Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. V článku KAREL KOUTSKÝ a MILAN SEKANINA, Rozklad přímky na shodné trojbodové množiny, Čas. pro pěst. mat., *83* (1958), 317–326, bylo dokázáno, že na přímce p existuje ke každé trojbodové množině $M \subset p$ rozklad R takový, že $X \in R \Rightarrow X$ je shodné s M. Při tom můžeme samozřejmě žádat, aby $M \in R$. Dá se poměrně snadno dokázat (pomocí známých vět o oskulačních kružnicích), že existence takového rozkladu charakterisuje přímku mezi dostatečně hladkými, jednoduchými rovinnými křivkami. Platí totiž tvrzení:

Nechť k je jednoduchá rovinná křivka daná parametrickým vyjádřením $x = f(t)$, $y = g(t)$, kde f a g jsou funkce třídy C^3 a t probíhá nějaký interval v množině reálných čísel. Nechť pro každou trojbodovou množinu $M \subset k$ existuje rozklad R na k takový, že $M \in R$ a každé $X \in R$ je shodné s M. Potom k je přímka. Je otázka, zda je nutno brát funkce třídy C^3 a zda je nutný předpoklad $M \in R$. (Bez tohoto předpokladu totiž plyne bezprostředně jen to, že k je přímka nebo polopřímka.)

Milan Sekanina, Brno

Řešení úlohy č. 5 (autor *Josef Holubář*) z roč. *86* (1961), str. 233.

Úloha: *Do daného trojúhelníka umístěte tři shodné kruhy, které se nepřikrývají a které mají maximální obsah.*

Řešení: Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

Budiž dán trojúhelník $\triangle KLM$, v němž platí $KL \leqq LM \leqq KM$. Budiž N bod strany LM takový, že $KN = MN$. Pak libovolné tři body trojúhelníka $\triangle KLM$ mají tu vlastnost, že alespoň dva z nich mají vzdálenost menší nebo rovnou $\delta_{KLM} =$ $= \max(KL, KN)$.

Důkaz. Označme N' bod polopřímky MK takový, že $MN' = MN$. Úsečka NN' rozdělí trojúhelník $\triangle KLM$ na trojúhelník $\triangle MNN'$ a čtyřúhelník $KLNN'$. Průměr trojúhelníka $\triangle MNN'$, to jest délka nejdelší úsečky, která leží celá v trojúhelníku $\triangle MNN'$, je zřejmě roven délce úsečky MN. Průměr čtyřúhelníka $KLNN'$ je zřejmě roven buď délce některé jeho strany, nebo některé jeho úhlopříčky. Platí, že $\sphericalangle KN'N = \sphericalangle LNN'$ jsou úhly tupé. Je tedy trojúhelník $\triangle KNN'$ tupoúhlý a KN je jeho strana protilehlá tupému úhlu, tedy největší. Je tedy $KN' < KN$, $NN' < KN$. Poněvadž $KM \geqq LM$, je také $KN' \geqq LN$ a $KN \geqq LN'$. Průměrem čtyřúhelníka $KLNN'$ je tedy $\delta_{KLM} = \max(KL, KN)$.

Existuje trojúhelník, jehož všechny vrcholy leží v trojúhelníku $\triangle KLM$ a jehož nejmenší strana je rovna δ_{KLM}. V případě $\delta_{KLM} = KL$ je to trojúhelník $\triangle KLM$, v případě $\delta_{KLM} = KN$ je to trojúhelník $\triangle KMN$. Leží-li libovolné tři body v trojúhelníku $\triangle KLM$, leží buď v trojúhelníku $\triangle MNN'$, nebo v čtyřúhelníku $KLNN'$ alespoň dva z nich. Avšak ani v trojúhelníku $\triangle MNN'$, ani v čtyřúhelníku $KLNN'$ nemůže ležet úsečka delší než δ_{KLM} (jde o konvexní útvary, takže s každou dvojicí bodů v nich leží i úsečka je spojující). Tím je tvrzení dokázáno.

Buďtež nyní $\mathbf{K}_1(S_1, r_{\max})$, $\mathbf{K}_2(S_2, r_{\max})$, $\mathbf{K}_3(S_3, r_{\max})$ tři shodné nepřekrývající se kruhy, které leží v trojúhelníku $\triangle KLM$ a mají maximální obsah. Sestrojíme-li trojúhelník $\triangle K_0L_0M_0$ tak, že $K_0L_0 \parallel KL$ leží v polorovině KLM ve vzdálenosti $r_{\max}$ od KL a analogicky pro ostatní strany, je zřejmé, že body S_1, S_2, S_3 leží v trojúhelníku $\triangle K_0L_0M_0$. Kdyby nyní $\delta_{K_0L_0M_0} < 2r_{\max}$, znamenalo by to, že vzdálenost některých dvou bodů z trojice S_1, S_2, S_3 je menší než $2r_{\max}$ a kruhy o těchto středech se pronikají. Kdyby $\delta_{K_0L_0M_0} \geqq 2r_{\max}$ bylo by možno položit $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv L_0$, $S_3 \equiv M_0$ pro $\delta_{K_0L_0M_0} = K_0L_0$ a $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv N_0$, $S_3 \equiv M_0$ pro $\delta_{K_0L_0M_0} = K_0N_0$ (N_0 je bod sestrojený v $\triangle K_0L_0M_0$ analogicky jako bod N v $\triangle KLM$). Pak by se žádné dva z kruhů $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ nepronikaly. Potom je však možno vždy sestrojit kruhy $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ o největším poloměru $r_{\max}$ tak, aby a) pro $\delta_{K_0L_0M_0} = K_0L_0$ kruhy $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ byly vepsány úhlům $\sphericalangle KLM$, resp. $\sphericalangle LKM$ a bylo $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv L_0$, b) při $\delta_{K_0L_0M_0} = K_0N_0$ bylo $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv N_0$, $S_3 \equiv M_0$. Je tedy

$$\delta_{K_0L_0M_0} = 2r_{\max} . \tag{1}$$

Trojúhelník $\triangle K_0L_0M_0$ je zřejmě obrazem trojúhelníka $\triangle KLM$ ve stejnolehlosti $(S, 1 - r_{\max}\,\varrho)$, kde S je střed kružnice vepsané trojúhelníku $\triangle KLM$ a ϱ její poloměr. Je tedy

$$\delta_{K_0L_0M_0} = \delta_{KLM}\left(1 - \frac{r_{\max}}{\varrho}\right). \tag{2}$$

Spojením rovností (1) a (2) dostáváme

$$\delta_{KLM}\left(1 - \frac{r_{\max}}{\varrho}\right) = 2r_{\max} ;$$

z toho

$$r_{\max} = \frac{\varrho\delta_{KLM}}{2\varrho + \delta_{KLM}} .$$

Úsečku velikosti $r_{\max}$ lze pak sestrojit eukleidovskou konstrukcí jako čtvrtou geometricky úměrnou úseček ϱ, δ_{KLM}, $2\varrho + \delta_{KLM}$. Tím je úloha řešena.

Bohdan Zelinka, Liberec

Poznámka. **A)** Určením počtu způsobů, jimiž je možno uvažované kruhy v trojúhelníku umístit, se ve svém řešení zabýval Bohuslav Míšek. Uvádíme přehled jeho výsledků: Při označení použitém v řešení nahoře otištěném nechť je $\sphericalangle KLM = \alpha$, $\sphericalangle LKM = \beta$, $\sphericalangle KML = \gamma$ a $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$. Potom platí:

a) Je-li $\alpha \geqq \beta = \gamma$, existuje právě jedno řešení: $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv L_0$, $S_3 \equiv M_0$.

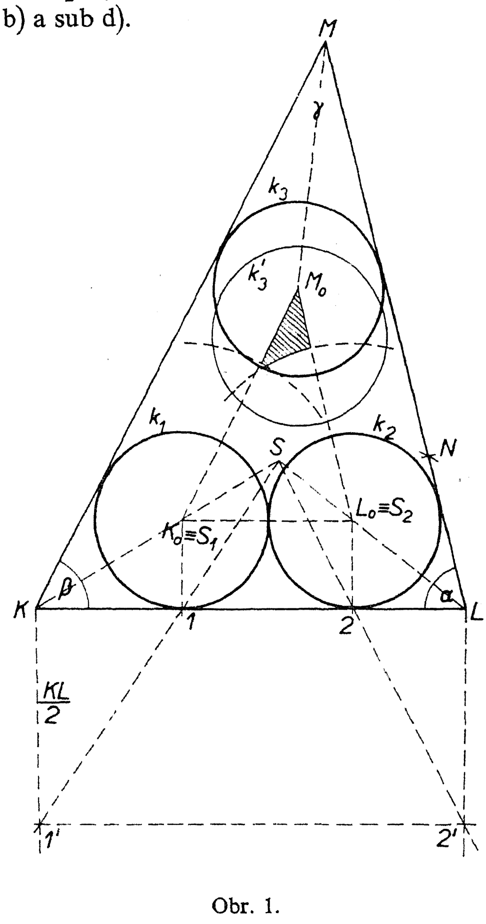
b) Je-li $\alpha \geqq \beta > \gamma$, $\gamma > \frac{1}{2}\alpha$, existuje nekonečně mnoho řešení: $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv L_0$ a S_3 je libovolný bod náležející jistému obrazci, který je na obr. 1 odstavce B vyčárkován.

c) Je-li $\alpha > \beta > \gamma$, $\gamma < \frac{1}{2}\alpha$, existuje právě jedno řešení: $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv N_0$, $S_3 \equiv M_0$. Viz obr. 2 odstavce B.

d) Je-li $\alpha = \beta > \gamma$, $\gamma < \frac{1}{2}\alpha$, existují právě dvě řešení, a to řešení popsané sub c) a řešení k němu souměrně sdružené podle osy daného rovnoramenného trojúhelníka.

e) Je-li $\alpha > \beta > \gamma$, $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$, existují ta a jen ta řešení, která jsou popsána sub b) a sub c).

f) Je-li $\alpha = \beta > \gamma$, $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$ (tedy $\alpha = \beta = 2\gamma$, $\gamma = 36°$), existují ta a jen ta řešení, jež jsou popsána sub b) a sub d).

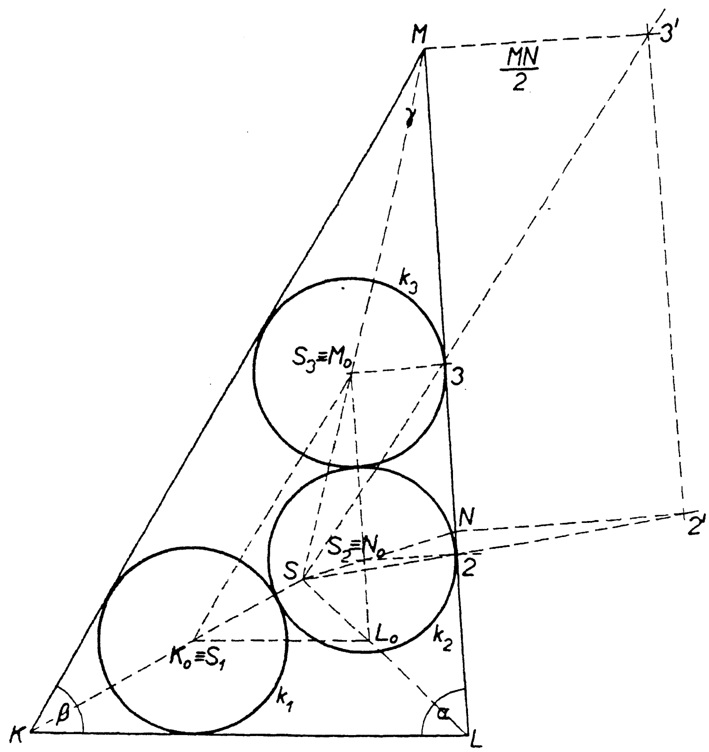


Obr. 1.

B) Konstrukce výsledných kruhů (ve dvou případech), kterou doprovodila své řešení Ema Kasková:

Obr. 1. Je-li $KL > KN$ a tedy $\gamma > \frac{1}{2}\alpha$ — v odst. A případ b): Kružnice $k_1(S_1)$ a $k_2(S_2)$ se vně dotýkají a jsou vepsány úhlům $\sphericalangle LKM$ resp. $\sphericalangle KLM$, S_3 je libovolný bod náležející vyčárkovanému obrazci. Středy $S_1 \equiv K_0$, $S_2 \equiv L_0$ jsou vrcholy obdélníka K_0L_021, který je obrazem obdélníka $KL2'1'$ ve stejnolehlosti o středu S; přitom jsou rozměry obdélníků v poměru 2 : 1. Odtud konstrukce.

Obr. 2. Je-li $KN > KL$ a tedy $\gamma < \frac{1}{2}\alpha$ – v odstavci A případ c): Středy $S_2 \equiv N_0$, $S_3 \equiv M_0$ jsou vrcholy obdélníka $N_0M_0 3 2$, který je obrazem obdélníka $NM3'2'$ ve stejnolehlosti o středu S. Rozměry obdélníků jsou opět v poměru 2 : 1. Z obrazů snadno potvrdíme vztah (2) uvedený v řešení.



Obr. 2.