Časopis pro pěstování matematiky

V. A. Manevich

Poznámka k práci T. Rooma: A problem in projective geometry

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 98

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117399`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA K PRÁCI T. ROOMA: A PROBLEM IN PROJECTIVE GEOMETRY

В. А. МАНЕВИЧ (V. A. Manevič), Moskva

V práci [1] píše autor, že nemůže nalézti syntetický důkaz dále uvedené věty, na níž je založena řada geometrických výsledků v práci získaných.

V této poznámce provedeme ryze syntetický důkaz Roomovy věty: *Na přímce jsou dány tři páry bodů* Z, Z'; M, M'; N, N' *odpovídajících si v involuci* J *a libovolný bod* P. *Body* Q, R, S *nechť jsou určeny vztahy* $(PQZZ') = -1$, $(QRMM') = -1$, $(RSNN') = -1$ *a* K, K' *budiž taková dvojice bodů v involuci* J, *že* $(KK'PS) = -1$. *Pak body* K *a* K' *lze sestrojit racionálně*[1]) *a nezávisí na volbě bodu* P.

Důkaz. Danou involuci přeneseme na kuželosečku α^2. Pak přímky ZZ', MM', NN' procházejí jedním bodem O — středem involuce. Vezmeme na α^2 libovolný bod P a sestrojíme k α^2 tečny PA a AQ, kde $A \in ZZ'$, $Q \in \alpha^2$; $(PQZZ') = -1$. Označme $B \equiv AQ \cap MM'$ a sestrojme k α^2 tečnu BR, kde $R \in \alpha^2$; $(QRMM') = -1$. Konečně označme $C \equiv BR \cap NN'$ a k α^2 veďme tečnu CS, kde $S \in \alpha^2$. Pak $(RSNN') = -1$ a položíme-li $D \equiv AP \cap CS$, dostaneme v průsečících spojnice OD s kuželosečkou α^2 dva body K, K' s vlastností $(KK'PS) = -1$.

Zřejmě je třeba dokázat, že bod D je vždy na pevné přímce KK'.

Při pohybu bodu P po α^2 pohybují se body A, B i C postupně po pevných přímkách ZZ', MM', NN' a tudíž přímky PQ, QR, RS procházejí postupně pevnými body E, F, G, kde E resp. F resp. G je pól přímky ZZ' resp. MM' resp. NN' vzhledem k α^2. E, F, G leží na poláře bodu O vzhledem k α^2. Dokážeme-li, že přímka PS prochází pevným bodem H na EF, bude i dokázáno, že bod D se pohybuje po pevné přímce KK' procházející bodem O, která je polára bodu H vzhledem k α^2. Na α^2 uvažujme projektivitu $\pi : P \to S$, která je produktem těchto tří involucí: 1. involuce $P \to Q$ se středem E; 2. involuce $Q \to R$ se středem F; 3. involuce $R \to S$ se středem G.

Projektivnost π je involuce, neboť v ní existuje involutorní dvojice bodů. Takovou dvojicí jsou jistě průsečíky přímky EF s α^2. Nechť středem involuce π je bod $H \in EF$. Pak $H \in PS$ a věta je dokázána.

Literatura

[1] *T. G. Room*: A problem in projective geometry. Math. Gaz. 1960, *44*, No 350, str. 245—250.

[1]) Tento pojem je podrobně vyložen v [1]. (Pozn. red.)