Časopis pro pěstování matematiky

Oto Obůrka

Zum Studium der Umschwungstrahlflächen mittels der Methode der Differentialgleichungen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 63--75

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117414`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ZUM STUDIUM DER UMSCHWUNGSTRAHLFLÄCHEN MITTELS DER METHODE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

OTO OBŮRKA, Brno

(Eingegangen am 19. Oktober 1960)

In der vorliegenden Arbeit soll bewiesen werden, dass das System der Differentialgleichungen (1) im dreidimensionalen Raum — bis auf Kollineationen — nichtabwickelbare Regelflächen charakterisiert, die durch Rotation einer Geraden um die o-Achse bei gleichzeitiger harmonischer Schwingung in der o-Richtung erzeugt werden können (W. KAUTNYsche „Umschwungstrahlflächen"). Da auf diesen Flächen, die offenbar in der Kinematik eine wichtige Rolle spielen, die uneigentliche Kurve sowie die Striktionslinie bikonjugierte Leitkurven der Fläche nach A. TERRACINI darstellen, können diese zwei Kurven als Grundkurven eines einzigen R-Systems von Kurven auf der Fläche gewählt werden, deren Tangenten die Segresche W-Kongruenz bilden. Dadurch wird eine gewisse beachtenswerte asymptotische Transformation der Flächen des angeführten Typus definiert, die in einer folgenden Arbeit studiert werden wird.

1. Einleitung. Gegeben sei das System der Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{hn^2 \sin nt}{\omega}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{ahn^2 \sin nt}{\omega} z\,, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{b}{\omega}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \left(1 + \frac{ab}{\omega}\right) z\,,$$

in welchen die Grössen a, b, h, n Konstanten darstellen, t die unabhängige Veränderliche und $\omega = hn \cos nt - ab \neq 0$ ist. Durch Elimination von z aus den beiden Gleichungen des gegebenen Systems (1) entsteht eine gewöhnliche lineare und homogene Differentialgleichung vierter Ordnung für y, und analog entsteht durch Elimination von y eine Gleichung für z. Seien nun $y^{(i)}, z^{(i)}$ (wobei $i = 1, 2, 3, 4$) die vier Lösungen der ersten bzw. der zweiten dieser Gleichungen vierter Ordnung, und zwar die linear unabhängigen Fundamentalsysteme, wobei jedes Paar $y^{(i)}$ und $z^{(i)}$ mit festem i das System (1) erfüllt.

Die weitere Voraussetzung sei ein euklidischer Raum E_3 mit einem kartesischen Koordinatensystem $(O\vec{x}\vec{y}\vec{z})$, in welchem die Koordinaten eines Punktes durch

$$\frac{x^{(1)}}{x^{(4)}},\ \frac{x^{(2)}}{x^{(4)}},\ \frac{x^{(3)}}{x^{(4)}} \quad \text{mit} \quad x^{(4)} \neq 0$$

gegeben sind. Nebstdem sei S_3 ein projektiver Raum, der aus E_3 durch Erweiterung um die Punkte der uneigentlichen Ebene $x^{(4)} = 0$ entsteht, so dass also $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ (nicht alle gleich Null) homogene Koordinaten des Punktes x dieses erweiterten Raumes darstellen. Dann beschreibt der Punkt y bei veränderlichem t eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, die wir als Linie C_y bezeichnen wollen; ähnlicherweise beschreibt der Punkt z die Linie C_z. Die Verbindungslinie beider Punkte y, z (die zu demselben t gehören) ist die Gerade $p = [y, z]$, welche die Regelfläche R_{yz} mit den Leitkurven C_y, C_z erzeugt. Der Kürze wegen werden wir die Fläche R_{yz} als Integralregelfläche des Systems (1) bezeichnen. Daraus ist leicht zu ersehen, dass man

$$
\begin{aligned}
y &= \left(y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}\right) = (a \cos t, a \sin t, h \sin nt, 1), \\
z &= \left(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}\right) = (-\sin t, \cos t, b, 0)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

setzen kann.

Der Punkt z ist also ein uneigentlicher Punkt der Geraden $p = [y, z]$ der Fläche ϑ, d. h. ihre Leitkurve C_z ist eine uneigentliche Kurve der Fläche (ihre Kurve im Unendlichen). Ein anderer beliebiger Punkt x der Geraden p stellt die lineare Kombination der Punkte y, z von der Form

$$x = y + uz \tag{3}$$

dar, wobei u der zweite Parameter des Punktes x auf der Fläche ist. Wenn wir die Gleichung (3) schrittweise für alle Koordinaten des Punktes x entwickeln, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= a \cos t - u \sin t, \quad x^{(2)} = a \sin t + u \cos t, \\
x^{(3)} &= h \sin nt + bu, \quad x^{(4)} = 1.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Werden nun die Koordinaten $x^{(i)}$ (wobei $i = 1, 2, 3$) als rechtwinklige kartesische Koordinaten im S_3 interpretiert und ersetzt man in (4) die Bezeichnung laut der Gleichungen $t = \sigma$, $u = v$, dann sind die Gleichungen (4) identisch mit jenen der Arbeit [3], Seite 170. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Satz 1. *Die Integralregelflächen R_{yz} der Differentialgleichungen des Systems* (1) *sind projektiv äquivalent den Flächen, die durch gleichzeitige Rotation einer Geraden und ihre Schwingung in Richtung der Rotationsachse entstehen* (W. Kautnysche „*Umschwungstrahlflächen*"). *Dabei haben die Konstanten a, b, h, n die gleiche Bedeutung wie dieselben in der Arbeit W. Kautnys* [3].

Auf Grund der Anwendung klassischer Formeln der Flächentheorie des euklidischen Raumes ist in der erwähnten Arbeit eine ganze Menge von Eigenschaften des angeführten Flächentypus erforscht worden. So erscheinen dort beide quadratische Differentialgrundformen und wird das System der asymptotischen Linien bestimmt. Das Studium des Netzes der Krümmungslinien auf der Fläche ist jedoch nicht durchgeführt worden.

Zwei der asymptotischen Linien (sog. *Liesche Asymptotenlinien*) der Fläche R_{yz} sind nach einem bekannten Satz die *Komplexkurven* der Fläche (WILCZYNSKISCHE

„*involute curves*") und deshalb kann man sie ohne Integration bestimmen, weil die Fläche dem linearen Komplex Ω von der Gleichung in Plückerschen Koordinaten

$$bp_{12} + ap_{34} = 0$$

angehört. Tatsächlich ist nach (2)

$$p_{12} = \begin{vmatrix} y^{(1)}, & z^{(1)} \\ y^{(2)}, & z^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t, & -\sin t \\ a \sin t, & \cos t \end{vmatrix} = a\,,$$

$$p_{23} = \begin{vmatrix} y^{(3)}, & z^{(3)} \\ y^{(4)}, & z^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h \sin nt, & b \\ 1 & , 0 \end{vmatrix} = -b\,.$$

Die Komplexkurven werden dann durch den Punkt $y + uz$ umschrieben, wo u den einen oder den anderen Wurzelwert der Gleichung

$$a\omega - bu^2 = 0 \tag{5}$$

bezeichnet (siehe [3], Seite 186, Gl. (23)). Wir erwähnen noch, dass unter Voraussetzung kartesischer Koordinaten die C_y-Linie eine Trajektorie der erzeugenden Bewegung des Punktes $(a, 0, 0)$ ist; sie ist gleichzeitig eine Striktionslinie der Fläche.

Die Flächen können – analog zu den Schraubflächen – in offene $(a \neq 0)$, geschlossene $(a = 0)$, schiefe $(b \neq 0)$ und gerade $(b = 0)$ Flächen eingeteilt werden.

Da für die Konstante b die Beziehung $b = \operatorname{cotg} \gamma$ gilt, wo γ die Abweichung der Erzeugenden von der $\vec{z}$-Achse des Koordinatensystems darstellt, hat die Fläche einen Rotationsrichtkegel mit der Achse $\vec{z}$, so dass C_z entweder ein uneigentlicher Kreis oder eine uneigentliche Gerade ist. Daraus folgt, dass die Fläche der Zentraltangenten der Fläche R_{yz} von demselben Typ mit denselben Werten der Konstanten a, n, h ist, wobei nur die Konstante b durch die Konstante $-1/b$ ersetzt wird.

Vom Standpunkt der projektiven Geometrie aus gesehen, beruht das Studium der Integralfläche R_{yz} bekanntlich (siehe [2], Kap. IV) auf dem System der Differentialgleichungen ([2], Seite 186, Gleichungen (11))

$$\begin{aligned} y'' &= (\Theta' - 2\bar{b})\, y' + 2\bar{a}z' + (-\bar{b}' + \bar{b}\Theta' + \bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 - B - j)\, y + \\ &\quad + (\bar{a}' - \bar{a}\Theta' + A)\, z\,, \\ z'' &= -2\bar{c}y' + (\Theta' + 2\bar{b})\, z' + (-\bar{c}' + \bar{c}\Theta' - C)\, y + \\ &\quad + (b' - b\Theta' + \bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 + B - j)\, z\,. \end{aligned} \tag{6}$$

(Hier ist an Stelle der Bezeichnungen a, b, c die Bezeichnung $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ gewählt worden, damit keine Kollision mit der Bezeichnung der Koeffizienten im System (1) entstehen könnte.)

Durch Vergleich der Koeffizienten von (1) und (6) erhalten wir

$$\Theta' - 2\bar{b} = -\frac{hn^2 \sin nt}{\omega}\,, \quad 2\bar{a} = a\,, \tag{7}$$

$$-\bar{b}' + \bar{b}\Theta' + \bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 - B - j = 0\,,$$

$$\bar{a}' - \bar{a}\Theta' + A = \frac{ahn^2 \sin nt}{\omega},$$

$$-2\bar{c} = \frac{b}{\omega}, \quad \Theta' + 2\bar{b} = 0, \quad -\bar{c}' + \bar{c}\Theta' - C = 0,$$

$$\bar{b}' - \bar{b}\Theta' + \overline{ac} - \bar{b}^2 + B - j = -\left(1 + \frac{ab}{\omega}\right).$$

Aus diesem System folgt nun

$$\Theta' = -\frac{1}{2}\frac{hn^2 \sin nt}{\omega}, \quad \bar{a} = \frac{a}{2}, \quad \bar{b} = \frac{1}{4}\frac{hn^2 \sin nt}{\omega}, \tag{8}$$

$$\bar{c} = -\frac{1}{2}\frac{b}{\omega}, \quad A = \frac{3}{4}\frac{ahn^2 \sin nt}{\omega},$$

$$B = -\frac{hn}{8\omega^2}\left[2\omega(n^2 + 2)\cos nt + 3hn^3 \sin^2 nt\right],$$

$$C = \frac{3}{4}\frac{bhn^2 \sin nt}{\omega^2},$$

$$j = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{ab}{\omega} - \frac{1}{16}\frac{h^2n^4 \sin^2 nt}{\omega^2}.$$

Aus diesen Formeln erhalten wir die Ausdrücke für die Diskriminanten

$$\bar{b}^2 - \overline{ac} = \frac{1}{4}\frac{ab}{\omega} + \frac{1}{16}\frac{h^2n^4 \sin^2 nt}{\omega^2} \tag{9}$$

und

$$B^2 - AC = \frac{h^2n^2}{64\omega^4}\left[2\omega(n^2 + 2)\cos nt + 3hn^3 \sin^2 nt\right]^2 - \frac{9}{16}\frac{abh^2n^4 \sin^2 nt}{\omega^3}. \tag{10}$$

Dabei ist der Determinant

$$\omega = [y, z, y', z'] = nh \cos nt - ab, \tag{11}$$

und

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\log|nh \cos nt - \omega|.$$

1. Die Gleichung $\omega = 0$, oder auch

$$nh \cos nt - ab = 0, \quad \text{d. i.} \quad t = \frac{1}{n}\arccos\frac{ab}{nh} \tag{12}$$

charakterisiert die Torsalgeraden der Fläche. Die Voraussetzung über $\omega \neq 0$ ist also mit jener äquivalent, dass die betrachtete Erzeugende $[y, z]$ der Fläche R_{yz} keine Torsalgerade ist.

2. Wie bereits bekannt, stellt die Gleichung

$$u' + \bar{a} + 2\bar{b}u + \bar{c}u^2 = 0 \tag{13}$$

die Riccatische Differentialgleichung des Systems der Asymptotenlinien der Fläche dar (verschieden vom System der erzeugenden Geraden); oder mit anderen Worten ausgedrückt, die Linie C_{y+uz}, die durch den Punkt $y + uz$ erzeugt wird, ist gerade dann eine Asymptotenlinie dieses Systems, wenn u die Lösung der Gleichung (13) ist. Aus den Lösungseigenschaften der Gleichung von Riccati folgt, dass die Systemlinien auf den Erzeugenden projektive Punktreihen bestimmen. Systeme von Flächenlinien, welche diese Eigenschaften aufweisen, werden wir als Riccatische Systeme (Doppelverhältnissysteme) bezeichnen; demnach gehört zu diesen auch das System der Asymptotenlinien der Fläche.

3. Die Gleichung

$$F(u) \equiv A + 2Bu + Cu^2 = 0\,, \tag{14}$$

deren linke Seite die sogenannte fleknodale quadratische Form $F(u)$ der Fläche R_{yz} darstellt, charakterisiert ein Paar sogenannter Fleknodallinien der Fläche; anders gesagt, die Linie C_{y+uz} ist gerade dann eine Fleknodalkurve, wenn u die Lösung der Gleichung (14) ist. (Das Verschwinden des Diskriminantes (10) stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dar, dass die beiden Fleknodalkurven zusammenfallen.)

2. *R*-Systeme von Kurven auf der Fläche R_{xy}. Mit der Theorie der R-Systeme von Kurven auf nichtabwickelbaren Regelflächen haben sich eingehend der rumänische Mathematiker O. Mayer [6] und der deutscke Mathematiker M. Barner [1] befasst. Aus der Fülle der im Zusammenhang mit diesen Systemen definierter Begriffe wollen wir wenigstens den Begriff des sogenannten Grundkurvenpaares des R-Systems anführen. Ist nämlich

$$u' + \alpha + 2\beta u + \gamma u^2 = 0 \tag{15}$$

die Riccatische Gleichung des erwogenen R-Systems, das mit dem System der Asymptotenlinien nicht identisch ist, dann ist

$$\alpha - \bar{a} + 2(\beta - \bar{b})\, u + (\gamma - \bar{c})\, u^2 = 0 \tag{16}$$

die Gleichung beider Grundkurven des erwogenen R-Systems. Offenbar ist dies der Ort der Punkte der Fläche R_{yz}, in welchen die Tangente der Systemlinie eine asymptotische Tangente der Fläche ist.

Auf der Fläche R_{xy} existieren einige bedeutsame R-Systeme, die für unsere weiteren Erwägungen von grundsätzlicher Wichtigkeit sind.

a) Vor allem ist dies das Liniensystem von der Gleichung

$$u' = 0 \tag{17}$$

das ist mit $u =$ konst. Die Linie C_{y+uz} dieses Systems weist eine einfache geometrische Bedeutung auf: Jeder Punkt $y + uz$ dieser Linie hat dieselbe Entfernung vom Zentralpunkt y der Erzeugenden $[y, z]$, auf dieser Geraden gemessen. Wir können also sagen, dass diese Kurven ein System der Äquidistanten der Striktionslinie darstellen. Und tatsächlich, weil doch die Koordinaten des Punktes $z = (-\sin t, \cos t, b, 0)$ (siehe Gl. (2)) die Relation

$$(-\sin t)^2 + \cos^2 t + b^2 = 1 + b^2 = \text{konst} \neq 0\,,$$

erfüllen, sind diese die mit dem Faktor $(1 + b)^{\frac{1}{2}}$ multiplizierten Richtungskosinusse der Erzeugenden, so dass also u die mit dem konstanten Faktor $(1 + b)^{-\frac{1}{2}}$ multiplizierte Entfernung des Punktes $y + uz$ vom Zentralpunkt y darstellt.

Ist nun $x = y + uz$ die parametrische Darstellung der Fläche R_{yz}, dann bilden die Geraden $t =$ konst das eine Liniensystem des Koordinatennetzes und die Äquidistanten $u =$ konst das andere System. Das Grundkurvenpaar des Äquidistantensystems hat nach (13) und (18) die Gleichung

$$\bar{a} + 2\bar{b}u + \bar{c}u^2 = 0\,, \tag{18}$$

oder

$$a\omega + hn^2 \sin ntu - bu^2 = 0\,. \tag{19}$$

Auf Grund des Vergleiches mit (5) folgt

Satz 2. *Das Linienpaar, das sich aus der Striktionslinie und aus der uneigentlichen Linie der Fläche R_{yz} zusammensetzt, das Paar ihrer Komplexlinien, sowie das Grundkurvenpaar des Äquidistantensystems (mit der Striktionslinie) bilden drei Linienpaare einer und derselben quadratischen Involution der Flächenlinien.*

b) Als zweites bedeutsames R-System der R_{yz}-Fläche bestimmen wir das System $u = u(t)$ der Orthogonaltrajektorien des Systems der erzeugenden Geraden. Zu diesem Zwecke stellen wir die Riccatische Gleichung dieses Systems auf, und zwar so, dass wir die Summen der Produkte der Richtungsparameter der erzeugenden Geraden $[y, z]$ und der Tangente der Linie C_{y+uz} (d. i. die Summe der Koordinatenprodukte der uneigentlichen Punkte z und $(y + uz)'$) gleich Null setzen. Es ist

$$z = (-\sin t, \cos t, b, 0)\,,$$
$$(y + uz)' = (-a \sin t - u' \sin t - u \cos t, a \cos t + u' \cos t - u \sin t,$$
$$nh \cos nt + u'b, 0)\,;$$

die gesuchte Gleichung erhält also die Form

$$u' + \frac{a + bnh \cos nt}{1 + b^2} = 0\,. \tag{20}$$

Aus Gleichung (20) ist ersichtlich, dass das Äquidistantensystem ein System von orthogonalen Trajektorien gerade dann bildet, wenn $a = b = 0$ ist, das ist also dann, wenn die Fläche R_{yz} eine geschlossene und gerade Fläche ist.

c) Zu weiteren wichtigen R-Systemen der Fläche R_{yz} führt die beachtenswerte Eigenschaft des Linienpaares C_y, C_z, von welchen die erste eine Striktionslinie und die zweite eine uneigentliche Linie der Fläche R_{yz} ist. Es gilt demnach

Satz 3. *Die Striktionslinie und die uneigentliche Linie der Fläche R_{yz}, welche durch Rotation der Geraden $[y, z]$ bei gleichzeitiger Schwingung in Richtung der Rotationsachse entstand, bilden ein nach* A. TERRACINI *konjugiertes Leitlinienpaar der Fläche.*

A. Terracini definierte in seiner Arbeit [7] aus dem Jahre 1949 die Konjugiertheit zweier Leitlinien C_y, C_z einer nichtabwickelbaren Regelfläche R_{yz} auf eine ziemlich komplizierte Weise, und zwar entweder auf Grund der Abbildung des Geradenraumes in die Kleinsche quadratische Hyperfläche eines projektiven fünfdimensionalen Raumes, oder durch die Anwendung eines quadratischen Komplexes, welcher Tangentenbüschel der Fläche im Punkt y und in weiteren zwei unendlich benachbarten Punkten der Linie C_y enthält; und auch ähnlich im Punkt z und in weiteren zwei unendlich benachbarten Punkten der Linie C_z.

Eine einfachere und anschauliche Definition der Terracinischen Konjugiertheit zweier Leitlinien ist im Satz von J. BREJCHA aus dem Jahre 1958 enthalten, den man wie folgt formulieren kann:

Zwei (nichtasymptotische, nichtfleknodale) Leitlinien C_y, C_z der Regelfläche R_{yz} mit verschiedenen fleknodalen Linien sind nach Terracini gerade dann konjugiert, wenn beide durch dieselben bestimmte Riccatische Systeme L_1 und L_2 nach Dupin konjugiert sind.

Dabei versteht man unter dem System L_1 bzw. L_2 ein Riccatisches Liniensystem, dessen beide Grundkurven fleknodal sind und das die Linie C_y $(u = 0)$ bzw. die Linie C_z $(u = \infty)$ enthält. Man erinnere sich, dass L_1 bzw. L_2 nichts anderes darstellt, als nach Terracini zu C_z bezw. zu C_y assoziierte Kurvensysteme, d. h. mit C_z resp. C_y konjugierte Kurvensysteme (siehe [7]). Die Differentialgleichungen der Systeme L_1 und L_2 erscheinen dann mühelos in der Form

$$(21) \qquad L_1\colon\ u' + \left(\frac{hn^2 \sin nt}{\omega} + \frac{1}{3}\frac{n^2+2}{n}\operatorname{cotg} nt\right) u - \frac{b}{\omega} u^2 = 0\,,$$

$$L_2\colon\ u' + a - \frac{1}{3}\frac{n^2+2}{n}\operatorname{cotg} nt \,.\, u = 0\,.$$

Zum Beweis des Satzes 3 ist demnach notwendig und hinreichend (nach dem Satz von Brejcha) zu beweisen, dass die Systeme L_1 und L_2, die durch die Differentialgleichungen (21) von Riccati gegeben sind, konjugierte Systeme sind, d. h. dass die Tangentenpaare zu den Linien des Systems L_1 und L_2, die durch den allgemeinen Punkt $x = y + uz$ der Fläche hindurchgehen, das aus der asymptotischen Tangente im Punkte x und der erzeugenden Geraden, welche gleichfalls durch den Punkt x hindurchgeht, zusammengesetztes Paar harmonisch teilen.

Die Werte u' für diese Flächenlinien im Punkte x sind gemäss den Differentialgleichungen (21) und gemäss der Differentialgleichung der Asymptotenlinie der R_{yz}-Fläche ϑ durch folgende Beziehungen gegeben

$$u_1' = -\left(\frac{hn^2 \sin nt}{\omega} + \frac{1}{3}\frac{n^2+2}{n}\operatorname{cotg} nt\right)u + \frac{b}{\omega}u^2\,, \tag{22}$$

$$u_2' = -a + \frac{1}{3}\frac{n^2+2}{n}\operatorname{cotg} nt\,.\,u\,,$$

$$u_3' = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{hn^2 \sin nt}{\omega}u + \frac{1}{2}\frac{b}{\omega}u^2\,;$$

$$\infty\,.$$

Das Doppelverhältnis dieses Quadrupels ist

$$\frac{u_1' - u_3'}{u_2' - u_3'} = -1\,,$$

womit die Konjugiertheit beider Systeme L_1 und L_2, die durch die Riccatische Gleichungen (21) gegeben sind, zur Gänze als bewiesen erscheint. Hiemit ist auch Satz 3 als bewiesen zu betrachten.[1])

Fügen wir noch hinzu, dass die Striktionskurve C_y sowie die uneigentliche Kurve C_z von Flächen der erwogenen Art *nicht nur konjugiert, sondern sogar bikonjugiert* nach A. Terracini sind. Aus den Gleichungen (8) folgt nämlich, dass der Ausdruck

$$N = \bar{a}'\bar{c} - \bar{a}\bar{c}' + 4\bar{a}\bar{b}\bar{c} \tag{24}$$

gleich Null ist, und deshalb gilt ebenfalls die Beziehung

$$3\varrho' N - \varrho N' + 12NB = 0\,, \tag{25}$$

wobei

$$\varrho = \frac{A}{\bar{a}} = -\frac{C}{\bar{c}} \tag{26}$$

ist. Die Beziehung (25) ist jedoch eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Bikonjugiertheit der Leitlinien C_y, C_z der Fläche R_{yz} (siehe J. Klapka [5], Seite 164). Die Behauptung ist hiemit als bewiesen zu betrachten.

---

[1]) Der Beweis des Satzes 3 könnte auch in kürzerer Form durch die Anwendung des Satzes 3,1 der Arbeit [5], Seite 163, durchgeführt werden. Der besagte Satz lautet nämlich:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konjugiertheit der Leitkurven C_y u. C_z der Integralfläche R_{yz} des Systems (6) *stellt die Gleichung*

$$\bar{a}C + \bar{c}A = 0 \tag{23}$$

dar. Die Gleichung (23) lässt sich auch tatsächlich leicht aus dem Gleichungssystem (8) ableiten. Die Kürze dieses Beweises ist jedoch nur eine scheinbare, denn sie setzt die Kenntnis der Bedeutung der Gleichung (23) voraus. Der früher durchgeführte Beweis wendet mehr geometrische Begriffe an, wie zum Beispiel Terracinische assoziierte Systeme L_1, L_2. Ihre Gleichungen wurden abgeleitet und ihre Konjugiertheit bewiesen als Beispiel für die Anwendbarkeit des Satzes von J. Brejcha zum Studium eines konkreten Falles.

3. Transformation der Fläche R_{yz} mittels der Kongruenz W. Der Satz 3 ermöglicht die Einführung einer einfachen Transformation der Fläche R_{yz} mittels der Kongruenz W. Die Theorie der Segreschen W-Kongruenzen (d. i. der Geradenkongruenzen, deren beide fokale Flächen Regelflächen sind) hängt wiederum eng mit der Theorie der R-Systeme von Kurven auf den Regelflächen zusammen (siehe z. B. [4]). Es gilt der bekannte Satz (siehe [5], Seite 171):

Die Tangenten zu den Linien des R-Systems auf einer Regelfläche R_{yz} bilden eine Segresche W-Kongruenz, für welche die Fläche R_{yz} eine der fokalen Flächen gerade dann ist, wenn das R-System axial ist.[2])

In der angeführten Arbeit sind die *notwendigen sowie hinreichenden Bedingungen der Axialität* des R-Systems (Seite 172) erwogen worden und aus diesen Erwägungen folgt, dass

1. *diese Bedingungen zwei sind* und dass

2. *eine von ihnen dahin lautet, dass die Grundkurven des R-Systems nach A. Terracini konjugiert sind* (diese Grundkurven bilden ein Paar sogenannter Hauptkurven der Kongruenz auf der fokalen Fläche R_{yz} (siehe Klapka [5], Seite 173). Wählen wir also deshalb die Striktionskurve C_y sowie die uneigentliche Kurve C_z der Fläche R_{yz} als Grundkurven des R-Systems. Solcher Systeme von der Differentialgleichung

$$u' + \alpha + 2\beta u + \gamma u^2 = 0$$

gibt es unendlich viel, denn für die drei Koeffizienten α, β, γ gibt die angeführte Bedingung nur zwei Beziehungen an, nämlich

$$\alpha = \bar{a}\,, \quad \gamma = \bar{c}\,, \tag{27}$$

während also β beliebig wählbar bleibt. Unter allen diesen R-Systemen existiert nur ein einziges axiales, und zwar für

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{n^2 h \sin nt}{\omega}\,. \tag{28}$$

Das folgt leicht aus der angeführten Arbeit [5], Seite 172, Gleichung (5,1*), wo die Bedingung für die Axialität des R-Systems unter ganz allgemeinen Voraussetzungen gegeben wird. Die Differentialgleichung des betrachteten axialen R-Systems lautet dann

$$u' + \frac{a}{2} - \frac{hn^2 \sin nt}{\omega}\,u - \frac{1}{2}\frac{b}{\omega}\,u^2 = 0\,. \tag{29}$$

---

[2]) D. i. also dann, wenn die biquadritische Charakteristik eines jeden Hyperboloides, welches durch die Tangenten zu den Linien des R-Systems längs $[y, z]$ gebildet wird, in ein Quadrupel von Geraden zerfällt.

Die bisherigen Ergebnisse fasst folgender Satz zusammen:

Satz 4. *Es existiert gerade eine Segresche W-Kongruenz, für welche die Fläche R_{yz} eine der beiden fokalen Regelflächen ist und in welcher weiters die Striktionslinie und die uneigentliche Linie der Fläche R_{yz} die Grundkurven bilden. Diese W-Kongruenz wird durch die Tangenten zu den Linien des axialen R-Systems von der Gleichung* (29) *gebildet.*

Die weitere Frage lautet dahin, wie man die zweite fokale Fläche der betrachteten Kongruenz bestimmen soll, oder mit anderen Worten, es soll diejenige Fläche bestimmt werden, die aus der Fläche R_{yz} durch Transformation mittels dieser W-Kongruenz entsteht.

Zu diesem Zwecke führen wir an, dass zu jedem Punkte $x = y + uz$ der fokalen Fläche R_{yz} ein Punkt X der zweiten fokalen Fläche R^*_{YZ} korrespondiert und zwar so, dass die Verbindungslinie $[x, X]$ eine Kongruenzgerade darstellt, also eine Tangente der Linie des axialen R-Systems von der Gleichung (29) ist. Man kann setzen

$$X = m(y + uz) + y' + u'z + uz' ,$$

das ist nach Gleichung (29)

$$X = m(y + uz) + y' - \left(\frac{a}{2} - \frac{n^2 h \sin nt}{\omega} u - \frac{1}{2}\frac{b}{\omega} u^2\right) z + uz' , \tag{30}$$

wobei m so gewählt werden muss, dass sich X als ganze lineare Funktion des Parameters u darstellt, d. h. dass der Punkt X bei der Variation von u eine Gerade der fokalen Fläche R^*_{YZ} beschreibt. Es ist also erforderlich und hinreichend, dass die Koeffizienten bei z sowie bei y in der Gleichung (30) linear sind. Die Linearität des Koeffizienten bei z führt zur Gleichung

$$mu - \frac{a}{2} + \frac{n^2 h \sin nt}{\omega} u + \frac{1}{2}\frac{b}{\omega} u^2 = r + su , \tag{31}$$

das ist zu

$$m = \frac{r + \frac{a}{2} + \left(s - \frac{n^2 h \sin nt}{\omega}\right) u - \frac{1}{2}\frac{b}{\omega} u^2}{u} . \tag{32}$$

Die Linearität des Koeffizienten bei y führt zur Bedingung

$$r + \tfrac{1}{2}a = 0 , \quad \text{d. i.} \quad r = -\tfrac{1}{2}a . \tag{33}$$

Der Punkt der zweiten fokalen Fläche R^*_{YZ}, der auf dem Kongruenzstrahl dem Punkte $x = y + uz$ der fokalen Fläche R_{yz} korrespondiert, ist der Punkt $X = Y + uZ$, wobei

$$Y = \left(s - \frac{n^2 h \sin nt}{\omega}\right) y - \frac{a}{2} z + y' , \tag{35}$$

$$Z = -\frac{1}{2}\frac{b}{\omega} y + sz + z' .$$

Für die Bestimmung des Koeffizienten s ist es erforderlich und hinreichend auszudrücken, dass die Tangentialebene im Punkte $X = Y + uZ$ der fokalen Fläche R^*_{YZ} den korrespondierenden Punkt $x = y + uz$ enthält. Das bedeutet, dass

$$(36) \qquad [Y, Z, Y' + uZ', y + uz] = 0 .$$

Weil folgende Beziehungen gelten

$$(37) \qquad Y' = \left(s' - \frac{\omega n^3 h \cos nt + n^4 h^2 \sin^2 nt}{\omega^2}\right) y + \frac{a}{2} z' + \frac{ahn^2 \sin nt}{\omega} . z ,$$

$$Z' = -\frac{1}{2} b \left(\frac{1}{\omega}\right)' y + \left[s' - \left(1 + \frac{ab}{\omega}\right)\right] z + \frac{1}{2} \frac{b}{\omega} y' + sz' ,$$

kann man aus (36) den Wert s in der Form

$$(38) \qquad s = \frac{n^2 h \sin nt}{\omega} + \frac{1}{3}\left(n - \frac{1}{n}\right) \operatorname{cotg} nt$$

bestimmen. Dann ist nach (32)

$$(39) \qquad m = \frac{1}{3}\left(n - \frac{1}{n}\right) \operatorname{cotg} nt - \frac{1}{2} \frac{b}{\omega} u .$$

Es kann also folgender Satz ausgesprochen werden:

Satz 5. *Die zweite fokale Fläche R^*_{YZ} wird durch die Gerade $[Y, Z]$ erzeugt, wobei*

$$Y = \frac{1}{3}\left(n - \frac{1}{n}\right) \operatorname{cotg} nt . y - \frac{a}{2} z + y' ,$$

$$Z = -\frac{1}{2} \frac{b}{\omega} y + \left[\frac{n^2 h \sin nt}{\omega} + \frac{1}{3}\left(n - \frac{1}{n}\right) \operatorname{cotg} nt\right] z + z'$$

ist. Dabei sind die Linien C_Y und C_Z, welche durch die Punkte Y und Z auf der Fläche R^*_{YZ} erzeugt werden, Hauptlinien, die mit den Hauptlinien C_y und C_z der ersten fokalen Fläche R_{yz} korrespondieren. Die Punkte $y + uz$ und $Y + uZ$ sind in gegenseitiger Korrespondenz, d. h. sie bestimmen die Gerade der Segreschen W-Kongruenz, welche die Transformation $R_{yz} \to R^*_{YZ}$ vermittelt.

Dieses Ergebnis kann leicht auf eine andere Weise verifiziert werden. Es stellt sich leicht heraus, dass bei sich änderendem Wert von u die Schmiegebene der Kurve C_{y+uz} des axialen R-Systems von der Gleichung (29) ein Ebenenbüschel mit dem Träger $[YZ]$ erzeugt, d. h. dass die Determinanten

$$[y + uz, (y + uz)', (y + uz)'', Y] ,$$
$$[y + uz, (y + uz)', (y + uz)'', Z]$$

unter Voraussetzung von (29) identisch gleich Null sind, was eine bekannte charakteristische Eigenschaft der Segreschen W-Kongruenz darstellt.

Das Studium der transformierten Fläche R^*_{YZ} wird in einer weiteren Arbeit besprochen werden.

Für die wertvollen Anregungen sowie viele Ratschläge danke ich Herrn Prof. Dr. JIŘÍ KLAPKA, *in dessen Seminar der Differentialgeometrie in Brno diese Arbeit entstand.*

Literatur

[1] *Barner Martin*: Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Mathem. Zeitschrift, Bd. *62*, 1955, 50—93.

[2] *Fubini G., Čech E.*: Geometria proiettiva differenziale. Tomo I, Bologna, Zanichelli 1926.

[3] *Kautny Walter*: Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatshefte f. Mathematik, Bd. *63*, 1959, 169—188.

[4] *Klapka Jiří*: Sur les congruences *W* dont les surfaces focales sont réglées. Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk Brno, No. *69*, 1926, 1—31 (tschechisch mit franz. Zusammenfassung).

[5] *Klapka Jiří*: Über Paare von konjugierten Kurven einer Regelfläche. Publications de la Faculté des sciences Brno, No. *393*, 1958, 161—188.

[6] *Mayer Octave*: Étude sur les surfaces réglées. Buletinul Facultatii de stiinte din Cernăuţi, Volumul *II*, Cernăuţi 1928, 1—33.

[7] *Terracini Alessandro*: Direttrici congiunte di una rigata. Rendiconti del Seminario Matematico, Università e politecnico di Torino, Vol. *9*, 1949—1950, 325—342.

Výtah

KE STUDIU KAUTNYHO PŘÍMKOVÝCH PLOCH METODOU DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

OTO OBŮRKA, Brno

Hledáme-li k systému diferenciálních rovnic (1) příslušnou nerozvinutelnou přímkovou plochu R_{yz} projektivního prostoru S_3 ve smyslu teorie E. J. WILCZYNSKÉHO, snadno nalezneme, že je to (až na kolineace) plocha, definovaná W. KAUTNYM v práci [3] jakožto plocha vytvořená rotací přímky při současném jejím harmonickém kmitání ve směru osy rotace. Zatím však co W. Kautny se omezil na studium plochy R_{yz} pomocí prvé a druhé základní diferenciální kvadratické formy klasické diferenciální geometrie, přináší tato práce mnoho faktů o vyšších oskulačních útvarech plochy, o jejích čarách fleknodálních a komplexových, o soustavách R čar na ploše atd. Zvláště zajímavé je zjištění, že strikční a nevlastní křivky plochy jsou jejími bikonjugovanými řídícími křivkami ve smyslu A. TERRACINIHO; z něho vyplývá možnost transformace plochy R_{yz} kongruencí W C. SEGREHO v jinou přímkovou plochu R^*_{YZ}, při čemž strikční a nevlastní křivka jsou hlavními čarami na R_{yz}, jak je definoval J. KLAPKA (viz [4]).

Práce se zabývá projektivní geometrií Kautnyho ploch při libovolné frekvenci $n \neq 0$, neřeší proto speciální otázky geometrických konstrukcí pro partikulární hodnoty frekvence n.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КАУТНОГО МЕТОДОМ ДИФФЕРЕЬНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОТО ОБУРКА (Oto Obůrka), Брно

Если мы ищем к системе дифференциальных уравнений (1) соответствующую неразвертывающуюся линейчатую поверхность R_{yz} проективного пространства S_3 по теории Э. Е. Вилчинского, легко найдем, что это поверхность (исключая коллинеации), определение которой было дано В. Каутным в работе [3] и которая является поверхностью образованной ротацией, вращения прямой при ее одновременном колебании в направлении оси вращения.

В то время как В. Каутный ограничился исследованием поверхности R_{yz} при помощи первой и второй основной дифференциальной квадратической формы классической дифференциальной геометрии, приносит эта работа много фактов о соприкасающихся формах высших степеней на поверхности. Затем о ее флекнодальных линиях и о линиях, относящихся к линейному комплексу, о системах R линии на поверхности и т. д. Особенно интересно обнаружение, что линии сжатия (стрикционные линии) и несобственные кривые поверхности являются ее биконьюгироваными направляющими кривыми по А. Террачини. Из этого вытекает возможность трансформации поверхности R_{yz} при помощи конгруэнции W по Ц. Сегре в другую линейчатую поверхность R^*_{YZ}, причем линия сжатия и несобственная кривая являются главными линиями на R_{yz}, как ее вывел Й. Клапка (см. [4]).

Работа занимается проективной геометрией поверхностей Каутного при любой частоте $n \neq 0$, поэтому не решает специальные вопросы геометрических конструкций для партикулярной величины частоты n.