^m}\right)^* = 0$, čímž je dokázáno tvrzení a). Je-li nyní i $n - q_2 \geqq 1$ a má-li W_1 hodnost q_1, platí předně $1 \leqq q_1 \leqq n - q_2$, tj. $q_1 + q_2 \leqq n$. Ze (14) plyne

$$\frac{\partial^{q_2} H}{\partial \tau^{q_2}} = - W_1(t, \tau) \left(\frac{\partial^{q_2 - 1} W_2}{\partial \tau^{q_2 - 1}}\right)^{*\tau} + \int_\tau^t W_1(t, z) \frac{\partial^{q_2} W_2(z, \tau)}{\partial \tau^{q_2}}\, dz\,. \tag{15}$$

Odtud dále je pro $0 \leqq k \leqq n - q_2$:

$$\frac{\partial^{q_2+k} H}{\partial \tau^{q_2+k}} = - \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left\{ W_1 \left(\frac{\partial^{q_2-1} W_2}{\partial \tau^{q_2-1}}\right)^{*\tau} \right\} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} \left\{ W_1 \left(\frac{\partial^{q_2+k-i-1} W_2}{\partial \tau^{q_2+k-i-1}}\right)^{*\tau} \right\} + \tag{16}$$
$$+ \int_\tau^t W_1(t, z) \frac{\partial^{q_2+k} W_2(z, \tau)}{\partial \tau^{q_2+k}}\, dz\,.$$

Z (16) plyne, že je $\left(\frac{\partial^{q_2+k} H}{\partial \tau^{q_2+k}}\right)^* = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, q_1 - 2$, a

$$\left(\frac{\partial^{q_1+q_2-1} H}{\partial \tau^{q_1+q_2-1}}\right)^* = - \left(\frac{\partial^{q_1-1} W_1}{\partial \tau^{q_1-1}}\right)^* . \left(\frac{\partial^{q_2-1} W_2}{\partial \tau^{q_2-1}}\right)^* \neq 0 \text{ v } \langle 0, \infty)\,;$$

má tedy H hodnost $q_1 + q_2$ a tvrzení b) je dokázáno.

Definujme nyní funkce $U_k(t, \tau)$ předpisem

$$U_k(t, \tau) = (t - \tau)^{k-1}/(k-1)!\,; \quad k = 2, 3, \ldots\,; \quad U_1(t, \tau) \equiv 1\,. \tag{17}$$

Pak platí

Lemma 3. *Je-li* $k \geqq 1$, $f \in \mathbf{D}_n$, *pak* $f^{(-k)} = [U_k f]$.

Důkaz. Buď nejprve $1 \leqq k \leqq n$; ježto platí $\frac{\partial^i U_k}{\partial \tau^i} = (-1)^i U_{k-i}$ pro $i = 0, 1, \ldots, k - 1$, $\frac{\partial^i U_k}{\partial \tau^i} = 0$ pro $i \geqq k$, máme podle (7)

$$[U_k f] = [U_k F^{(n)}] = (-1)^{k-1} . (-1)^{k-1}\, U_1^* F^{(n-k)} = f^{(-k)}\,.$$

Je-li $k \geqq n + 1$, máme

$$[U_k f] = (-1)^n \int_0^t \frac{\partial^n U_k}{\partial \tau^n} F\, d\tau = (-1)^n \int_0^t (-1)^n\, U_{k-n} F\, d\tau = F^{(n-k)} = f^{(-k)}\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Dále budou potřebná následující tvrzení:

Lemma 4. *Buď $U \in \mathbf{W}_r$, $p \geqq 1$ celé; pak platí $U \times U_p \in \mathbf{W}_{r+p}$. Je-li nadto $r \geqq 1$ a má-li U hodnost h, pak $U \times U_p$ má hodnost $h + p$.*

Lemma 5. *Buď $U \in \mathbf{W}_r$, $p \geqq 1$ celé; pak platí $U_p \times U \in \mathbf{W}_r$. Nadto platí: Je-li $r \geqq 1$ a má-li U hodnost h, pak*

1. *je-li $p + h \leqq r$, má $U_p \times U$ hodnost $p + h$,*

2. *je-li $p + h > r$, je $\left(\frac{\partial^i}{\partial \tau^i}(U_p \times U)\right)^* = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, r - 1$.*

Důkaz lemmatu 4. Buď $H = U \times U_p$. Zřejmě pak platí

$$\frac{\partial^k H}{\partial \tau^k} = (-1)^k \int_\tau^t U(t, z)\, U_{p-k}(z, \tau)\, \mathrm{d}z \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, p - 1\,,$$

$$\frac{\partial^p H}{\partial \tau^p} = (-1)^p\, U(t, \tau)$$

odkud již plynou tvrzení.

Důkaz lemmatu 5. Označme $Q = U_p \times U$. Zřejmě je $Q \in \mathbf{W}_r$. Buď nejprve $p + h \leqq r$, kde h je hodnost U. Pak platí $\left(\frac{\partial^k Q}{\partial \tau^k}\right)^* = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, h - 1$. Dále je

$$\frac{\partial^h Q}{\partial \tau^h} = -\, U_p(t, \tau)\, a(\tau) + \int_\tau^t U_p(t, z) \frac{\partial^h U(z, \tau)}{\partial \tau^h}\, \mathrm{d}z\,; \quad \left(\frac{\partial^h Q}{\partial \tau^h}\right)^* = -\, U_p^* a\,,$$

kde $a = \left(\frac{\partial^{h-1} U}{\partial \tau^{h-1}}\right)^*$, a tedy platí $a \in \mathbf{F}_{r-h}$. Konečně pro $1 \leqq k - 1 \leqq p - 1$ platí

$$\frac{\partial^{h+k-1} Q}{\partial \tau^{h+k-1}} = -\, \frac{\partial^{k-1}}{\partial \tau^{k-1}} (U_p(t, \tau)\, a(\tau)) - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} \left(U_p(t, \tau) \left(\frac{\partial^{h+k-2-i} U}{\partial \tau^{h+k-2-i}}\right)^{*\tau} \right) +$$
$$+ \int_\tau^t U_p(t, z) \frac{\partial^{h+k-1} U(z, \tau)}{\partial \tau^{h+k-1}}\, \mathrm{d}z\,.$$

Odtud plyne, že $\left(\frac{\partial^{h+k-1} Q}{\partial \tau^{h+k-1}}\right)^* = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, p - 1$ a $\left(\frac{\partial^{h+p-1} Q}{\partial \tau^{h+p-1}}\right)^* = (-1)^p\,.$ $.\, a(t)$, takže Q má hodnost $h + p$. Je-li naopak $p + h > r$, plyne z předešlých rovnic tvrzení 2.

Dále platí

Věta 7. *Buďte $n, k \geqq 0$ celá čísla, $W \in \mathbf{W}_{n+k}$; pak existuje $\overline{W} \in \mathbf{W}_n$ tak, že pro každé $x \in \mathbf{D}_n$ platí*

$$[W x^{(k)}] = [\overline{W} x]^{(k)}\,. \tag{18}$$

Důkaz. Je-li $k = 0$, je tvrzení zřejmé; buď tedy $k \geqq 1$. Podle věty 3 platí

$$[Wx^{(k)}] = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* x^{(k-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} x\right], \tag{19}$$

přičemž je $\left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* \in \mathbf{F}_{n+k-i-1}$. Podle věty 2 však lze (19) psát ve tvaru

$$[Wx^{(k)}] = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{k-i-1}x)^{(k-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} x\right],$$

kde $a_l \in \mathbf{F}_{n+l}$. Podle lemmatu 3 a věty 5 pak je

$$[Wx^{(k)}] = \left\{\sum_{i=0}^{k-1} (a_{k-i-1}x)^{(-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} x\right]^{(-k)}\right\}^{(k)} = [\overline{W}x]^{(k)},$$

kde

$$\overline{W}(t, \tau) = \sum_{i=0}^{k-1} U_{i+1}(t, \tau)\, a_{k-i-1}(\tau) + (-1)^k \left(U_k \times \frac{\partial^k W}{\partial \tau^k}\right)(t, \tau);$$

očividně platí $\overline{W} \in \mathbf{W}_n$, čímž je věta dokázána.

Má-li $W(t, \tau)$ hodnost, lze tvrdit více; platí

Věta 8. *Buďte $n \geqq 1$, $k \geqq 0$ celá čísla, $W \in \mathbf{W}_{n+k}$, a nechť W má hodnost q; pak existuje $\overline{W} \in \mathbf{W}_n$ a celé číslo $r \geqq 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathbf{D}_n$ platí*

$$[Wx^{(k)}] = [\overline{W}x]^{(r)}, \tag{20}$$

přičemž $\overline{W}$ má hodnost $\overline{q} = r + q - k$.

Důkaz. Je-li $k = 0$, je tvrzení triviální. Buď tedy $k \geqq 1$. Podle věty 3 platí (19). Rozlišme dva případy:

1) $q \leqq k$, 2) $q > k$.

V případě 1 máme

$$[Wx^{(k)}] = \sum_{i=q-1}^{k-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i W}{\partial \tau^i}\right)^* x^{(k-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} x\right]. \tag{21}$$

Podle věty 2 lze psát

$$[Wx^{(k)}] = \sum_{i=q-1}^{k-1} (a_{k-i-1}x)^{(k-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} x\right], \tag{22}$$

kde $a_l \in \mathbf{F}_{n+l}$, $a_{k-q} = (-1)^{q-1} \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial \tau^{q-1}}\right)^* \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$. Podle lemmatu 3 a věty 5 máme z (22) konečně $[Wx^{(k)}] = [\overline{W}x]^{(k-q+1)}$, kde

$$\overline{W}(t, \tau) = \sum_{i=0}^{k-q} U_{i+1}(t, \tau)\, a_{k-q-i}(\tau) + (-1)^k \left(U_{k-q+1} \times \frac{\partial^k W}{\partial \tau^k}\right)(t, \tau).$$

Očividně $\overline{W}(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$; dále zřejmě je $\overline{W}^* = a_{k-q}$, a tedy $\overline{W}$ má hodnost 1. Přitom je $1 = k - q + 1 + q - k$ a věta tedy platí.

V případě 2 máme

$$[Wx^{(k)}] = (-1)^k \left[\frac{\partial^k W}{\partial \tau^k}\, x\right], \quad \text{přičemž} \quad \frac{\partial^k W}{\partial \tau^k} \in \mathbf{W}_n$$

a má hodnost $q - k = 0 + q - k$, čímž je věta dokázána.

Podobná je následující věta:

Věta 9. *Buď $k \geqq 1$ celé, $W \in \mathbf{W}_k$ mějž hodnost q; pak existuje $a \in \mathbf{F}_0$ a $\tilde{W} \in \mathbf{W}_0$ tak, že pro všechna $x \in \mathbf{D}_0$ platí*

$$(23) \qquad [Wx^{(k)}] = (ax + [\tilde{W}x])^{(k-q)},$$

přičemž $a \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$. (Důkaz je zcela obdobný důkazu věty 8.)

Konečně bude potřebné

Lemma 5a. *Buď $W \in \mathbf{W}_n$ a nechť $[Wx] = 0$ pro každé $x \in \mathbf{D}_n$; pak platí $W(t, \tau) \equiv 0$ pro $t \geqq \tau \geqq 0$.*

Důkaz. Pro každé $T \geqq 0$ zřejmě je $Q_T \in \mathbf{D}_n$, $Q_T(t) = 1$ pro $t \in (0, T)$, $Q_T(t) = 0$ vně $(0, T)$; ježto zároveň $Q_T \in \mathbf{D}_0$, plyne z vlastností součinu $[Wx]$, že $[WQ_T] = \int_0^t W(t, \tau)\, Q_T(\tau)\, d\tau = 0$. Pro $t \geqq T$ tedy platí $\int_0^T W(t, \tau)\, d\tau = 0$ a odtud plyne tvrzení.

Přistupme nyní k zavedení zamýšlených tříd operátorů.

Buď $n \geqq 0$ celé; buď $\mathfrak{A}_n$ systém všech operátorů, definovaných na $\mathbf{D}_n$, které mají tyto vlastnosti: Ke každému $A \in \mathfrak{A}_n$ existuje celé číslo $k \geqq 0$ a funkce $W \in \mathbf{W}_n$ tak, že pro každé $x \in \mathbf{D}_n$ je

$$(24) \qquad Ax = [Wx]^{(k)}.$$

Symbolem $A\mathbf{D}_n$ označíme množinu všech obrazů Ax, $x \in \mathbf{D}_n$; zřejmě $A\mathbf{D}_n$ je částí některého prostoru $\mathbf{D}_p$. Representace (24) není jednoznačná (platí též např. $Ax = [(U_1 \times W)\, x]^{(k+1)}$); je-li však k zafixováno, je v důsledku platnosti lemmatu 5a funkce W určena pro $t \geqq \tau \geqq 0$ jednoznačně.

Násobek operátoru číslem, součet operátorů a jejich součin zavedeme obvyklým způsobem. Pak možno vyslovit věty:

Věta 10. *Buďte $A, B \in \mathfrak{A}_n$; pak platí $A + B \in \mathfrak{A}_n$.*

Věta 11. *Buď $B \in \mathfrak{A}_n$; pak existuje celé $p \geqq 0$ tak, že pro každé $A \in \mathfrak{A}_p$ platí $AB \in \mathfrak{A}_n$.*

Důkaz věty 10. Buď tedy $Ax = [W_1 x]^{(k)}$, $Bx = [W_2 x]^{(l)}$; je-li $k = l$, je důkaz zřejmý. Buď tedy $k > l$. Pak je

$$(A + B)\, x = ([W_1 x] + [W_2 x]^{(l-k)})^{(k)} = [(W_1 + U_{k-l} \times W_2)\, x]^{(k)}, \quad \text{c. b. d.}$$

Důkaz věty 11. Buď $Bx = [W_2 x]^{(m)}$, $x \in \mathbf{D}_n$; ze (7) je lehko vidět, že $[W_2 x] \in \mathbf{D}_{n-1}$ pro každé $x \in \mathbf{D}_n$; položíme-li $p = m + n - 1$, je $B\mathbf{D}_n \subset \mathbf{D}_p$. Je-li pak $Ax = [W_1 x]^{(k)}$, $x \in \mathbf{D}_p$, platí $(AB)\, x = [W_1 [W_2 x]^{(m)}]^{(k)}$; podle věty 7 existuje $\overline{W}_1 \in \mathbf{W}_{n-1}$ tak, že je

$(AB)\,x = [\overline{W}_1[W_2x]]^{(m+k)}$. Podle věty 6 pak platí $(AB)\,x = [(\overline{W}_1 \times W_2)\,x]^{(m+k)}$, kde $\overline{W}_1 \times W_2 \in \mathbf{W}_n$, a tedy je $AB \in \mathfrak{A}_n$, c. b. d.

Důležitou část systému $\mathfrak{A}_n$ tvoří *operátory regulární.* Zavedeme je takto:

Buď $n \geqq 1$ celé; buď $\mathfrak{A}_n^*$ systém všech operátorů, definovaných na $\mathbf{D}_n$, které mají tyto vlastnosti: Ke každému $A \in \mathfrak{A}_n^*$ existuje celé číslo $k \geqq 0$ a funkce $W \in \mathbf{W}_n$ hodnosti q tak, že pro každé $x \in \mathbf{D}_n$ platí (24). Číslo $r(A) = k - q$ nazveme řádem operátoru A.

Buď $\mathfrak{A}_0^*$ systém všech operátorů, definovaných na $\mathbf{D}_0$, které mají tyto vlastnosti: Ke každému $A \in \mathfrak{A}_0^*$ existuje celé číslo $k \geqq 0$, funkce $a \in \mathbf{F}_0$, $a \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$, a funkce $W \in \mathbf{W}_0$ tak, že pro každé $x \in \mathbf{D}_0$ je

$$Ax = (ax + [Wx])^{(k)}\,. \tag{25}$$

Číslo $r(A) = k$ nazveme řádem A.

Lehko vidíme, že platí:

a) $A \in \mathfrak{A}_n^* \Rightarrow r(A) \geqq -n$;

b) $\mathfrak{A}_n^* \subset \mathfrak{A}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Vskutku, pro $n \geqq 1$ je poslední inkluse triviální; je-li $A \in \mathfrak{A}_0^*$, platí

$$Ax = (ax + [Wx])^{(k)} = [(a_\tau + U_1 \times W)\,x]^{(k+1)}\,, \quad \text{a tedy je} \quad \mathfrak{A}_0^* \subset \mathfrak{A}_0\,.$$

Z definice součinu $[Wx]$ vyplývá (srv. (7)), že platí tvrzení:

Je-li $A \in \mathfrak{A}_n^*$, pak $\mathbf{D}_{n+r(A)}$ je nejužší prostor obsahující $A\mathbf{D}_n$. Odtud plyne, že řád operátoru je definován jednoznačně.

Pro regulární operátory platí následující věty:

Věta 12. *Buď* $A, B \in \mathfrak{A}_n^*$ *a nechť* $r(A) \neq r(B)$; *pak je* $A + B \in \mathfrak{A}_n^*$ *a platí* $r(A + B) = \max\,[r(A), r(B)]$.

Věta 13. *Buď* $B \in \mathfrak{A}_n^*$, $A \in \mathfrak{A}_{n+r(B)}^*$; *pak je* $AB \in \mathfrak{A}_n^*$ *a platí*

$$r(AB) = r(A) + r(B)\,.$$

Důkaz věty 12. Buď nejprve $n \geqq 1$, a nechť $Ax = [W_1x]^{(k)}$, $Bx = [W_2x]^{(l)}$, kde W_1, W_2 mají hodnosti q_1 resp. q_2. Je-li $k = l$, je důkaz zřejmý. Buď tedy $k > l$. Pak je

$$(A + B)\,x = [(W_1 + U_{k-l} \times W_2)\,x]^{(k)}\,.$$

Uvažme nyní případy: 1) $k - l + q_2 \leqq n$, 2) $k - l + q_2 > n$.

Nastává-li případ 1, pak podle lemmatu 5 je $U_{k-l} \times W_2 \in \mathbf{W}_n$ a má hodnost $k - l + q_2$. Přitom podle předpokladu věty je $k - q_1 \neq l - q_2$, tj. $k - l + q_2 \neq q_1$. Má tedy $W_1 + U_{k-l} \times W_2$ hodnost $\min\,[q_1, k - l + q_2]$, takže je $A + B \in \mathfrak{A}_n^*$ a současně platí $r(A + B) = k - \min\,[q_1, k - l + q_2] = \max\,[k - q_1, l - q_2]$ a věta platí.

Nastává-li případ 2, pak podle lemmatu 5 je $\left(\frac{\partial^i}{\partial\tau^i}(U_{k-l} \times W_2)\right)^* = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, takže $W_1 + U_{k-l} \times W_2$ má hodnost q_1; je tedy $A + B \in \mathfrak{A}_n^*$ a $r(A + B) = k - q_1$. Z nerovnosti 2 však plyne $k - q_1 > l - q_2 + n - q_1 > l - q_2$, neboť $n - q_1 \geqq 0$, čímž je tvrzení věty dokázáno. Důkaz věty pro $n = 0$ je zřejmý.

Důkaz věty 13. 1. Buď nejprve $n \geqq 1$, $n + r(B) \geqq 1$, a nechť $Bx = [W_2x]^{(m)}$, $Ax = [W_1x]^{(k)}$, přičemž W_1, W_2 mají hodnosti q_1 resp. q_2. Platí tedy $1 \leqq q_2 \leqq n$, $1 \leqq q_1 \leqq m - q_2 + n$, přičemž $n + m - q_2 \geqq 1$. Dle definice součinu operátorů je $(AB)\,x = [W_1[W_2x]^{(m)}]^{(k)}$. Zřejmě platí: Nejužší prostor obsahující $[W_2x]$ pro všechna $x \in \mathbf{D}_n$ je $\mathbf{D}_{n-q_2}$, nejužší prostor obsahující $B\mathbf{D}_n$ je $\mathbf{D}_{m+n-q_2}$. Je tedy $W_1 \in \mathbf{W}_{m+n-q_2}$. Podle věty 8 existuje $\overline{W}_1 \in \mathbf{W}_{n-q_2}$ a celé číslo $r \geqq 0$ tak, že platí $(AB)\,x = [\overline{W}_1[W_2x]]^{(k+r)}$, přičemž $\overline{W}_1$ má hodnost $\overline{q} = r + q_1 - m$. Podle věty 6 pak je $(AB)x = [(\overline{W}_1 \times W_2)\,x]^{(k+r)}$, kde $\overline{W}_1 \times W_2 \in \mathbf{W}_n$ a má hodnost $\overline{q} + q_2$. Je tedy $AB \in \mathfrak{A}_n^*$ a platí $r(AB) = k + r - \overline{q} - q_2 = k + m - q_1 - q_2 = r(A) + r(B)$.

2. Buď nyní $n = 0$, $n + r(B) \geqq 1$, a nechť $Bx = (ax + [W_2x])^{(m)}$, $Ax = [W_1x]^{(k)}$, kde $a \in \mathbf{F}_0$, $a \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$ a kde W_1 má hodnost q_1. Platí tedy $(AB)\,x = [W_1(ax + [W_2x])^{(m)}]^{(k)}$. Očividně $W_1 \in \mathbf{W}_m$. Podle věty 9 existuje $\tilde{a} \in \mathbf{F}_0$, $\tilde{W} \in \mathbf{W}_0$ tak, že platí

$$(AB)\,x = (\tilde{a}(ax + [W_2x]) + [\tilde{W}(ax + [W_2x])])^{(m-q_1+k)}\,, \tag{26}$$

přičemž $\tilde{a} \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$. Rovnost (26) však lze psát

$$(AB)\,x = (\tilde{a}ax + [(\tilde{a}W_2 + \tilde{W}a_\tau + \tilde{W} \times W_2)\,x])^{(m+k-q_1)}\,,$$

a tedy $AB \in \mathfrak{A}_0^*$ a $r(AB) = m + k - q_1 = r(A) + r(B)$.

3. Buď nyní $n \geqq 1$, $n + r(B) = 0$, a nechť $Bx = [W_2x]^{(m)}$, $Ax = (ax + [W_1x])^{(k)}$, $a \in \mathbf{F}_0$, $W_1 \in \mathbf{W}_0$, $a \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$. Zřejmě zde je $m = 0$; vskutku, podle předpokladu je $n + m - q_2 = 0$, a ježto $n - q_2 \geqq 0$ a $m \geqq 0$, je $m = 0$, $n - q_2 = 0$. Platí tedy $(AB)\,x = (a[W_2x] + [W_1[W_2x]])^{(k)} = [\tilde{W}x]^{(k)}$, kde $\tilde{W} = aW_2 + W_1 \times W_2$. Podle věty 4 má aW_2 hodnost q_2; snadno dále zjistíme, že je $\left(\frac{\partial^i}{\partial\tau^i}(W_1 \times W_2)\right)^* = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, q_2 - 1$ (srv. s důkazem druhého tvrzení věty 6), takže $\tilde{W}$ má hodnost q_2. Je tedy $AB \in \mathfrak{A}_n^*$ a platí $r(AB) = k - q_2 = r(A) + r(B)$.

Důkaz posledního případu, kdy $n = 0$, $n + r(B) = 0$ je zcela zřejmý.

Nyní platí následující věta:

Věta 14. *Buď* $W \in \mathbf{W}_n$, $a_i \in \mathbf{F}_{n+i}$, $i = 0, 1, \ldots, m$; *buď operátor* A *definován na* $\mathbf{D}_n$ *rovnicí*

$$Ax = a_mx^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \ldots + a_0x + [Wx]\,; \tag{27}$$

pak platí $A \in \mathfrak{A}_n$. *Je-li nadto* $a_m \neq 0$ *v* $\langle 0, \infty)$, *pak* $A \in \mathfrak{A}_n^*$ *a je* $r(A) = m$.

Poznamenejme, že tvrzení věty 14 obrátit nelze, tj. je-li $A \in \mathfrak{A}_n$, pak obecně není možno A representovat rovnicí (27).

Důkaz. Podle věty 2 lze psát

$$Ax = (a_m x)^{(m)} + (b_{m-1}x)^{(m-1)} + \ldots + (b_0 x) + [Wx],$$

kde $b_i \in \mathbf{F}_{n+}$. Odtud plyne již známým způsobem, že je $Ax = [Hx]^{(m+1)}$, kde $H = U_1\, a_m(\tau) + U_2\, b_{m-1}(\tau) + \ldots + U_{m+1}\, b_0(\tau) + U_{m+1} \times W$, nebo

$$Ax = (a_m x + [Qx])^{(m)}, \tag{28}$$

kde $Q = U_1\, b_{m-1}(\tau) + U_2\, b_{m-2}(\tau) + \ldots + U_m\, b_0(\tau) + U_m \times W$. Očividně $H \in \mathbf{W}_n$ a tedy $A \in \mathfrak{A}_n$. Druhé tvrzení: Buď nejprve $n \geqq 1$. Zřejmě $H^* = a_m$, takže H má hodnost 1. Je tedy $A \in \mathfrak{A}_n^*$ a $r(A) = m + 1 - 1 = m$. Je-li $n = 0$, plyne tvrzení z rov. (28).

Zaveďme nyní označení: Buď $W \in \mathbf{W}_0$ a klaďme $W^{\times k} = W^{\times (k-1)} \times W$; $k = 2, 3, 4, \ldots$; $W^{\times 1} = W$. Jsou-li k, $r \geqq 1$ celá čísla, očividně platí

$$W^{\times k} \times W^{\times r} = W^{\times (k+r)}.$$

Pro další budeme potřebovat následující větu:

Věta 15. *Buď $W \in \mathbf{W}_r$; pak existuje jediná funkce $H \in \mathbf{W}_0$, pro kterou platí*

$$H + W + H \times W = 0. \tag{29}$$

Nadto platí

a) $H = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i}$, *přičemž řada konverguje stejnoměrně v každém trojúhelníku* $0 \leqq \tau \leqq t \leqq T < \infty$;

b) $H \in \mathbf{W}_r$;

c) *je splněna rovnice*

$$H + W + W \times H = 0. \tag{30}$$

Důkaz. Definujme posloupnost funkcí H_k rovnicí

$$H_k = -H_{k-1} \times W - W; \quad k = 2, 3, \ldots; \quad H_1 = -W. \tag{31}$$

Očividně $H_k \in \mathbf{W}_0$ pro každé $k \geqq 1$. Lehko se lze dále přesvědčit, že je

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i W^{\times i}; \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Označíme-li $M = \max_{0 \leqq \tau \leqq t \leqq T} |W(t, \tau)|$, snadno se dokáže, že platí

$$|W^{\times n}(t, \tau)| \leqq M^n |t - \tau|^{n-1}/(n-1)! \quad \text{pro} \quad 0 \leqq \tau \leqq t \leqq T, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

Jsou tedy členy řady $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i}$ majorisovány členy konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} M^n T^{n-1} : (n-1)! = M \exp(MT)$, takže předchozí řada konverguje v trojúhelníku $0 \leqq \tau \leqq t \leqq T$ stejnoměrně. Podle rov. (32) tedy platí $H_n \to H$ stejnoměrně, a tedy $H \in \mathbf{W}_0$. V důsledku stejnoměrné konvergence platí dále pro každou dvojici $0 \leqq$

$\leqq \tau \leqq t \leqq T$, že $H_n \times W \to H \times W$, takže z (31) máme pro $k \to \infty$: $H = - H \times \times W - W$; je tedy sestrojená funkce H řešením rovnice (29). Obdobným způsobem lze dokázat jednoznačnost.

Dokažme nyní c). V důsledku stejnoměrné konvergence máme

$$W \times H = W \times \left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W \times W^{\times i} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times (i+1)} = - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i} - W = - H - W,$$

což však už je (30).

Zbývá dokázat b). Je-li $r = 0$, je vše jasné. Buď tedy $r \geqq 1$. Snadno nahlédneme, že platí tvrzení: Je-li $H \in \mathbf{W}_p$, $0 \leqq p \leqq r - 1$, pak je též $H \in \mathbf{W}_{p+1}$. Vskutku, je-li $H \in \mathbf{W}_p$, plyne z (29):

$$\frac{\partial^p H}{\partial \tau^p} = - \frac{\partial^p W}{\partial \tau^p} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left\{ H \left(\frac{\partial^{p-k-1} W}{\partial \tau^{p-k-1}} \right)^{*\tau} \right\} - H \times \frac{\partial^p W}{\partial \tau^p} . \tag{34}$$

Pravá strana (34) však má spojitou derivaci podle τ, takže existuje $\dfrac{\partial^{p+1} H}{\partial \tau^{p+1}}$; z předpokladu $H \in \mathbf{W}_p$ dále plyne, že $\left(\dfrac{\partial^q H}{\partial \tau^q}\right)^* \in \mathbf{F}_{p-q-1}$ pro $q = 0, 1, \ldots, p - 1$. Z (34) však máme

$$\left(\frac{\partial^q H}{\partial \tau^q}\right)^* = - \left(\frac{\partial^q W}{\partial \tau^q}\right)^* + \sum_{k=0}^{q-1} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left(H \left(\frac{\partial^{q-k-1} W}{\partial \tau^{q-k-1}} \right)^{*\tau} \right) \right\}^* \tag{35}$$

pro $q = 0, 1, \ldots, p - 1$. Nejvyšší derivace H figurující na pravé straně (35) je $\left(\dfrac{\partial^{q-1} H}{\partial \tau^{q-1}}\right)^*$. Ježto ale $\left(\dfrac{\partial^{q-1} H}{\partial \tau^{q-1}}\right)^* \in \mathbf{F}_{p-q}$, je podle (35) dokonce $\left(\dfrac{\partial^q H}{\partial \tau^q}\right)^* \in \mathbf{F}_{p-q}$. Platí tedy $H \in \mathbf{W}_{p+1}$, a naše tvrzení je dokázáno.

Ježto jsme dříve ukázali, že $H \in \mathbf{W}_0$, plyne z našeho tvrzení $H \in \mathbf{W}_r$, c. b. d.

Dokažme nyní následující důležitou větu:

Věta 16. *Ke každému $A \in \mathfrak{A}_n^*$ existuje operátor inversní, tj. existuje operátor A^{-1}, definovaný na $\mathbf{D}_{n+r(A)}$ tak, že je $A^{-1}A = I$ na $\mathbf{D}_n$, $AA^{-1} = I$ na $\mathbf{D}_{n+r(A)}$; přitom platí $A^{-1} \in \mathfrak{A}_{n+r(A)}^*$ a $r(A^{-1}) = - r(A)$.*

Důkaz. Buď nejprve $n \geqq 1$ a nechť $Ax = [Wx]^{(k)}$, kde $W \in \mathbf{W}_n$ a má hodnost q. Podle věty 3 platí pro každé $x \in \mathbf{D}_{n-q}$

$$[Wx^{(q)}] = a(x + [\tilde{W}x]) , \tag{36}$$

kde

$$a = (-1)^{q-1} \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial \tau^{q-1}}\right)^* \neq 0 \text{ v } \langle 0, \infty) , \quad \tilde{W} = \frac{1}{a} (-1)^q \frac{\partial^q W}{\partial \tau^q} .$$

Přitom je $a \in \mathbf{F}_{n-q}$ a tedy $\tilde{W} \in \mathbf{W}_{n-q}$.

Definujme operátory A_1, A_2, A_3 předpisy

$$A_1 x = x^{(k)} \quad \text{na} \quad \mathbf{D}_{n-q},$$
$$A_2 x = a(x + [\tilde{W}x]) = [Wx^{(q)}] \quad \text{na} \quad \mathbf{D}_{n-q},$$
$$A_3 x = x^{(-q)} \quad \text{na} \quad \mathbf{D}_n.$$

Očividně $A_1 \in \mathfrak{A}^*_{n-q}$, $A_2 \in \mathfrak{A}^*_{n-q}$, $A_3 \in \mathfrak{A}^*_n$, a platí $A = A_1 A_2 A_3$.

Buď nyní $H \in \mathbf{W}_0$, vyhovující rovnici $H + \tilde{W} + H \times \tilde{W} = 0$; podle věty 15 pak platí $H \in \mathbf{W}_{n-q}$ a $H \times \tilde{W} = \tilde{W} \times H$.

Sestrojme nyní operátory B_1, B_2, B_3 předpisy:

$$B_1 x = x^{(q)} \quad \text{na} \quad \mathbf{D}_{n-q},$$
$$B_2 x = \frac{1}{a} x + \left[\left(H \frac{1}{a_\tau}\right) x\right] = \frac{1}{a} x + \left[H\left(\frac{1}{a} x\right)\right] \quad \text{na} \quad \mathbf{D}_{n-q},$$
$$B_3 x = x^{(-k)} \quad \text{na} \quad \mathbf{D}_{k+n-q}.$$

Zřejmě platí $B_1 \in \mathfrak{A}^*_{n-q}$, $B_2 \in \mathfrak{A}^*_{n-q}$, $B_3 \in \mathfrak{A}^*_{k+n-q}$, $r(B_1) = q$, $r(B_2) = 0$, $r(B_3) = -k$. Utvořme operátor $B = B_1 B_2 B_3$; podle věty 13 je $B \in \mathfrak{A}^*_{k+n-q}$, $r(B) = q - k = -r(A)$. Stanovme nyní $BA = B_1 B_2 B_3 A_1 A_2 A_3$. Zřejmě platí $B_3 A_1 = I$ na $\mathbf{D}_{n-q}$, $B_1 A_3 = I$ na $\mathbf{D}_n$. Dále platí na $\mathbf{D}_{n-q}$:

$$(B_2 A_2)\, x = \frac{1}{a}\, a(x + [\tilde{W}x]) + \left[H\left(\frac{1}{a}\, a(x + [Wx])\right)\right] =$$
$$= x + [(\tilde{W} + H + H \times \tilde{W})\, x] = x,$$

takže $B_2 A_2 = I$ na $\mathbf{D}_{n-q}$. Platí tedy $BA = I$ na $\mathbf{D}_n$.

Stanovme dále AB. Zřejmě platí $A_3 B_1 = I$ na $\mathbf{D}_{n-q}$, $A_1 B_3 = I$ na $\mathbf{D}_{k+n-q}$. Dále je na $\mathbf{D}_{n-q}$:

$$(A_2 B_2)\, x = a\left\{\frac{1}{a} x + \left[H\left(\frac{1}{a} x\right)\right] + \left[\tilde{W}\left(\frac{1}{a} x + \left[H\left(\frac{1}{a} x\right)\right]\right)\right]\right\} =$$
$$= x + a\left[(H + \tilde{W} + \tilde{W} \times H)\left(\frac{1}{a} x\right)\right] = x,$$

a tedy $A_2 B_2 = I$ na $\mathbf{D}_{n-q}$. Platí tedy $AB = I$ na $\mathbf{D}_{k+n-q}$, a tudíž $B = A^{-1}$.

Buď nyní $n = 0$ a nechť $Ax = (ax + [Wx])^{(k)}$, kde $a \in \mathbf{F}_0$, $a \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$, a $W \in \mathbf{W}_0$. Zde klaďme

$$A_1 x = x^{(k)} \text{ na } \mathbf{D}_0, \quad A_2 x = a(x + [\tilde{W}x]) \text{ na } \mathbf{D}_0, \quad \text{kde} \quad \tilde{W} = a^{-1} W.$$

Opět je $A = A_1 A_2$. Označíme-li dále $H \in \mathbf{W}_0$ řešení rovnice $H + \tilde{W} + H \times \tilde{W} = 0$ a sestrojíme-li operátory

$$B_1 x = \frac{1}{a} x + \left[\left(H \frac{1}{a_\tau}\right) x\right] \text{ na } \mathbf{D}_0, \quad B_2 x = x^{(-k)} \quad \text{na} \quad \mathbf{D}_k,$$

pak stejně jako prve snadno dokážeme, že $B_1 B_2 = A^{-1}$. Věta je dokázána.

Všimněme si na tomto místě, že z věty 16 plyne tvrzení: Buďte $n \geqq 1$, $k \geqq 0$ celá, a nechť $W \in \boldsymbol{W}_n$ má hodnost q; je-li $f \in \boldsymbol{D}_{n-q+k}$, pak rovnice $[Wx]^{(k)} = f$ má v prostoru $\boldsymbol{D}_n$ jediné řešení.

Poznámka. Zavedené operátory nejsou spojité v distributivním smyslu, tj. je-li $x_k \to x$; $x_k, x \in \boldsymbol{D}_n$, $k = 1, 2, \ldots$ a $A \in \mathfrak{A}_n$, neplyne z toho, že $Ax_k \to Ax$. (Jsou však spojité podle normy, jak ukážeme později.) Vskutku, buď $\alpha(t)$ reálná funkce, mající v $(-\infty, \infty)$ derivace všech řádů, pro kterou je $\alpha(t) = 0$ pro $t \leqq 0$, $\alpha(t) = 1$ pro $t \geqq 1$. Buď dále $r \geqq 0$ a nechť distribuce f_k jsou definovány předpisem $f_k = k^r \cos k(t - 2)$; $k = 1, 2, \ldots$; zřejmě platí $f_k \to 0$ a tedy též $g_k = \alpha f_k \to 0$. Nadto je $g_k \in \boldsymbol{D}_0$. Uvažujme operátor $A \in \mathfrak{A}_0$, definovaný rovnicí $Ax = ax$, kde $a \in \boldsymbol{F}_0$ a je definována rovnicemi $a(t) = 1 - |t - 2|$ pro $|t - 2| \leqq 1$, $a(t) = 0$ pro $|t - 2| > 1$. Pak platí

$$(Ag_k, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, \alpha(t)\, f_k(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Zvolme funkci $\varphi_0(t) \in \boldsymbol{K}$ tak, že je $\varphi_0(t) = 1$ na $\langle 1, 3 \rangle$. Potom platí

$$(Ag_k, \varphi_0) = \int_{-1}^{1} (1 - |\tau|)\, k^r \cos k\tau\, \mathrm{d}\tau = 2k^{r-2}(1 - \cos k)\,.$$

Je-li tedy $r \geqq 2$, posloupnost (Ag_k, φ_0) nekonverguje a tudíž neplatí $Ag_k \to 0$.

Přistupme nyní k *normování prostorů* $\boldsymbol{D}_n$.

Buď $n \geqq 0$ celé, a nechť $f \in \boldsymbol{D}_n$, $F = f^{(-n)}$; funkci $\|f\|_n = \int_0^t |F(\tau)|\, \mathrm{d}\tau$ nazveme normou distribuce f v prostoru $\boldsymbol{D}_n$. Zřejmě $\|f\|_n$ je nezáporná neklesající funkce; snadno se lze dále přesvědčit, že platí tvrzení:

Je-li $f, g \in \boldsymbol{D}_n$, α reálné číslo, pak platí

1) $\|f\|_n = 0$ *(tj. pro všechna t) tehdy a jen tehdy, když $f = 0$,*

2) $\|\alpha f\|_n = |\alpha| \,.\, \|f\|_n$,

3) $\|f + g\|_n \leqq \|f\|_n + \|g\|_n$.

Dále platí toto lemma:

Lemma 6. *Buď $f \in \boldsymbol{D}_n$, $k \geqq 1$ celé; pak platí $\|f\|_{n+k} \leqq \|f\|_n \,.\, t^k/k!$.*

Důkaz. Buď $F = f^{(-n)}$; pak je též $f \in \boldsymbol{D}_{n+k}$ a je

$$f = \left\{ \int_0^t \frac{(t - \sigma)^{k-1}}{(k - 1)!} F(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right\}^{(n+k)},$$

takže

$$\|f\|_{n+k} = \int_0^t \left| \int_0^\tau \frac{(\tau - \sigma)^{k-1}}{(k - 1)!} F(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right| \mathrm{d}\tau \leqq \int_0^t \left(\int_0^\tau \frac{(\tau - \sigma)^{k-1}}{(k - 1)!} |F(\sigma)|\, \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k - 1)!} \|f\|_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqq \|f\|_n \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k - 1)!}\, \mathrm{d}\tau = \frac{t^k}{k!} \|f\|_n\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Dále platí:

Lemma 7. *Buď $f \in \mathbf{D}_n$; pak platí:*

1) *je-li $k \geqq -n$, je $\|f^{(k)}\|_{n+k} = \|f\|_n$,*

2) *je-li $k < -n$, je $\|f^{(k)}\|_0 \leqq \|f\|_n \cdot t^{-k-n}/(-k-n)!$.*

Tvrzení 1 plyne přímo z definice, důkaz 2 je obdobný důkazu lemmatu 6.

Buďte $f_k, f \in \mathbf{D}_n$, $k = 1, 2, \ldots$; řekneme, že posloupnost distribucí f_k konverguje k f podle normy prostoru $\mathbf{D}_n$ (což označíme symbolem $f_k \rightrightarrows f$ v $\mathbf{D}_n$), jestliže je $\|f - f_k\|_n \to 0$ pro každé $t \geqq 0$.

Všimněme si, že v důsledku toho, že norma je nezápornou neklesající funkcí, konverguje posloupnost funkcí $\|f - f_k\|_n$ stejnoměrně na každém konečném intervalu.

Z vlastností normy plyne okamžitě tvrzení: *Konvergentní posloupnost v $\mathbf{D}_n$ má právě jednu limitu.*

Jednoduchým důsledkem uvedených vlastností normy se jeví

Lemma 8. *Buď $f_k \rightrightarrows f$, $g_k \rightrightarrows g$ v $\mathbf{D}_n$, a nechť číselná posloupnost $\lambda_k \to \lambda$; pak platí*

1) $f_k + g_k \rightrightarrows f + g$ v $\mathbf{D}_n$,

2) $\lambda_k f_k \rightrightarrows \lambda f$ v $\mathbf{D}_n$,

3) $\|f_k\|_n \to \|f\|_n$.

Nyní platí:

Věta 17. *Buď $f_k \rightrightarrows f$ v $\mathbf{D}_n$; pak platí:*

a) *je-li m celé, je $f_k^{(m)} \rightrightarrows f^{(m)}$ v $\mathbf{D}_{\max[n+m,0]}$,*

b) *je-li $r \geqq 0$ celé, je $f_k \rightrightarrows f$ v $\mathbf{D}_{n+r}$.*

Důkaz. Ježto je $\|f_k - f\|_n \to 0$, máme podle lemmatu 7 pro $m \geqq -n$: $\|f_k^{(m)} - f^{(m)}\|_{m+n} = \|f_k - f\|_n \to 0$. Je-li $m < -n$, je $\|f_k^{(m)} - f^{(m)}\|_0 \leqq \|f_k - f\|_n \cdot t^{-m-n} : (-m-n)! \to 0$, a tedy a) platí. Tvrzení b) plyne bezprostředně z lemmatu 6.

Poznámka. Snadno nahlédneme, že platí tvrzení: *Je-li $f_k \rightrightarrows f$ v $\mathbf{D}_n$, pak platí v distributivním smyslu $f_k \to f$.* Vskutku, je-li $f_k \rightrightarrows f$ v $\mathbf{D}_n$, značí to, že $\int_0^t |F_k(\tau) - F(\tau)|\, d\tau \to 0$, kde $F_k = f_k^{(-n)}$, $F = f^{(-n)}$; avšak

$$\left|\int_0^t (F_k(\tau) - F(\tau))\, d\tau\right| \leqq \int_0^t |F_k(\tau) - F(\tau)|\, d\tau \to 0,$$

takže $F_k^{(-1)}(t) \to F^{(-1)}(t)$ stejnoměrně na každém konečném intervalu. Je tedy i v distributivním smyslu $F_k^{(-1)} \to F^{(-1)}$, odkud $n + 1$-násobnou derivací plyne $f_k \to f$.

Vyslovené tvrzení obrátit nelze, jak ukazuje příklad posloupnosti $f_k = a(t) \cos kt \to 0$ ($a(t)$ má derivace všech řádů a je $a(t) = 0$ pro $t \leqq 0$, $0 < a(t) < 1$ pro $0 < t < 1$, $a(t) = 1$ pro $t \geqq 1$), pro kterou je $f_k \in \mathbf{D}_0$, avšak

$$\|f_k\|_0 = \int_0^t |a(\tau) \cos k\tau|\, d\tau \to \frac{2}{\pi} \int_0^t a(\tau)\, d\tau \neq 0 \quad \text{pro} \quad t > 0.$$

Nyní platí:

Věta 18. *Buď $A \in \mathfrak{A}_n$; pak existuje celé $m \geqq 0$ tak, že ke každému $p \geqq m$ lze najít nezápornou funkci $M_p(t)$, která je konečná na $\langle 0, \infty)$ tak, že pro každé $x \in \mathbf{D}_n$ platí $\|Ax\|_p \leqq M_p \|x\|_n$. Je-li nadto A regulární, je $m = n + r(A)$.*

Důkaz. Buď $Ax = [Wx]^{(k)}$, $W \in \mathbf{W}_n$. Z definice součinu $[Wx]$ plyne (srv. se (7)), že možno psát

$$[Wx]^{(k)} = \left\{ aX + \int_0^t \overline{W}(t, \tau)\, X(\tau)\, d\tau \right\}^{(p)}, \quad X = x^{(-n)}, \tag{37}$$

kde $p \geqq m$, $0 \leqq m \leqq k + \max[n - 1, 0]$, $a \in \mathbf{F}_0$, $\overline{W} \in \mathbf{W}_0$. Platí tedy

$$\|Ax\|_p = \int_0^t \left| a(\tau)\, X(\tau) + \int_0^\tau \overline{W}(\tau, \sigma)\, X(\sigma)\, d\sigma \right| d\tau .$$

Označíme-li $\alpha(t) = \max\limits_{0 \leqq \tau \leqq t} |a(\tau)|$, $\omega(t) = \max\limits_{0 \leqq \tau \leqq t} |\overline{W}(t, \tau)|$, platí

$$\|Ax\|_p \leqq \alpha(t) \int_0^t |X(\tau)|\, d\tau + \int_0^t \omega(\tau) \left(\int_0^\tau |X(\sigma)|\, d\sigma \right) d\tau \leqq$$

$$\leqq \left(\alpha(t) + \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau \right) . \int_0^t |X(\tau)|\, d\tau = M_p \|x\|_n , \quad \text{c. b. d.}$$

Poslední tvrzení věty je zřejmé.

Bezprostředním důsledkem právě dokázané věty je věta:

Věta 19. *Každý operátor $A \in \mathfrak{A}_n$ je lineární a spojitý podle normy, tj.*

1. *pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{D}_n$ a reálná čísla α_1, α_2 platí*

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 (Ax_1) + \alpha_2 (Ax_2),$$

2. *existuje celé $m \geqq 0$ tak, že pro každé celé $p \geqq m$ a každou posloupnost $x_k \rightrightarrows x$ v $\mathbf{D}_n$ platí $Ax_k \rightrightarrows Ax$ v $\mathbf{D}_p$.*

Důkaz. Tvrzení 1 plyne přímo z linearity součinu $[Wx]$; 2. je-li $x_k \rightrightarrows x$ v $\mathbf{D}_n$, máme podle věty 18

$$\|Ax_k - Ax\|_p = \|A(x_k - x)\|_p \leqq M_p \|x_k - x\|_n \to 0, \quad \text{c. b. d.}$$

Buď nyní $A \in \mathfrak{A}_n$ a buď $\{M_p^\nu(t)\}$ systém všech funkcí, o kterých se hovoří ve větě 18 při pevném p; funkci $\|A\|_p$, definovanou předpisem

$$\|A\|_p (t) = \inf_\nu M_p^\nu(t), \quad t > 0, \tag{38}$$

nazveme normou operátoru A v prostoru $\mathbf{D}_p$.

Z definice přímo plyne, že pro každé $t > 0$ platí

$$\|Ax\|_p \leqq \|A\|_p . \|x\|_n, \quad x \in \mathbf{D}_n . \tag{39}$$

Užitečné bude následující lemma:

Lemma 9. *Je-li $A \in \mathfrak{A}_n$, pak pro každé $t > 0$ platí*

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|Ax\|_p \,, \tag{40}$$

kde $\mathfrak{M}$ je systém všech těch $x \in \mathbf{D}_n$, pro která je $\|x\|_n(t) \leqq 1$.

Důkaz. Zvolme pevně $t > 0$; hodnoty norem v bodě t označme pro stručnost čárkou. Z definice (38) plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_1 \in \mathbf{D}_n$ tak, že je

$$\|Ax_1\|'_p > (\|A\|'_p - \varepsilon)\, \|x_1\|'_n \,. \tag{41}$$

Lehko je vidět, že číslo $\|x_1\|'_n > 0$. Kdyby totiž bylo $\|x_1\|'_n = 0$, bylo by podle (41) $\|Ax_1\|'_p > 0$. Ježto však zároveň je $\|Ax\|'_p \leqq M^{\nu\prime}_p \|x\|'_n$ pro každé $x \in \mathbf{D}_n$, bylo by $\|Ax_1\|'_p = 0$, což je spor. Sestrojme distribuci $x_2 = (\|x_1\|'_n)^{-1}\, x_1 \in \mathbf{D}_n$. Očividně je $\|x_2\|'_n = 1$. Pomocí (41) máme pak

$$\|Ax_2\|'_p = \left\| \frac{1}{\|x_1\|'_n} Ax_1 \right\|'_p = \frac{1}{\|x_1\|'_n} \|Ax_1\|'_p > \|A\|'_p - \varepsilon \,.$$

Je tedy

$$\sup_{\|x\|_n' \leqq 1} \|Ax\|'_p \geqq \|Ax_2\|'_p > \|A\|'_p - \varepsilon\,, \quad \text{a tedy} \quad \sup_{\|x\|_n' \leqq 1} \|Ax\|'_p \geqq \|A\|'_p \,.$$

Na druhé straně ze (39) máme $\sup\limits_{\|x\|_n' \leqq 1} \|Ax\|'_p \leqq \|A\|'_p$, což ve spojení s předchozí nerovností dokazuje lemma.

Z lemmatu 6 a 9 ihned plyne

Lemma 10. *Buď $A \in \mathfrak{A}_n$, $\|A\|_p$ jeho norma v prostoru $\mathbf{D}_p$; pak pro každé celé $k \geqq 0$ platí $\|A\|_{p+k} \leqq \|A\|_p \,.\, t^k/k!$.*

Pro definovanou normu operátoru platí tvrzení:

Lemma 11. *Buďte $A, B \in \mathfrak{A}_n$; pak platí:*

a) $\|A\|_p = 0$ *(tj. pro všechna $t > 0$) tehdy a jen tehdy, když $A = 0$,*

b) *pro každé reálné λ je $\|\lambda A\|_p = |\lambda| \,.\, \|A\|_p$,*

c) *existuje celé $m \geqq 0$ tak, že pro každé $q \geqq m$ je*

$$\|A + B\|_q \leqq \|A\|_q + \|B\|_q \,.$$

Důkaz. a) Je-li $A = 0$, zřejmě $\|A\|_p = 0$; je-li naopak $\|A\|_p = 0$, plyne z rov. (39), že pro každé $x \in \mathbf{D}_n$ je $\|Ax\|_p = 0$, a tedy podle vlastností normy distribuce je $Ax = 0$, tj. $A = 0$.

b) Podle (40) je

$$\|\lambda A\|_p = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|(\lambda A)\, x\|_p = \sup_{x \in \mathfrak{M}} |\lambda| \,.\, \|Ax\|_p = |\lambda| \,.\, \|A\|_p \,.$$

c) Ježto podle věty 10 je opět $A + B \in \mathfrak{A}_n$, existuje m' tak, že $A + B$ je normován v každém prostoru $\mathbf{D}_p$, $p \geqq m'$; existuje tedy m tak, že všechny operátory A, B,

$A + B$, jsou normovány v $\mathbf{D}_q$, $q \geqq m$. Podle (40) a vlastností normy distribucí pak je

$$\|A + B\|_q = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|(A + B)\, x\|_q \leqq \sup_{x \in \mathfrak{M}} (\|Ax\|_q + \|Bx\|_q) \leqq \|A\|_q + \|B\|_q\,,$$

c. b. d.

Dále platí

Lemma 12. *Buď $B \in \mathfrak{A}_n$ normován v prostoru $\mathbf{D}_p$, a buď $A \in \mathfrak{A}_p$ normován v prostoru $\mathbf{D}_q$; pak platí $\|AB\|_q \leqq \|A\|_q \,.\, \|B\|_p$.*

Důkaz. Zřejmě součin AB má smysl; podle definice normy platí pro každé $x \in \mathbf{D}_n$

$$\|(AB)\, x\|_q = \|A(Bx)\|_q \leqq \|A\|_q \,.\, \|Bx\|_p \leqq \|A\|_q \,.\, \|B\|_p \,.\, \|x\|_n\,,$$

takže

$$\|AB\|_q = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|(AB)\, x\|_q \leqq \|A\|_q \,.\, \|B\|_p\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Z lemmatu 12 plyne tvrzení: *Je-li $A \in \mathfrak{A}_n^*$, pak $\|A\|_{n+r(A)} > 0$ pro každé $t > 0$.* Vskutku, A je zřejmě normován v $\mathbf{D}_{n+r(A)}$, a $A^{-1} \in \mathfrak{A}_{n+r(A)}^*$ je normován v $\mathbf{D}_n$; je tedy

$$\|A^{-1}A\|_n = \|I\|_n = 1 \leqq \|A^{-1}\|_n \,.\, \|A\|_{n+r(A)}\,,$$

odkud plyne tvrzení.

Dosažené výsledky použijeme nyní k odvození některých odhadů pro přibližné konstrukce inversního operátoru. Jak je patrno z důkazu věty 16, redukuje se konstrukce A^{-1} v podstatě na inversi operátoru $\tilde{A} \in \mathfrak{A}_k^*$ tvaru $Ax = x + [Wx]$. Zde poslouží následující triviální věta:

Věta 20. *Buďte $A_i = I + \tilde{A}_i \in \mathfrak{A}_k^*$, kde $\tilde{A}_i x = [W_i x]$, $i = 1, 2$, a nechť $\|\tilde{A}_i\| < 1$; pak platí*

$$\|A_1^{-1} - A_2^{-1}\|_k \leqq \frac{\|A_1 - A_2\|_k}{(1 - \|\tilde{A}_1\|_k)(1 - \|\tilde{A}_2\|_k)}\,. \tag{42}$$

Důkaz. Buď $y \in \mathbf{D}_k$ a nechť $A_1 x_1 = x_1 + \tilde{A}_1 x_1 = y$, $A_2 x_2 = x_2 + \tilde{A}_2 x_2 = y$. Pak je $x_1 - x_2 = (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1)\, x_1 + \tilde{A}_2(x_2 - x_1)$; pro normy tedy platí

$$\|x_1 - x_2\|_k \leqq \|\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1\|_k \,.\, \|x_1\|_k + \|\tilde{A}_2\|_k \,.\, \|x_1 - x_2\|_k\,. \tag{43}$$

Zároveň je

$$\|x_1\|_k = \|- \tilde{A}_1 x_1 + y\|_k \leqq \|\tilde{A}_1\|_k \,.\, \|x_1\|_k + \|y\|_k\,. \tag{44}$$

Ze (43) a (44) máme

$$\|x_1 - x_2\|_k \leqq \frac{\|\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2\|_k}{(1 - \|\tilde{A}_1\|_k)(1 - \|\tilde{A}_2\|_k)}\, \|y\|_k\,.$$

Ježto však $x_1 - x_2 = (A_1^{-1} - A_2^{-1})\, y$, plyne z poslední nerovnosti pomocí lemmatu 9 ihned odhad (42).

Konstrukci inversního operátoru lze s výhodou uskutečnit v prostoru $\mathbf{D}_0$. K tomu cíli poznamenejme, že platí tvrzení:

Je-li $A \in \mathfrak{A}_n^*$, pak lze A representovat rovnicí

(45) $$Ax = \{a(x^{(-n)} + [Wx^{(-n)}])\}^{(n+r(A))},$$

kde $a \in \mathbf{F}_0$, $a \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$, $W \in \mathbf{W}_0$.

(Důkaz plyne bezprostředně z definice regulárního operátoru pomocí (7).)

K odvození odhadu zaveďme ještě toto označení: Je-li $W \in \mathbf{W}_0$, buď $\|W\|(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |W(t, \tau)|$; je-li $a \in \mathbf{F}_0$, buď $\|a\|(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |a(\tau)|$. Pak platí následující věta:

Věta 21. *Buďte $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_n^*$ a nechť je*

(46) $$A_i x = \{a_i(x^{(-n)} + [W_i x^{(-n)}])\}^{(n+h)}, \quad i = 1, 2;$$

pak platí

(47) $$\|A_1^{-1} - A_2^{-1}\|_n \leq$$
$$\leq \left(\|a_1^{-1} - a_2^{-1}\| + \|a_{1,2}^{-1}\| \int_0^t \|W_1 - W_2\| \, d\tau \, . \exp \int_0^t \|W_{1,2}\| \, d\tau \right) . \exp \int_0^t \|W_{2,1}\| \, d\tau \, .$$

(Platí buď prvý nebo druhý index.)

K důkazu užijeme následující, dobře známé tvrzení:

Lemma 13. *Buďte $u(t)$, $v(t)$ funkce, integrovatelné na každém konečném intervalu $\langle 0, T \rangle$, $h(t)$ nezáporná a neklesající pro $t \geq 0$; je-li pro každé $t > 0$*

$$u(t) \leq h(t) + \int_0^t u(\tau) \, v(\tau) \, d\tau \, ,$$

pak platí

$$u(t) \leq h(t) \exp \int_0^t v(\tau) \, d\tau \, .$$

Důkaz věty 21. Buď $f \in \mathbf{D}_{h+n}$, $F = f^{(-h-n)}$, a buďte $x_1, x_2 \in \mathbf{D}_n$ distribuce, splňující rovnice $A_1 x_1 = f$, $A_2 x_2 = f$. Podle (46) tedy platí pro $X_i = x_i^{(-n)}$:

(48) $$X_1(t) + \int_0^t W_1(t, \tau) \, X_1(\tau) \, d\tau = F(t)/a_1(t) \, ,$$
$$X_2(t) + \int_0^t W_2(t, \tau) \, X_2(\tau) \, d\tau = F(t)/a_2(t) \, .$$

Z rovnic (48) plyne

$$X_1 - X_2 = - \int_0^t W_1(X_1 - X_2) \, d\tau - \int_0^t (W_1 - W_2) \, X_2 \, d\tau + (a_1^{-1} - a_2^{-1}) \, F \, ,$$

takže je

$$\int_0^t |X_1(\tau) - X_2(\tau)| \, d\tau \leq$$
$$\leq \int_0^t \|W_1\|(\tau) \int_0^\tau |X_1(\sigma) - X_2(\sigma)| \, d\sigma \, d\tau + \int_0^t \|W_1 - W_2\|(\tau) \int_0^\tau |X_2(\sigma)| \, d\sigma \, d\tau \, +$$
$$+ \int_0^t |a_1^{-1}(\tau) - a_2^{-1}(\tau)| \, . \, |F(\tau)| \, d\tau \, .$$

Ježto norma $\|x\|_n$ je neklesající funkcí, možno poslední nerovnost psát

$$\|x_1 - x_2\|_n \leqq \int_0^t \|W_1\|(\tau)\, \|x_1 - x_2\|_n(\tau)\, d\tau + \|x_2\|_n(t) \int_0^t \|W_1 - W_2\|(\tau)\, d\tau + \\ + \|a_1^{-1} - a_2^{-1}\|(t) \,.\, \|f\|_{n+h} \,.$$

Odtud pomocí lemmatu 13 plyne

(49) $$\|x_1 - x_2\|_n \leqq \\ \leqq \left(\|a_1^{-1} - a_2^{-1}\| \,.\, \|f\|_{n+h} + \|x_2\|_n \,.\, \int_0^t \|W_1 - W_2\|(\tau)\, d\tau\right) . \exp \int_0^t \|W_1\|(\tau)\, d\tau \,.$$

Z druhé rovnice (48) máme podobně

$$\|x_2\|_n \leqq \int_0^t \|W_2\|(\tau) \,.\, \|x_2\|_n(\tau)\, d\tau + \|a_2^{-1}\| \,.\, \|f\|_{n+h} \,,$$

odkud pomocí lemmatu 13 obdržíme

(50) $$\|x_2\|_n \leqq \|a_2^{-1}\| \,.\, \|f\|_{n+h} \exp \int_0^t \|W_2\|(\tau)\, d\tau \,.$$

Dosazením (50) do (49) a použitím rovnice $x_1 - x_2 = (A_1^{-1} - A_2^{-1}) f$ dostaneme pomocí lemmatu 9 ihned odhad (47).

Uveďme nakonec ještě jeden dosti ostrý odhad. Platí

Věta 22. *Buď $A \in \mathfrak{A}_n^*$, $Ax = \{a(x^{(-n)} + [Wx^{(-n)}])\}^{(n+h)}$; nechť $B_r \in \mathfrak{A}_{n+h}^*$ je definován rovnicí*

$$B_r x = \left\{\frac{1}{a}\, x^{(-n-h)} + \left[Q_r\left(\frac{1}{a}\, x^{(-n-h)}\right)\right]\right\}^{(n)},$$

kde $Q_r = \sum_{i=1}^{r} (-1)^i\, W^{\times i}$; pak platí

(51) $$\|A^{-1} - B_r\|_n \leqq \alpha(t) \left(\exp\left(t\, M(t)\right) - \sum_{k=0}^{r} \left(t\, M(t)\right)^k / k!\right),$$

kde

$$\alpha(t) = \max_{0 \leqq \tau \leqq t} |a^{-1}(\tau)| \,, \quad M(t) = \max_{0 \leqq \eta \leqq \xi \leqq t} |W(\xi, \eta)| \,.$$

Důkaz. Stejným způsobem, jako to bylo provedeno v důkazu věty 16, se lze přesvědčit, že operátor B, definovaný na $\mathbf{D}_{n+h}$ předpisem

(52) $$Bx = \left\{\frac{1}{a}\, x^{(-n-h)} + \left[Q\left(\frac{1}{a}\, x^{(-n-h)}\right)\right]\right\}^{(n)},$$

kde $Q = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i\, W^{\times i}$, je právě A^{-1}. Buď tedy $x \in \mathbf{D}_{n+h}$, $X = x^{(-n-h)}$; pak platí

$$A^{-1}x - B_r x = \left[(Q - Q_r)\left(\frac{1}{a}\, x^{(-n-h)}\right)\right]^{(n)} = \\ = \left\{\int_0^t \left(Q(t, \tau) - Q_r(t, \tau)\right) \frac{1}{a(\tau)}\, X(\tau)\, d\tau\right\}^{(n)}.$$

Platí tedy

$$\|A^{-1}x - B_r x\|_n = \int_0^t \left| \int_0^\tau (Q(\tau, \sigma) - Q_r(\tau, \sigma)) \frac{1}{a(\sigma)} X(\sigma)\, d\sigma \right| d\tau .$$

Označíme-li $q(t) = \max_{0 \leqq \eta \leqq \xi \leqq t} |Q(\xi, \eta) - Q_r(\xi, \eta)|$, $\alpha(t) = \max_{0 \leqq \tau \leqq t} |a^{-1}(\tau)|$, máme z poslední rovnice

$$\|(A^{-1} - B_r)\, x\|_n \leqq \int_0^t q(\tau)\, \alpha(\tau) \int_0^\tau |X(\sigma)|\, d\sigma\, d\tau \leqq \alpha(t) \|x\|_{n+h} \cdot \int_0^t q(\tau)\, d\tau . \tag{53}$$

Dále platí $Q - Q_r = \sum_{i=r+1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i}$; podle rov. (33) tedy platí pro každé $\eta \leqq \xi \leqq t$:

$$|Q(\xi, \eta) - Q_r(\xi, \eta)| \leqq \sum_{i=r+1}^{\infty} M^i(t) |\xi - \eta|^{i-1}/(i-1)! .$$

Buď nyní $0 \leqq \tau \leqq t$; pak je

$$q(\tau) \leqq \sum_{i=r+1}^{\infty} M^i(\tau) \cdot \tau^{i-1}/(i-1)! \leqq \sum_{i=r+1}^{\infty} M^i(t) \cdot \tau^{i-1}/(i-1)! =$$

$$= M(t) \{\exp M(t)\, \tau - \sum_{i=0}^{r-1} M^i(t) \cdot \tau^i/i!\} .$$

Odtud je

$$\int_0^t q(\tau)\, d\tau \leqq \exp M(t)\, t - \sum_{i=0}^{r} M^i(t)\, t^i/i! .$$

Dosazením do (53) plyne okamžitě odhad (51).

Závěrem věnujme ještě několik slov aplikaci vyložené teorie k řešení integro-diferenciálních rovnic. Buď tedy dána rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} + \int_0^t W(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau = f , \tag{54}$$

kde $a_k \in \mathbf{F}_0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $a_n \not\equiv 0$ v $\langle 0, \infty)$, $W \in \mathbf{W}_0$, a reálná čísla $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

Je-li $f \in \mathbf{D}_r$, řekneme, že distribuce x je řešením rovnice (54) při počátečních podmínkách $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, jestliže

1. x patří do některého prostoru $\mathbf{D}_p$,
2. je splněna rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x^{(k)} - \sum_{i=0}^{k-1} c_i \delta_0^{(k-i-1)}) + [Wx] = f , \tag{55}$$

tj. všechny součiny na levé straně (55) mají smysl a jejich součet je roven f.

Snadno lze pak dokázat, že platí následující tvrzení:

Je-li f reálná, v $\langle 0, \infty)$ spojitá funkce, pak každé klasické řešení $x(t)$ [1]) *rovnice* (54), *definované jako $x(t) = 0$ pro $t < 0$, je zároveň distributivním řešením* (54) *při stejných počátečních podmínkách, klademe-li $f(t) = 0$ pro $t < 0$.*

Pomocí uvedené teorie lehko dokážeme následující větu:

Věta 23. *Buď $a_n \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$; existuje-li celé $m \geqq -n$ tak, že je $a_i \in \mathbf{F}_{\max[i+m,0]}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $W \in \mathbf{W}_{\max[m,0]}$, pak pro libovolnou distribuci $f \in \mathbf{D}_{n+m}$ a libovolnou soustavu počátečních podmínek $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ existuje jediné řešení rovnice* (54), *přičemž je $x \in \mathbf{D}_{\max[m,0]}$.*

Důkaz. Nechť tedy takové m existuje, a uvažme nejdříve případ, kdy $m \geqq 0$; pak je $a_i \in \mathbf{F}_{i+m}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $W \in \mathbf{W}_m$. Pak mají smysl součiny $a_k \sum_{i=0}^{k-1} c_i \delta_0^{(k-i-1)}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, takže rov. (55) možno psát ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} + [Wx] = f + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} c_i \delta_0^{(k-i-1)} . \tag{56}$$

Očividně pravá strana g v (56) patří do $\mathbf{D}_{n+m}$; podle věty 14 je však možno levou stranu (56) psát jako Ax, kde $A \in \mathfrak{A}_m^*$, $r(A) = n$, takže podle věty 16 je $x = A^{-1} g \in \mathbf{D}_m$, c. b. d.

Buď nyní $-n \leqq m < 0$ a položme $-m = r$; pak je $a_i \in \mathbf{F}_0$ pro $i = 0, 1, \ldots, r$; $a_i \in \mathbf{F}_{i-r}$ pro $i = r + 1, \ldots, n$; $W \in \mathbf{W}_0$. Zaveďme substituci

$$x = y^{(-r)} + PH_0 , \tag{57}$$

kde

$$P = \sum_{p=0}^{r-1} c_p t^p / p! , \quad y \in \mathbf{D}_0 ,$$

$$H_0(t) = 1 \quad \text{pro} \quad t > 0 , \quad H_0(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \leqq 0 .$$

Derivováním (57) nalezneme

$$x^{(q)} = y^{(q-r)} + P^{(q)} H_0 + \sum_{i=0}^{q-1} c_i \delta_0^{(q-i-1)} \quad \text{pro} \quad q = 1, 2, \ldots, r , \tag{58}$$

$$x^{(k)} = y^{(k-r)} + \sum_{i=0}^{r-1} c_i \delta_0^{(k-i-1)} \quad \text{pro } k = r + 1, \ldots, n .$$

Dosazením do (55) obdržíme

$$\sum_{k=r+1}^{n} a_k \Big(y^{(k-r)} - \sum_{i=r}^{k-1} c_i \delta_0^{(k-i-1)} \Big) + \sum_{k=0}^{r} a_k \big(y^{(k-r)} + P^{(k)} H_0 \big) + \big[W(y^{(-r)} + PH_0) \big] = f. \tag{59}$$

[1]) Funkci $x(t)$ nazýváme klasickým řešením rovnice (54), jestliže $x(t)$ má v $\langle 0, \infty)$ spojitou n-tou derivaci, (54) je splněna v každém bodě $\langle 0, \infty)$ a platí-li $x^{(i)}(0) = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Zřejmě součiny $a_k \sum_{i=r}^{k-1} c_i \delta_0^{(k-i-1)}$ mají pro $k = r + 1, \ldots, n$ smysl, takže (59) možno psát ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n-r} a_{r+k} y^{(k)} + [\tilde{W} y] = g , \tag{60}$$

kde

$$\tilde{W}(t, \tau) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k(t)\, U_{r-k}(t, \tau) + (W \times U_r)(t, \tau),$$

$$g = f + \sum_{k=r+1}^{n} a_k \sum_{i=r}^{k-1} c_i \delta_0^{(k-i-1)} - \sum_{k=0}^{r} a_k P^{(k)} H_0 - [W(PH_0)] .$$

Z těchto rovnic plyne, že $g \in \mathbf{D}_{n-r}$ a že levá strana (60) je Ay, kde $A \in \mathfrak{A}_0^*$; existuje tedy jediné $y = A^{-1} g \in \mathbf{D}_0$, vyhovující (60), a tedy podle (57) i jediné x, splňující (55). Věta je dokázána.

Literatura

[1] *Гальперин И.:* Введение в теорию обобщенных функций. Изд. иностр. лит., Москва 1954.

[2] *Doležal V.:* Über eine Klasse linearer Operatoren. Čas. pro pěst. matematiky, *86*, 1961, 200—232.

Резюме

ОБ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal), Прага

Статья посвящена исследованию определенного класса линейных операторов и представляет собой обобщение результатов работы [2].

Пусть $n \geqq 0$ — целое; пусть $\mathbf{D}_n$ — система всех обобщенных функций, которые обладают следующим свойством: для всякого $x \in \mathbf{D}_n$ существует на $(-\infty, \infty)$ определенная вещественная локально интегрируемая функция $X(t)$, почти всюду равная нулю на $(-\infty, 0)$ так, что $x = X^{(n)}$. Пусть, далее, $\mathbf{F}_n$ система всех вещественных функций, которые имеют в $\langle 0, \infty)$ непрерывную производную n-того порядка. Наконец, пусть W_n система всех вещественных функций $W(t, \tau)$, определенных для $t \geqq \tau \geqq 0$, которые имеют непрерывную производную $\dfrac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial \tau^n}$, причем $\left(\dfrac{\partial^i W(t, \tau)}{\partial \tau^i}\right)_{\tau = t} \in \mathbf{F}_{n-i-1}$ для $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Равенством (2) определяется тогда произведение ax, $a(t) \in \mathbf{F}_n$, $x \in \mathbf{D}_n$ и равенством (7) произведение $[Wx]$, где $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$, $x \in \mathbf{D}_n$. Теоремами 2—8 даются основные свойства про-

изведения $[Wx]$, которые формально аналогичны свойствам интеграла $\int_0^t W(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau$.

Пусть $\mathfrak{A}_n$ — система операторов A, определенных на $\mathbf{D}_n$ равенством $Ax = [Wx]^{(k)}$, $x \in \mathbf{D}_n$, $k \geqq 0$ целое; если, кроме того, функция $W(t, \tau)$ выполняет условия (6), то оператор A называется регулярным и определяется его порядок. Теоремами 11—13 даются свойства суммы и произведения введенных операторов, в особенности операторов регулярных. Далее доказана важная теорема 16 о том, что всякий регулярный оператор обладает обратным, который также является регулярным.

В дальнейшем вводится „норма" элемента $x \in \mathbf{D}_n$ равенством $\|f\|_n = \int_0^t |F(\tau)|\, d\tau$, и выведены ее основные свойства. Сходимость $x_k \rightrightarrows x$, x_k, $x \in \mathbf{D}_n$, $k = 1, 2, \ldots$ определяется равенством $\|x - x_k\|_n \to 0$. Теоремы 18, 19 утверждают, что всякий оператор $A \in \mathfrak{A}_n$ ограничен, линеен и непрерывен в смысле введенной нормы. Далее определяется равенством (38) „норма" оператора $A \in \mathfrak{A}_n$, и даются ее свойства. Эти результаты применяются потом к выведению некоторых оценок для приближенного построения обратного оператора. (Теоремы 20—22.)

В заключение применяется изложенная теория к решению интегро-дифференциального уравнения (54); результатом является теорема 23, которая представляет собой достаточные условия для существования единственного решения уравнения (54), когда f — обобщенная функция.

Zusammenfassung

ÜBER GEWISSE LINEARE OPERATOREN

Václav Doležal, Praha

Der Artikel ist der Untersuchung einer gewissen Klasse linearer Operatoren gewidmet, und stellt eine Verallgemeinerung der Ergebnisse der Arbeit [2] dar.

Es sei $n \geqq 0$ eine ganze Zahl; es sei $\mathbf{D}_n$ das System aller Distributionen, welche folgende Eigenschaft besitzen: für jedes $x \in \mathbf{D}_n$ gibt es eine auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte reelle lokal integrierbare und in $(-\infty, 0)$ fast überall verschwindende Funktion $X(t)$ derart, dass $x = X^{(n)}$ ist. Es sei ferner $\mathbf{F}_n$ das System aller reellen Funktionen, welche in $\langle 0, \infty)$ die stetige Ableitung n-ter Ordnung besitzen. Schliesslich sei $\mathbf{W}_n$ das System aller reellen Funktionen $W(t, \tau)$, welche für $t \geqq \tau \geqq 0$ definiert sind und dort die stetige Ableitung $\dfrac{\partial^n W(t, \tau)}{\partial \tau^n}$ besitzen, wobei $\left(\dfrac{\partial^i W(t, \tau)}{\partial \tau^i}\right)_{\tau = t} \in \mathbf{F}_{n-i-1}$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ist. Durch Gl. (2) wird das Produkt ax, $a(t) \in \mathbf{F}_n$, $x \in \mathbf{D}_n$, durch Gl. (7) das Produkt $[Wx]$, $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_n$, $x \in \mathbf{D}_n$ definiert. In den Sätzen 2—8 werden die grundlegenden Eigenschaften des Produktes $[Wx]$, welche formal den Eigenschaften des Integrals $\int_0^t W(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau$ analog sind, ausgesprochen.

Es sei $\mathfrak{A}_n$ das System aller Operatoren A, welche auf $\mathbf{D}_n$ durch die Gleichung $Ax = [Wx]^{(k)}$, $x \in \mathbf{D}_n$, $k \geqq 0$ ganzes, definiert sind; wenn ausserdem die Funktion $W(t, \tau)$ die Bedingungen (6) erfüllt, so heisst der betreffende Operator A regulär, wobei seine Ordnung definiert wird. In den Sätzen 11–13 werden die Eigenschaften der Summe und des Produktes der eingeführten Operatoren, insbesondere in dem Falle, wenn sie regulär sind, betrachtet. Ferner ist der wichtige Satz 16 bewiesen; er behauptet, dass zu jedem regulären Operator ein inverser existiert, welcher ebenfalls regulär ist.

Im Folgenden wird die „Norm" des Elementes $x \in \mathbf{D}_n$ durch die Gleichung $\|x\|_n = \int_0^t |X(\tau)| \, d\tau$ eingeführt, wobei ihre wichtigsten Eigenschaften angegeben sind. Die Konvergenz $x_k \rightrightarrows x$; x_k, $x \in \mathbf{D}_n$; $k = 1, 2, \ldots$ wird durch die Beziehung $\|x - x_k\|_n \to 0$ definiert. Die nachfolgenden Sätze 18, 19 behaupten, dass jeder Operator $A \in \mathfrak{A}_n$ beschränkt, linear und im Sinne der eingeführten Norm stetig ist. Ferner wird durch die Gl. (38) die „Norm" des Operators $A \in \mathfrak{A}_n$ definiert, wobei ihre Grundeigenschaften ermittelt sind. Die Resultate werden dann zur Ableitung einiger Abschätzungen, welche die angenäherte Konstruktion des inversen Operators betrachten, angewendet. (Sätze 20–22.)

Zum Schluss wird die aufgebaute Theorie zur Ermittlung von Lösung der Integrodifferentialgleichung (54) angewendet; als Resultat dessen erscheint der Satz 23, welcher die hinreichenden Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (54), falls f eine Distribution ist, darstellt.