Jiří Vaníček

Biortogonální systémy a limitovací metody

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 17--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117410

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

BIORTOGONÁLNÍ SYSTÉMY A LIMITOVACÍ METODY

JIŘÍ VANÍČEK, Praha

(Došlo dne 12. srpna 1960)

Buď $\{x_n, f_n\}$ biortogonální systém v Banachově prostoru B. Vyšetřuje se konvergence rozvoje $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n$ prvku x podle matic o něco obecnějšího typu, než jsou matice Toeplitzovy.

V celém článku budeme značit B Banachův prostor nad tělesem reálných nebo komplexních čísel, B^* prostor spojitých lineárních forem na B, $\{x_n\}$ posloupnost prvků z B takovou, že:

1. lineární obal $[\{x_n\}]$ je hustý v B,
2. žádný prvek x_j neleží v uzávěru lineárního obalu ostatních, tj. x_j non $\in \overline{[\{x_n\}_{n \neq j}]}$.

Jak známo, pak existuje právě jedna posloupnost $f_n \in B^*$ taková, že $f_i(x_j) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_n(x_n) = 1$ pro všechna n. Pro daný prvek x jsou čísla $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, určena jednoznačně podmínkou $x - f_n(x)\, x_n \in \overline{[\{x_j\}_{j \neq n}]}$. Každému prvku $x \in B$ přísluší jeho rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n$. Tento rozvoj může, ale nemusí konvergovat, a konverguje-li, nemusí konvergovat k x.

Budeme vyšetřovat konvergenci tohoto rozvoje podle nekonečné matice. Pro jednoduchost se omezíme na tak zvané dolní trojúhelníkové matice. Je-li $x_n \in B$, $n = 1, 2, \ldots$, a $\mathbf{T} = (t_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, i$, dolní trojúhelníková číselná matice, píšeme:

$$(\mathbf{T}) \lim y_n = y\,, \quad \text{jestliže} \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} t_{nj} y_j = y\,,$$

podobně

$$(\mathbf{T}) \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y\,, \quad \text{jestliže} \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} t_{nj} \cdot \sum_{i=1}^{j} y_i = y\,.$$

Matice $\mathbf{T} = (t_{ij})$ se nazývá permanentní, jestliže

$$(\lim_{n \to \infty} y_n = y) \Rightarrow ((\mathbf{T}) \lim_{n \to \infty} y_n = y)\,.$$

Podle známé Toeplitzovy věty je $\mathbf{T}$ permanentní, právě když jsou splněny současně tyto tři podmínky:

$$\text{(1)}\qquad \text{A) existuje } L > 0 \text{ tak, že } \sum_{j=1}^{i} |t_{ij}| < L \text{ pro všechna } i\,.$$

$$\text{B)}\ \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} t_{ij} = 1 \text{ pro každé } j = 1, 2, \ldots.$$

$$\text{C)}\ \lim_{i\to\infty} t_{ij} = 0 \text{ pro každé } j = 1, 2, \ldots.$$

Dané dolní trojúhelníkové matici $\mathbf{T}$ přiřaďme matici $\mathbf{S}(\mathbf{T})$, jejíž prvky jsou určeny vztahem $\sigma_{mn}(\mathbf{T}) = \sum_{i=n}^{m} t_{mi}$. Zřejmě platí

$$\text{(2)}\qquad \left((\mathbf{T}) \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \sigma_{mn}(\mathbf{T})\, y_n = y\right).$$

Z podmínek (1) dostáváme pro permanentní matici $\mathbf{T} = (t_{ij})$

$$\text{(3)}\qquad \lim_{m\to\infty} \sigma_{mn}(\mathbf{T}) = 1 \text{ pro všechna } n = 1, 2, \ldots.$$

Říkáme, že $\mathbf{T}$ je kvasipermanentní, jestliže pro ni platí vztah (3). Kvasipermanentní matice tvoří širší třídu než matice permanentní. Jejich důležitost pro sčítání rozvojů podle biortogonálního systému plyne z následujících dvou vět.

Věta 1. *Buď $\mathbf{T}$ nekonečná kvasipermanentní matice.*

I. *Je-li $(\mathbf{T}) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = x$ pro nějakou číselnou posloupnost $\{\alpha_n\}$, je $\alpha_n = f_n(x)$ pro $n = 1, 2, \ldots$.*

II. *Je-li $\{f_n\}$ totální v B, tj. $(f_n(x) = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow x = 0$, a je-li $(\mathbf{T}) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = y$, je $x = y$.*

Důkaz. I. Je $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \sigma_{mn}(\mathbf{T})\, \alpha_n x_n = x$. Tedy ze spojitosti f_n dostáváme $\lim_{m\to\infty} \sigma_{mn}(\mathbf{T})\, \alpha_n = f_n(x)$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Protože však je $\lim_{m\to\infty} \sigma_{mn}(\mathbf{T}) = 1$ pro všechna n, je nutně $\alpha_n = f_n(x)$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

II. Je zřejmé, protože z I plyne $f_n(x) = f_n(y)$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

Věta 2. *Nechť pro $x \in B$ je pouze konečně mnoho prvků posloupnosti $\{f_n(x)\}$ rovno 0. Pak existuje kvasipermanentní matice $\mathbf{T}$ taková, že $(\mathbf{T}) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = x$.*

Důkaz. Nechť $f_n(x) \neq 0$ pro $n > k$. Označme $s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j$. Protože $\overline{[\{x_n\}]} = B$ a $x - s_k(x) \in \overline{[\{x_j\}_{j=k+1}^{\infty}]}$, existuje posloupnost $\{z_j\}_{j=k+1}^{\infty}$ tak, že

$$z_j = s_k(x) + \sum_{i=k+1}^{j} \alpha_{ji} x_i \quad \text{a} \quad \lim_{j \to \infty} z_j = x\,.$$

Ze spojitosti f_n plyne $\lim_{j \to \infty} \alpha_{ji} = f_i(x)$ pro všechna přirozená čísla $i > k$.

Položme

$$r_{ij} = 1 \quad \text{pro} \quad j \leqq k\,,$$

$$r_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{f_j(x)} \quad \text{pro} \quad k < j \leqq i\,,$$

$$r_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad j > i\,.$$

Zřejmě je

$$z_i = \sum_{j=1}^{i} r_{ij} f_j(x)\, x_j$$

a dále

$$\lim_{i \to \infty} r_{ij} = 1 \text{ pro všechna } j = 1, 2, \ldots.$$

Je-li $\boldsymbol{T}$ nekonečná kvasipermanentní matice taková, že $r_{mn} = \sigma_{mn}(\boldsymbol{T})$ pro všechna přirozená čísla m a n, je $(\boldsymbol{T}) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = \lim_{j \to \infty} z_j = x$.

Dále uvedeme příklad, který ukazuje, že předpoklad totality ve větě 1, II a předpoklad o tom, že jen konečně mnoho členů posloupnosti $\{f_n(x)\}$ z věty 2 je různých od nuly, nelze vynechat.

Uvažujme prostor $C(\langle a, b\rangle)$ spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ s normou $\|x\| = \sup_{t \in \langle a,b\rangle} |x(t)|$. Buď $a < c < d < b$ a Q_n, $n = 0, 1, \ldots$, nechť jsou polynomy stupně n-tého, orthonormální v $\langle c, d\rangle$, jejichž existence je zaručena větou 202 [2], str. 551.

Položme $f_n(x) = \int_c^d x(t)\, Q_n(t)\, \mathrm{d}t$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Je $\overline{[\{Q_n\}]} = C\langle a, b\rangle$, $f_n \in C^*(\langle a, b\rangle)$, $f_i(Q_j) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_n(Q_n) = 1$ pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Zvolíme-li nyní $0 \neq x \in C(\langle a, b\rangle)$ tak, že $x(t) = 0$ pro $t \in \langle c, d\rangle$, je zřejmě $f_n(x) = 0$ pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots$ a tedy pro libovolnou matici $\boldsymbol{T}$ je

$$(\boldsymbol{T}) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = 0\,.$$

Není tedy splněno tvrzení věty 2 ani druhá část tvrzení věty 1.

Buď G omezená oblast v komplexní rovině. $H(G)$ označme prostor, jehož prvky jsou funkce spojité na $\overline{G}$ a holomorfní v G s obvyklými algebraickými operacemi a s normou $\|F\| = \sup_{z \in G} |F(z)|$. Pro $a \in G$ položme

$$x_n(z) = (z - a)^n\,, \quad f_n(x) = \frac{x^{(n)}(a)}{n!}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Je-li G jednoduše souvislá, je podle [3], str. 415

$$\overline{[\{x_n\}]} = H(G).$$

Aplikací vět 1 a 2 na prostor $H(G)$ dostáváme ihned tato zajímavá tvrzení:

Věta 1'. *Buď G omezená oblast v komplexní rovině, $a \in G$, F funkce spojitá na $\overline{G}$ a holomorfní v G a nechť existuje kvasipermanentní matice $\boldsymbol{T}$ tak, že*

$$(\boldsymbol{T}) \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(a) \frac{(z-a)^n}{n!} = \Phi(z)$$

stejnoměrně pro $z \in G$. Pak $\Phi = F$.

Věta 2'. *Buď G jednoduše souvislá omezená oblast, $a \in G$. Je-li pouze konečně mnoho členů posloupnosti $\{F^{(n)}(a)\}$ rovno nule, existuje kvasipermanentní matice $\boldsymbol{T}$ tak, že*

$$(\boldsymbol{T}) \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(a) \frac{(z-a)^n}{n!} = F(z)$$

stejnoměrně pro $z \in G$.

Poznámka. Z věty o jednoznačnosti pro holomorfní funkce ihned plyne, že je-li G jednoduše souvislá oblast, existuje spočetná množina $N \subset G$ tak, že pro $a \in G \dot{-} N$ obsahuje posloupnost $\{F^{(n)}(a)\}$ vesměs nenulové prvky a je tedy splněn předpoklad věty 2'.

Literatura

[1] *G. H. Hardy*: Divergent Series. Oxford 1949.

[2] *V. Jarník*: Integrální počet II. Praha 1955.

[3] *А. И. Маркушевич:* Теория аналитических функций. Гос. изд. тех. теорет. лит. Москва - Ленинград 1950.

[4] *J. Vaníček*: Schauderovy base v Banachových prostorech. Diplomová práce MFF UK, Praha 1960.

Резюме

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ

ИРЖИ ВАНИЧЕК (Jiří Vaníček), Прага

Матрицу $\boldsymbol{T} = (t_{ij})_{j=1,\ldots,i}^{i=1,2,\ldots}$ называем квазиперманентной, если $\lim_{i\to\infty} \sum_{j=k}^{i} t_{ij} = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $\{x_n, f_n\}$ — биортогональная система в пространстве Банаха B. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{T}$ — *бесконечная квазиперманентная матрица.*

I. *Если* $(\mathbf{T})\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n = x$ *для последовательности* $\{\alpha_n\}$, *то* $\alpha_n = f_n(x)$ *для* $n = 1, 2, \ldots$.

II. *Если* f_n *тотально в* B, *значит,* $(f_n(x) = 0$ *для* $n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow x = 0$, *и если* $(\mathbf{T})\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = y$, *то* $x = y$.

Теорема 2. *Пусть для* $x \in B$ *только конечное число элементов последовательности* $\{f_n(x)\}$ *равно нулю. Тогда существует квазиперманентная матрица* $\mathbf{T}$ *такая, что* $(\mathbf{T})\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = x$.

Интересны приложения этих теорем для сходимости ряда Тэйлора голоморфных функций.

Summary

BIORTHOGONAL SYSTEMS AND LIMITING METHODS

JIŘÍ VANÍČEK, Praha

The semimatrix $\mathbf{T} = (t_{ij})$ is called quasipermanent if $\lim_{i\to\infty}\sum_{j=k}^{i} f_{ij} = 1$ for all $k = 1, 2, \ldots$. Let $\{x_n, f_n\}$ be a biorthogonal system in a Banach space B. The following theorems are proved:

Theorem 1. *Let* $\mathbf{T}$ *be an infinite quasipermanent semimatrix.*

I. *If* $(\mathbf{T})\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n = x$ *for some numerical sequence* $\{\alpha_n\}$, *then* $\alpha_n = f_n(x)$ *for* $n = 1, 2, \ldots$.

II. *If* f_n *is total in* B, *i. e. if* $f_n(x) = 0$ *for* $n = 1, 2, \ldots$ *implies* $x = 0$, *and if* $(\mathbf{T})\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = y$, *then* $x = y$.

Theorem 2. *For* $x \in B$ *let there be only a finite number zero elements in the sequence* $\{f_n(x)\}$. *Then there exists a quasipermanent matrix* $\mathbf{T}$ *such that* $(\mathbf{T})\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = x$.

The applications of these theorems to questions of convergence of Taylor expansions of holomorphic functions are of considerable interest.