Ivo Babuška

Fouriersche Transformation in der Theorie der Differenzengleichungen in abzählbar normierten Räumen und einige Anwendungen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 4, 462--479

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117394`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

FOURIERSCHE TRANSFORMATION IN DER THEORIE DER DIFFERENZENGLEICHUNGEN IN ABZÄHLBAR NORMIERTEN RÄUMEN UND EINIGE ANWENDUNGEN

IVO BABUŠKA, Praha
(Eingelangt am 4. Juli 1960)

In dieser Arbeit wird der Begriff der Fourierschen Transformation diskreter abstrakter Funktionen eingeführt. Speziell wird der Hilbertsche Raum studiert und einige Anwendungen in der Theorie der zufälligen Differenzengleichungen angeführt.

1. EINLEITUNG

In Arbeit [1] haben wir uns mit dem Problem der Fourierschen Transformation von Gitterfunktionen befasst und haben die Ergebnisse in der Theorie der Differenzengleichungen angewendet. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir die Möglichkeit der Erweiterung und Verallgemeinerung dieser Theorie, so dass man die Ergebnisse auf weitere Gebiete, wie z. B. der Theorie der zufälligen Differenzengleichungen usw., anwenden kann.

Mit physikalischen Anwendungen dieser Theorie wollen wir uns in einer anderen Arbeit beschäftigen. Die vorliegende Arbeit ist eine Erweiterung der Gedanken und Ergebnisse der Arbeit [1], so dass wir uns in dieser Arbeit kurz fassen werden.

2. KONVOLUTORE TRANSFORMATION ABSTRAKTER GITTERFUNKTIONEN

In der ganzen Arbeit werden wir mit dem Symbol Φ den linearen Raum über dem Körper komplexer Zahlen bezeichnen. Wir setzen voraus, dass in Φ die Topologie mit Hilfe der abzählbar vielen übereinstimmenden Normen definiert ist. Diese Normen bezeichnen wir mit dem Symbol $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \ldots$ Weiter setzen wir voraus, dass Φ ein abgeschlossener Raum im Sinne der gegebenen Topologie ist.[1][2][3] Mit dem Symbol M bezeichnen wir die Menge aller ganzen Zahlen, d. h. $M \equiv \{j\}$.

[1]) Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ welche in Φ definiert sind, nennen wir übereinstimmend, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: ist $\varphi_j \in \Phi, j = 1, 2, \ldots$ eine Cauchysche Folge im Sinne beider eingeführter Normen und wenn $\varphi_j \to 0$ im Sinne der einen gilt, dann gilt auch $\varphi_j \to 0$ im Sinne der anderen eingeführten Norm.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir die abstrakten auf M definierten Funktionen studieren, d. h. Operatoren, welche M in Φ abbilden. Diese abstrakten Funktionen wollen wir genauso wie die gewöhnlichen, d. h. mit den Symbolen f, g usw. bezeichenen.

Definition 2.1. *Wir nennen R einen linearen Raum über dem Körper komplexer Zahlen aller abstrakten Funktionen, welche M in Φ abbilden und so definiert sind, dass für jedes $f \in R$ und jedes natürliche p eine ganze Zahl $q_p \geqq 0$ und eine Konstante C_p derart existiert, dass $\|f(n)\|_p \leqq C_p \left| |n|^{q_p} + 1 \right|$ für alle $n \in M$ gilt. Die Konvergenz in diesem Raum führen wir folgendermassen ein: Es sei $f_n \in R$, $n = 1, \ldots$, dann konvergiert $f_n \to f \in H$ wenn*

a) *für jedes $j \in M$, $f_n(j) \to f(j)$ im Sinne der Topologie des Raumes Φ gilt;*

b) *zu jedem natürlichen p eine ganze Zahl $q_p \geqq 0$ und eine Konstante C_p derart existieren, dass*

$$\|f_n(j)\|_p \leqq C_p \left| |j|^{q_p} + 1 \right|$$

für alle $j \in M$ und alle n gilt.

Ist $f_n \in R$ und wenn $f_n \to f \in H$ in dem eben eingeführten Sinne konvergiert, so ist notwendigerweise auch $f \in R$.

Definition 2.2. *Mit dem Symbol Q bezeichnen wir den Modul aller auf M derart definierten komplexen Funktionen a,[4] dass für jedes ganze $p \geqq 0$ eine Konstante C_p derart existiert, dass $\left|a(n)\left(|n|^p + 1\right)\right| \leqq C_p$ für alle $n \in M$ gilt.*

Definition 2.3. *Es sei $a \in Q$; dann nennen wir die durch die Beziehung*

$$(\mathbf{A}f)(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, a(n - l) \tag{2.1}$$

definierte Abbildung $\mathbf{A}$ eine konvolutore Abbildung, welche der Funktion a entspricht.

Wir überzeugen uns leicht, dass die Reihe (2.1) im Raume R konvergiert und $\mathbf{A}$ die Abbildung des Raumes R in R ist. Wirklich, weil $f \in R$ ist, existiert für jedes natürliche p eine ganze Zahl $q_p \geqq 0$ eine Konstante C_p derart, dass

$$\|f(n)\|_p \leqq C_p \left| |n|^{q_p} + 1 \right|$$

[2]) Die mit Hilfe von übereinstimmenden Normen eingeführte Topologie ist durch ein System der Umgebungen der Null $U_{p,\varepsilon}$, welche für jedes natürliche p und positive ε definiert sind, ausgedrückt. Dabei gilt $U_{p,\varepsilon} = E[\varphi \in \Phi,\ \|\varphi\|_k < \varepsilon,\ k = 1, \ldots, p]$. Es ist leicht einzusehen, dass $\varphi_n \to 0$ in Φ dann und nur dann gilt, wenn für jedes natürliche p $\|\varphi_n\|_p \to 0$ gilt.

[3]) Die Folge φ_n, $n = 1, \ldots$ nennen wir eine Cauchysche Folge im Raum Φ, wenn sie eine Cauchysche Folge im Sinne jeder der Normen $\|\bullet\|_p$, $p = 1, 2, \ldots$ ist. Der Raum Φ heisst vollständig, wenn er im Sinne jeder Norm $\|\bullet\|_p$ vollständig ist.

[4]) Wir meinen komplexe Funktionen, d. h. Operatoren, welche M in den Raum aller komplexen Zahlen abbilden.

gilt. Weiter ist $a \in Q$, so dass zu jedem natürlichen p eine Konstante D_p derart existiert, dass

$$|a(n)| \leqq \frac{D_p}{|n|^{q_p+2}+1}$$

gilt. Um die Konvergenz der Reihe (2.1) für jedes feste n zu beweisen, genügt es, mit Rücksicht auf die Vollständigkeit des Raumes Φ, zu beweisen, dass

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \|f(l)\|_p \, |a(n-l)| \leqq C'_p(1 + |n|^{q_p})$$

für jedes p und n ist.

Es ist jedoch

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \|f(l)\|_p |a(n-l)| \leqq C_p D_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{|l|^{q_p}+1}{|n-l|^{q_p+2}+1} \leqq$$

$$\leqq 2^{q_p-1} C_p D_p \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|^{q_p}}{|j|^{q_p+2}+1} + (|n|^{q_p}+1) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|j|^{q_p+2}+1} \right] \leqq C'_p(1 + |n|^{q_p}).$$

Aus diesem Ausdruck folgt direkt, dass die Reihe (2.1) wirklich für jedes n konvergiert, und dass $\mathbf{A}$ die Abbildung des Raumes R in R ist.

Es ist leicht einzusehen, dass $\mathbf{A}$ linear ist (d. h. eine additive homogene und stetige Abbildung).

Definition 2.4. *Wir bezeichnen R_m den Raum aller Spaltenmatrizen von m Gliedern (eine Matrix vom Typus $1, m$) mit den einzelnen Elementen aus R.*[5] *Es sei $f_n \in R_m$, $n = 1, 2, \ldots$ Dann gilt $f_n \to f$ dann und nur dann, wenn jedes Element der Matrix konvergiert.*

Definition 2.5. *Es sei $(\mathbf{A}_{k,l})$, $k, l = 1, \ldots, m$ eine gegebene Matrix der konvolutoren Abbildungen R in R. Es seien weiter $\mathbf{A}_{k,l}$ die entsprechenden Abbildungen der Funktionen $a_{k,l} \in Q$. Die Abbildung $\mathbf{A}$ des Raumes R_m in R_m, welche durch die Bedingung*

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} = g = \mathbf{A}f = \begin{bmatrix} A_{1,1}, \ldots, A_{1,m} \\ \\ A_{m,1}, \ldots, A_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

definiert ist, nennen wir eine konvolutore Abbildung, welche der Matrix $(a_{k,l})$ entspricht.[6]

---

[5]) Die Addition ist als Addition jedes einzelnen Elementes eingeführt, ähnlich auch die Multiplikation und die Multiplikation mit einer Zahl.

[6]) Wir meinen Operationen im Sinne der Matrizenmultiplikation, d. h.

$$g_n = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_{n,i} f_i \, .$$

Definition 2.5. *Es seien die konvolutoren Abbildungen* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{k,l})$, $k, l = 1, \ldots, m$ *und die Funktion* $f \in R_m$ *gegeben. Dann nennen wir das Problem der Ermittelung einer solchen Funktion* $g \in R_m$, *für die* $\mathbf{A}g = f$ *gilt,* **A**-*Problem.*

3. FOURIERSCHE TRANSFORMATION ABSTRAKTER GITTERFUNKTIONEN

Definition 3.1. *Es sei der Raum S ein linearer Raum*[7]) *aller auf* E_1 (*d. h. im Intervall* $(-\infty, \infty)$) *definierten komplexen Funktionen, deren alle Ableitungen stetig sind, und welche so definiert werden, dass zu jeder solchen Funktion* φ *und zu allen ganzen Zahlen* $p \geqq 0$ *und* $q \geqq 0$ *eine Konstante* $C_{p,q}$ (*von* φ *abhängig*) *derart existiert, dass*

$$\left| |x|^p \varphi^{(q)}(x) \right| \leqq C_{p,q}$$

für alle $x \in E_1$ *gilt. Die Konvergenz in diesem Raum führen wir folgendermassen ein. Es sei* $\varphi_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$ *dann konvergiert* $\varphi_n \to \varphi$, *wenn*

a) *auf jeder kompakten Menge* $L \subset E_1$ *die Funktion* $\varphi_n^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots$ *für* $n \to \infty$ *gleichmässig*[8]) *mit Rücksicht auf* $x \in L$ *zur Funktion* $\varphi^{(j)}(x)$ *konvergiert,*

b) *zu jedem Paar ganzer Zahlen* $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ *eine Konstante* $C_{p,q}$ (*von n unabhängig*) *derart existiert, dass* $\left| |x|^p \varphi_n^{(q)}(x) \right| \leqq C_{p,q}$ *für alle* $x \in E_1$ *ist. Konvergiert* $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ *für* $n \to \infty$, *dann ist notwendigerweise* $\varphi(x) \in S$.

Definition 3.2. *Einen Raum aller linearen stetigen Operatoren, welche S in* Φ *abbilden, nennen wir Raum T. Addition und Multiplikation mit einer (komplexen) Zahl führen wir durch folgende Formel ein:*

$$(3.1) \qquad (f_1 + f_2)(\varphi) = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)\,, \quad (af)(\varphi) = a\,f(\varphi) = f(a\varphi)\,.$$

Die Konvergenz in diesem Raum wird folgendermassen definiert: Es sei $f, f_n \in T$, $n = 1, \ldots$ *Dann konvergiert* $f_n \to f$, *wenn für jedes* $\varphi \in S$, $f_n(\varphi) \to f(\varphi)$ *gilt (im Sinne der Topologie des Raumes* Φ).

Wir ordnen einer stetigen abstrakten Funktion $g(x)$,[9])[10]) mit einem kompakten

[7]) Wir meinen den Raum über dem Körper aller komplexen Zahlen. Addition und Multiplikation sind in folgendem Sinne gemeint

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\,.$$

[8]) Es handelt sich um eine gleichmässige Konvergenz mit Rücksicht auf x nicht jedoch auf j.

[9]) Eine abstrakte Funktion $g(x)$ nennen wir stetig, wenn im Sinne der Topologie des Raumes Φ für jedes $x_n \to x \in E_1$, $x_n \in E_1$ $g(x_n) \to g(x)$ gilt.

[10]) Wir sagen, dass $g(x)$ einen kompakten Träger hat, wenn eine kompakte Menge $L \subset E_1$ existiert, dass $g(x) = 0$ für $x \notin L$ ist.

Träger den Operator $f_g \in T$ folgenderweise zu

$$f_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \,. \tag{3.2}$$ [11] [12] [13]

Es ist leicht einzusehen, dass T wirklich ein linearer Raum ist, welcher alle Eigenschaften des Moduls besitzt und alle Axiome über die Konvergenz erfüllt.

Jeder stetigen abstrakten Funktion $g(x)$ (d. h. dem Operator, welcher E_1 in Φ abbildet) ordnen wir mit Hilfe des Ausdruckes (3.2) einen Operator zu.

Es ist leicht einzusehen, dass zwei stetigen Funktionen ein und derselbe Operator dann und nur dann zugeordnet werden kann, wenn diese Funktionen identisch sind.

Wenn wir den Begriff des Integrals auf eine allgemeine Art einführen, welcher z. B. eine grössere Klasse abstrakter integrierbarer Funktionen umfasst, wie z. B. das Integral von Bochner, dann entspricht zwei sich nur auf der Menge vom Masse Null unterscheidenden abstrakten Funktionen ein und derselbe Operator.

Wir können daher und werden es weiterhin tun, statt von Operatoren zu sprechen, von verallgemeinerten abstrakten Funktionen sprechen. Der Raum T enthält alle stetigen abstrakten Funktionen mit kompaktem Träger (in dem oben erwähnten Sinne) und neue Operatoren, welche man als Verallgemeinerung einer abstrakten Funktion auffassen kann.

Statt des Symbols $f(\varphi)$ werden wir im Weiteren die Bezeichnung (f, φ) oder $(f(x), \varphi(x))$ u. ä. benützen. Den der Funktion $g(x)$ entsprechenden Operator werden wir mit dem Symbol der Funktion bezeichnen, wir werden also (g, φ) statt $f_g(\varphi)$ und g statt f_g schreiben. Im Weiteren werden wir von verallgemeinerten abstrakten Funktionen sprechen sowie von abstrakten Funktionen im gewöhnlichen Sinne des Wortes.

Diese abstrakten Funktionen werden wir mit lateinischen Buchstaben g, h usw. zum Unterschied von den Funktion φ, ψ aus dem Raum S bezeichnen.

Die Verallgemeinerung einer Funktion kann mit einer komplexen Zahl nach Definition 3.2 multipliziert werden. Wir können jede verallgemeinerte abstrakte Funktion f mit einer komplexen (auf E_1 definierten) Funktion $a(x)$ multiplizieren, welche alle Ableitungen besitzt und für die gilt: zu jeder ganzen Zahl $q \geqq 0$ existiert eine Konstante $p \geqq 0$ und C derart, dass $|a^{(q)}(x)| \leqq (|x|^p + 1)\, C$ ist. Die Menge aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit Q_1. Hat die Funktion $a(x)$ diese Eigenschaften, so

[11]) Mit Rücksicht darauf, dass $g(x)$ eine stetige abstrakte Funktion mit kompkatem Träger ist. können wir das Integral (3.2) auf die einfachste Weise einführen, d. h. mit Hilfe der Riemannschen Summen.

[12]) Offensichtlich ist

$$f_{(g_1+g_2)}(\varphi) = f_{g_1}(\varphi) + f_{g_2}(\varphi)\,, \quad f_{ag_1} = a\, f_{g_1}(\varphi) = f_{g_1}(a\varphi)\,.$$

[13]) In [1] haben wir für die reguläre Funktion das Funktional $\bar{g}\varphi\, \mathrm{d}x$ eingeführt. Dort war g eine Funktion, während hier handelt es sich um eine abstrakte Funktion g, d. h. um die Abbildung E_1 in Φ, so dass die komplexe Konjugation nicht definiert sein muss.

führen wir die Multiplikation einer abstrakten verallgemeinerten Funktion durch folgende Beziehung ein

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f, a(x)\,\varphi(x)) .$$

Dieser Ausdruck ist sicher sinnvoll, denn man sieht leicht ein, dass $a(x)\,\varphi(x) \in S$ für alle $\varphi \in S$ ist und wenn $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ gilt, dann gilt auch $a(x)\,\varphi_n(x) \to a(x)\,\varphi(x)$ in S.

Wir führen nun die Abbildung F des Raumes S in sich selbst durch folgende Beziehung ein: Es sei $\varphi \in S$; dann ist

$$\psi(x) = F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t .$$

Aus den Eigenschaften des Fourierschen Integrals und den Eigenschaften der Funktionen $\varphi \in S$ folgt, dass F wirklich eine lineare (d. h. additive homogene und stetige) Abbildung des Raumes S in sich selbst ist, und dass eine lineare inverse Abbildung F^{-1} existiert. Dabei gilt die Gleichung

$$F[F(\varphi)] = 2\pi\,\varphi(-x) .$$

Definition 3.3. *Einen Teilraum des Raumes T, welcher aus allen verallgemeinerten Funktionen besteht, die in der Form einer im Sinne der verallgemeinerten abstrakten Funktionen konvergenten Reihe (d. h. im Sinne der Konvergenz des Raumes T),*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} , \quad c_n \in \Phi$$

geschrieben werden können, bezeichnen wir mit U.

Ähnlich wie in Arbeit [1] lässt sich zeigen, dass U ein Modul ist. Um zu zeigen, dass U ein Teilraum ist, ist es notwendig zu zeigen, dass U in T abgeschlossen ist. Dies wird jedoch erst im Folgenden offenbar. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 3.1. *Es sei $g \in R$. Dann ist*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\,\mathrm{e}^{inx} \in U . \tag{3.3}$$

Beweis. Um diesen Satz beweisen zu können, ist es notwendig zu zeigen, dass die Reihe (3.3) in T zur verallgemeinerten Funktion konvergiert. Der Voraussetzung nach ist $g \in R$. Es existiert daher zu jeder natürlichen Zahl p eine ganze Zahl $q_p \geqq 0$ und eine Konstante C_p so, dass $\|g(n)\|_p \leqq C_p(|n|^{q_p} + 1)$ für alle $n \in M$ gilt. Wir bezeichnen nun

$$f_{N_1,N_2} = \sum_{-N_1}^{N_2} g(n)\,\mathrm{e}^{imx} .$$

Es gilt offensichtlich $f_{N_1,N_2} \in U \subset T$. Wirklich ist

$$(f_{N_1,N_2}, \varphi) = \sum_{-N_1}^{N_2} g(n) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{inx}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{-N_1}^{N_2} g(n)\,\psi(n) ,$$

wobei $\psi = F(\varphi)$ ist.

Da F, wie schon gesagt wurde, eine stetige lineare Abbildung ist, so ist offenbar, dass (f_{N_1,N_2}, φ) eine stetige Abbildung S in Φ ist. Es ist jedoch

$$\psi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{(-in)^{q_p+2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\, \varphi^{(q_p+2)}(x)\, dx$$

für $n \neq 0$. Es ist also

$$(f_{N_1,N_2}, \varphi) = \gamma_0\, g(0) + \sum_{-N_1}^{N_2} \frac{g(n)}{(-in)^{q_p}}\, \gamma_n^{(p)}\,,$$

wobei wir $\gamma_0 \cdot = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$ und $\gamma_n^{(p)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(q_p+2)}(x)\, e^{inx}\, dx$ bezeichnen. Daraus folgt jedoch schon, dass für jede Norm $\| \cdot \|_p$ die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\|g(n)\|}{|-in|^{q_p+2}}\, |\gamma_n^p|$$

absolut konvergent ist, was mit Rücksicht auf die Vollständigkeit des Raumes Φ die Konvergenz verbürgt. $f(x)$ ist also ein Operator, welcher S in Φ abbildet. Es ist leicht einzusehen, dass $f(x)$ homogen, additiv und auch stetig ist. Der Satz ist hiermit bewiesen. Der eben durchgeführte Beweis ist offenbar ganz ähnlich dem Beweise in Arbeit [1].

Wir führen nun eine Funktion ein, welche wir im Weiteren oft benützen werden. Wir bezeichnen mit $\zeta_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, die auf folgende Weise definierte Funktion

$$\zeta_n(x) = e^{-x^2/[(1/\{2^n\})^2 - x^2]} \quad \text{für} \quad |x| \leqq \frac{1}{2^n}\,,$$

$$\zeta_n(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| \geqq \frac{1}{2^n}\,.$$

Die Funktionen $\zeta_n(x)$ für alle n haben alle Ableitungen stetig. Ausserdem ist $\zeta_n(0) = 1$ und $\zeta_n(j) = 0$ für alle ganzen j, $j \neq 0$.

Im Satz 3.1 haben wir gezeigt, dass wir jedem $g \in R$ eine abstrakte Funktion $f \in U$ zuordnen können. Es lässt sich weiter zeigen, dass jedem $f \in U$ auf ähnliche Weise eine Funktion $g \in R$ zugeordnet werden kann. Es gilt nämlich folgender Satz.

Satz 3.2. *Es sei*

$$f(x) \in U\,, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\,, \quad c_n \in \Phi\,.$$

Dann existiert $g \in R$ so, dass $g(n) = c_n$ gilt.

Beweis. Um unsere Behauptung beweisen zu können, müssen wir zeigen, dass wir jeder natürlichen Zahl p eine ganze Zahl q_p und eine Konstante C_p derart zuordnen können, dass $\|c_n\|_p \leqq C_p(|n|^{q_p} + 1)$ ist.

Setzen wir also im Gegenteil voraus, dass ein p_0 existiert, zu dem kein q_{p_0} und C_{p_0} mit den angeführten Eigenschaften existiert. Dann existiert eine wachsende oder abnehmende Folge n_j, $j = 1, 2, \ldots$, $n_1 = 2$ so, dass $\|c_{n_j}\| > (|n_j|^j + 1) j^2$ ist. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass es sich um eine wachsende Folge handelt. Wir bezeichnen nun

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\|c_{n_j}\|_{p_0}} \xi_1(x - n_j).$$

Auf gleiche Weise wie in Arbeit [1] lässt sich zeigen, dass $\varphi(x) \in S$ ist. Es ist also $\psi(x) = F(\varphi(-x)) \in S$.

Darum bildet die Funktionenfolge

$$(f_N(x), \psi(x)) = \sum_{-N}^{N} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx} \psi(x) \, dx = 2\pi \sum_{j=1}^{n_j \leqq N} \varphi(n_j) \, c_{n_j}$$

eine konvergente Folge im Raum Φ. Es ist aber $\varphi(n_j) = 1/\|c_{n_j}\|_{p_0}$ daher ist

$$(f_N(x), \psi(x)) = 2\pi \sum_{j=1}^{n_j \leqq N} \frac{c_{n_j}}{\|c_{n_j}\|_{p_0}}.$$

Die notwendige Bedingung für die Konvergenz der Folge ist, dass $\|c_{n_j}\|_{p_0}/\|c_{n_j}\|_{p_0} \to 0$ für $j \to \infty$ konvergiert. Dies ist jedoch nicht der Fall. Wir sind zum Widerspruch gekommen, der unsere Behauptung beweist.

Die Sätze 3.1 und 3.2 zeigen, dass wir jeder Funktion $f(x) \in U$ ein $g \in R$ so zuordnen können, dass $g(n) = c_n$ gilt und umgekehrt.

Den Beweis des folgenden Satzes überlassen wir dem Leser.[14])

Satz 3.3. *Es sei*

$$f(x) \in U, \quad g(x) \in U, \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n \in \Phi, \quad g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}, \quad d_n \in \Phi,$$

dann ist $f(x) = g(x)$ (die Gleichung gilt im Sinne des Raumes T) dann und nur dann, wenn $c_n = d_n$ für alle $n = \ldots -1, 0, 1$ ist.

Wir haben bewiesen, dass eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen R und U existiert. Wir können daher folgende Definition einführen:

Definition 3.4. *Die Fouriersche Transformation $\mathfrak{F}$ des Raumes R wird solche Abbildung R auf U genannt, welche für jedes $g \in R$ durch*

$$\mathfrak{F}g = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n) \, e^{inx}$$

definiert wird. Mit dem Symbol $\mathfrak{F}^{-1}$ bezeichnen wir dann eine solche Abbildung U auf R, für welche $\mathfrak{F}^{-1}f = h \in R$, $h(n) = c_n$ ist, wenn $f(x) \in U$, $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ gilt.

[14]) Der Beweis ist sehr ähnlich dem Beweise in Arbeit [1].

Es ist leicht einzusehen, dass die Abbildungen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^{-1}$ homogene, additive Abbildungen sind und dass es sich um eine inverse Abbildung handelt.

Ähnlich wie in Arbeit [1] beweist man auch folgende zwei Sätze:

Satz 3.4. *Die Abbildung $\mathfrak{F}$ ist eine stetige Abbildung des Raumes R auf U.*

Satz 3.5. *Die Abbildung $\mathfrak{F}^{-1}$ ist eine stetige Abbildung des Raumes U auf R.*

Satz 3.6. *Der Raum U ist in T abgeschlossen.*

Wir führen nun eine weitere Definition an.

Definition 3.5. *Eine verallgemeinerte abstrakte Funktion $f(x) \in T$ nennen wir eine periodische abstrakte Funktion mit der Periode 2π, kurz eine 2π-periodische Funktion, wenn für alle $\varphi \in S$ und jedes ganze k*

$$(f(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x + 2k\pi))$$

gilt.

Ist $a(x)$ eine 2π-periodische komplexe Funktion mit allen Ableitungen und $f(x)$ die abstrakte verallgemeinerte 2π-periodische Funktion, dann ist leicht einzusehen, dass $a(x) f(x)$ auch eine 2π-periodische Funktion ist.

Ähnlich wie in [1] gilt folgender Satz:

Satz 3.7. *Der Raum U ist mit dem Raum aller 2π-periodischen verallgemeinerten abstrakten Funktionen identisch.*

Auf gleiche Weise wie in [1] lässt sich auch der nächste Satz beweisen:

Satz 3.8. *Es sei $\mathbf{A}$ eine konvolutore Abbildung des Raumes in sich selbst und es sei $a(x) \in Q$ die zugeordnete Funktion zu $\mathbf{A}$. Es sei weiter $f \in R$. Dann ist $\mathfrak{F}\mathbf{A}f = \mathfrak{F}a\mathfrak{F}f$.*

Ebenso kann auch der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 3.9. *Es sei $\mathbf{A}$ eine konvolutore Abbildung des Raumes R in R und $\mathbf{A}$ entspreche der Funktion $a \in Q$. Es sei weiter $f \in R$ und $g \in R$ derart, dass $\mathfrak{F}g = \mathfrak{F}a\mathfrak{F}f$ gilt. Dann ist $g = \mathbf{A}f$.*

Bisher haben wir uns mit der Fourierschen Transformation des Raumes R beschäftigt. Wie in [1] übertragen wir die Ergebnisse auf den Raum R_m.

Definition 3.6. *Wir bezeichnen den Raum aller Spaltenmatrizen von m Gliedern aus Φ als Raum Φ_m. Die Konvergenz sei als Konvergenz der einzelnen Elemente eingeführt.*

Definition 3.7. *Den Raum aller linearen stetigen Operatoren, welche S in Φ_m abbilden, sei Raum T_m genannt. Die Addition und Multiplikation führen wir folgendermassen ein:*

$$(f_1 + f_2)(\varphi) = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)\,, \quad (af)(\varphi) = a\,f(\varphi) = f(a\varphi)\,.$$

Die Konvergenz ist als Konvergenz jedes einzelnen Gliedes wie in Definition 3.2 *eingeführt.*

Auf ähnliche Weise ist auch die Zuordnung eines Operators einer stetigen abstrakten Funktion mit Hilfe eines Integrals eingeführt. Den Raum T_m können wir als Raum $\underbrace{T \times \ldots \times T}_{m\text{-mal}}$ betrachten bzw. kennzeichnen, oder als Raum aller Spaltenmatrizen von m Gliedern aus T. Im Weiteren werden wir immer den Ausdruck mit Hilfe der Spaltenmatrizen anwenden.

Definition 3.8. *Den Raum aller solchen Elemente des Raumes T_m, welche in der Form einer im Sinne der verallgemeinerten abstrakten Funktion konvergenten Reihe*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n \in \Phi_m,$$

d. h. im Sinne der Konvergenz des Raumes T_m, ausgedrückt werden können, nennen wir Raum U_m.

Definition 3.9. *Eine solche Abbildung R_m auf U_m, dass für*

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{F}f = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}f_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{F}f_m \end{bmatrix}$$

gilt, nennen wir die Fouriersche Transformation des Raumes R_m. Auf gleiche Weise bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathfrak{F}^{-1}$ eine solche Abbildung des Raumes U_m auf R_m, dass für

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \in U_m, \quad \mathfrak{F}^{-1}g = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}^{-1}g_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{F}^{-1}g_m \end{bmatrix}$$

gilt.

Es gilt nun ein zu Satz 3.9 analoger Satz.

Satz 3.10. *Es sei eine konvolutore Abbildung $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{A}_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, m$ des Raumes R_m in R_m gegeben. Es entspreche weiter $\mathbf{A}$ der Matrix $(a_{i,j})$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $a_{ij} \in Q$. Es sei $f \in R_m$ und $g = \mathbf{A}f$. Dann gilt $\mathfrak{F}g = \mathfrak{F}a\mathfrak{F}f$, wobei wir mit $\mathfrak{F}a$ die Matrix $(\mathfrak{F}a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, m$ bezeichnet haben. Umgekehrt gilt: Ist $\mathfrak{F}g = \mathfrak{F}a\mathfrak{F}f$, dann ist $g = \mathbf{A}f$.*[15]

4. ÜBER DIE LÖSUNG DES A-PROBLEMS

In diesem Abschnitt beschränken wir uns einfachheitshalber auf das wichtigste, grundlegende Problem, welches mit der Lösung des **A**-Problems zusammenhängt. Es gilt folgender Satz:

[15]) Das Produkt verstehen wir im Sinne der Matrizenmultiplikation.

Satz 4.1. *Es seien konvolutore Abbildungen* $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{A}_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, m$ *des Raumes* R_m *in* R_m *gegeben. Es entspreche weiter* $\mathbf{A}$ *der Matrix* $(a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, m$ *und es sei*

$$\|\mathfrak{F}a\| = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}a_{1,1} & \cdots & \mathfrak{F}a_{1,m} \\ \vdots & & \\ \mathfrak{F}a_{m,1} & \cdots & \mathfrak{F}a_{m,m} \end{bmatrix} \neq 0 .$$

Dann existiert zu jedem $f \in R_m$ *gerade ein einziges* $g \in R_m$ *so, dass* $\mathbf{A}g = f$ *und* $\mathfrak{F}g = (\mathfrak{F}a)^{-1}\,\mathfrak{F}f$ *gilt,*[16])

Der Beweis wird auf ganz ähnliche Weise wie in [1] durchgeführt.

5. ÜBER DIE ZWEIDIMENSIONALE FOURIERSCHE TRANSFORMATION[17])

Definition 5.1. *Den linearen Raum über dem Körper komplexer Zahlen aller auf* $M \times M$ *definierten solcher Funktionen, dass für jedes* $f \in R$ *ein ganzes* $p > 0$ *und* $c > 0$ *so existiert, dass*

$$|f(m, n)| \leqq C(1 + |m|^p)(1 + |n|^p)$$

für alle $n, m \in M$ *gilt, nennen wir Raum* R^2.[18]) *Die Konvergenz in diesem Raum führen wir folgendermassen ein. Es sei* $f_n \in R^2$, $n = 1, 2, \ldots$ *dann ist* $f_n \to f \in H$, *wenn*

a) *für jedes* $j \in M$, $k \in M$, $f_n(j, k) \to f(j, k)$ *konvergiert,*

b) *eine Zahl* p *und eine von* C *unabhängige Konstante* n *so existieren, dass*

$$|f_n(j, k)| \leqq C(1 + |j|^p)(1 + |k|^p)$$

für alle $j \in M$, $k \in M$ *gilt.*

Definition 5.2. *Den linearen Raum aller Quadratmatrizen* m*-ter Ordnung (d. h. Matrizen der Form* $m \times m$*) mit den einzelnen Elementen aus* R^2, *nennen wir Raum* R^2_m. *Die Konvergenz sei als Konvergenz der einzelnen Elemente eingeführt.*

Definition 5.3. *Den linearen Raum aller auf* E_2 *(d. h. auf der Menge* $(-\infty, \infty) \times \times (-\infty, \infty)$*) definierten komplexen Funktionen, deren alle partiellen Ableitungen stetig sind und welche derart definiert sind, dass zu jeder Funktion und den ganzen Zahlen* $p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$, $q_1 \geqq 0$, $q_2 \geqq 0$ *eine Konstante* C_{p_1,p_2,q_1,q_2} *(von* φ *abhängig) derart existiert, dass*

$$|x|^{p_1}\,|y|^{p_2} \left| \frac{\partial^{q_1+q_2}\varphi}{\partial x^{q_1}\,\partial y^{q_2}} \right| \leqq C_{p_1,p_2,q_1,q_2}$$

[16]) $(\mathfrak{F}a)^{-1}$ bedeutet die inverse Matrix zur Matrix $\mathfrak{F}a$. Die Multiplikation verstehen wir im Sinne der Matrizenmultiplikation.

[17]) Für unsere weiteren Zwecke genügt von der Fourierschen Transformation komplexer (nicht abstrakter) Funktionen zu sprechen.

[18]) Wir meinen den Raum über dem Körper komplexer Zahlen. Addition und Multiplikation verstehen wir im Sinne der Definition 3.1.

für alle $(x, y) \in E_2$ gilt, nennen wir Raum S_2. Die Konvergenz in diesem Raum führen wir folgenderweise ein. Es sei $\varphi_n \in S_2$, $n = 1, 2, \ldots$ dann konvergiert $\varphi_n \to \varphi$, wenn

a) *auf jeder kompakten Menge $L \subset E_2$ die Funktionen φ_n für $n \to \infty$ und alle ihre partiellen Ableitungen gleichmässig zur Funktion φ resp. ihren Ableitungen konvergieren,*

b) *zu jeden vier Zahlen $p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$, $q_1 \geqq 0$, $q_2 \geqq 0$ eine Konstante C_{p_1,p_2,q_1,q_2} (von n unabhängig) derart existiert, dass*

$$|x|^{p_1}\,|y|^{p_1}\left|\frac{\partial^{q_1+q_2}\varphi_n}{\partial x^{q_1}\partial y^{q_2}}\right| \leqq C_{p_1,p_2,q_1,q_2}$$

für alle $(x, y) \in E_2$ gilt.

Definition 5.4. *Den Raum aller auf S_2 linearen stetigen Funktionale nennen wir Raum T^2. Die Addition und Multiplikation mit einer (komplexen) Zahl führen wir durch folgende Formeln*[20] *ein:*

$$(f_1 + f_2)(\varphi) = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)\,, \quad (af)(\varphi) = a\,f(\varphi) = f((a\varphi))\,.$$

Die Konvergenz sei folgendermassen definiert: Es sei $f_n \in T^2$, $n = 1, 2, \ldots$ und $f \in T^2$. Dann konvergiert $f_n \to f$, wenn für jede Funktion $\varphi \in S$ $f_n(\varphi) \to f(\varphi)$ gilt.

Wenn $g(x)$ eine komplexe integrierbare auf E_2 definierte Funktion ist, dann ordnen wir dieser Funktion das Funktional

$$f_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\varphi(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

zu.[21]

Wie schon früher in dieser Arbeit getan wurde, setzen wir das Funktional f_g der Funktion g gleich und werden (g, φ) statt $f_g(\varphi)$ schreiben.

Jede verallgemeinerte Funktion $g \in T^2$ können wir wie früher mit solchen Funktionen $a(x, y)$, welche alle Ableitungen haben und für welche gilt, dass für jedes ganze $q_1 \geqq 0$, $q_2 \geqq 0$ auch ganze $p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$ und eine Konstante C derart existieren, dass

$$\left|\frac{\partial a^{q_1+q_2}}{\partial x^{q_1}\,\partial y^{q_2}}\right| \leqq (|x|^{p_1} + |y|^{p_1} + 1)\,C$$

gilt, multiplizieren.

---

[19]) Die Addition und Multiplikation wird folgendermassen definiert:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\,, \quad (a\varphi_1)(x, y) = a\,\varphi_1(x, y)\,.$$

[20]) Addition und Multiplikation ist im geläufigen Sinne gemeint.

[21]) In [2] ist das Funktional durch die Formel

$$f_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\overline{\varphi(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

eingeführt. Alle Behauptungen und Beweise bleiben dieselben auch für den Fall des Funktionals, welchen wir eingeführt haben.

Die Multiplikation führen wir durch folgende Beziehung ein:

$$(a(x, y) f(x, y), \varphi(x, y)) = (f(x, y), a(x, y)\, \varphi(x, y)) .$$

Definition 5.5. *Den Raum aller Quadratmatrizen m-ter Ordnung (d. h. Matrizen vom Typ $m \times m$) über dem Körper aller komplexen Zahlen nennen wir Raum K_m. Die Konvergenz sei als Konvergenz der einzelnen Elemente eingeführt.*

Definition 5.6. *Den Raum linearer stetiger Operatoren, welche S_2 in K_m abbilden, nennen wir Raum T_m^2. Die Addition und Multiplikation, die Konvergenz und die Eigenschaften des Integrals sind ähnlich definiert wie in Definition 5.4.*

Den Raum T_m^2 können wir mit dem Raum $\underbrace{T^2 \times \ldots \times T^2}_{m^2\text{-mal}}$ oder mit dem Raum aller Quadratmatrizen m-ter Ordnung mit Elementen aus T^2 gleichsetzen. Wir werden den letzten Ausdruck benützen.

Definition 5.7. *Den Teilraum des Raumes T^2, welcher aus allen verallgemeinerten Funktionen besteht, die in der Form einer im Sinne der verallgemeinerten Funktionen (d. h. im Raum T^2) konvergenten Reihe*

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{imx} e^{inx} ,$$

wobei $c_{m,n}$ komplexe Zahlen sind, geschrieben werden können, nennen wir Raum U^2.

In Arbeit [2] ist gezeigt, dass U^2 ein Teilraum aller zweifach 2π-periodischen Funktionen aus T^2 ist.

Definition 5.8. *Den Teilraum des Raumes $U_m^2 \subset T_m^2$, der sich aus allen solchen Elementen des Raumes T_m^2 zusammensetzt, welche in Form einer im Sinne des Raumes T_m^2 konvergenten Reihe*

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{imx} e^{iny} ,$$

wobei $c_{m,n} \in K_m$ sind, geschrieben werden können, nennen wir Raum U_m^2.

Definition 5.9. *Eine solche Abbildung R^2 auf U^2, welche durch $g \in R^2$*

$$\mathfrak{F} g = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m, n)\, e^{imx} e^{iny}$$

vermittelt wird, nennen wir Fouriersche Transformation des Raumes R^2 (und bezeichnen sie mit dem Symbol $\mathfrak{F}$). Mit dem Symbol $\mathfrak{F}^{-1}$ bezeichnen wir eine derartige Abbildung des Raumes U^2 auf R^2 dass für

$$f(x, y) \in U^2 , \quad f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{imx} e^{inx} ,$$

$$\mathfrak{F}^{-1} f = h , \quad h(m, n) = c_{m,n}$$

gesetzt wird.

In [2] wird gezeigt, dass $\mathfrak{F}$ eine lineare homomorphe Abbildung R^2 auf U^2 ist.

Definition 5.10. *Eine solche Abbildung des Raumes R_m^2 auf U_m^2 dass für $g \in R_m^2$, $g = (g_{i,j})$, $\mathfrak{F}g \in T_m^2$, $\mathfrak{F}g = (\mathfrak{F}g_{i,j})$ gilt, nennen wir Fouriersche Transformation des Raumes R_m^2. Mit dem Symbol $\mathfrak{F}^{-1}$ bezeichnen wir eine solche Abbildung des Raumes U_m^2 auf R_m^2, dass für $g \in U_m^2$*

$$g = (g_{i,j}), \quad \mathfrak{F}^{-1}g = (\mathfrak{F}^{-1}g_{i,j})$$

gilt.

Es ist leicht einzusehen, dass $\mathfrak{F}$ eine lineare homomorphe Abbildung des Raumes R_m^2 auf U_m^2 ist.

6. DIFFERENZENGLEICHUNGEN IM HILBERTSCHEN RAUM

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit Φ den Hilbertschen Raum. Es ist leicht einzusehen, dass für $f \in R$, $g \in R$, $[f, g] \in R^2$ gilt. Es ist daher sinnvoll von $\mathfrak{F}[f, g] \in T^2$ zu sprechen.[22][23] Wir beweisen nun folgendes Lemma:

Lemma 6.1. *Es sei $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$, $\varphi_1(x) \in S$, $\varphi_2(x) \in S$ $f \in R$, $g \in R$. Dann ist $\varphi(x, y) \in S_2$ und*

$$(\mathfrak{F}[f, g], \varphi) = [(\mathfrak{F}f_1, \varphi_1(x))(\mathfrak{F}g, \overline{\varphi_2(-y)})] .$$

Beweis. Es ist

$$\mathfrak{F}[f, g] = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} [f(m), g(n)]\, e^{imx} e^{inx} ;$$

daher ist

$$(\mathfrak{F}[f, g], \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} [f(m), g(n)] \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} e^{inx}\, \varphi(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} [f(m), g(n)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx}\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\, \varphi_2(x)\, \mathrm{d}x .$$

Weiter ist

$$(\mathfrak{F}f, \varphi_1(x)) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx}\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x ; \quad (\mathfrak{F}g, \overline{\varphi(-y)}) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} g(n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iny}\, \overline{\varphi_2(-y)}\, \mathrm{d}y .$$

---

[22]) Das scalare Produkt im Raum Φ bezeichnen wir mit $[.]$ zum Unterschied von den Funktionalsklammern $(.)$.

[23]) Es sei bemerkt, dass $[f, g](m, n) = [f(m), g(n)]$.

Weil die letzten zwei Reihen nach der Norm konvergent sind, so ist

$$[(\mathfrak{F}f, \varphi_1(x)), (\mathfrak{F}g, \overline{\varphi_2(-y)})] =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} [f(m), g(n)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} \varphi_1(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iny}\, \overline{\varphi_2(-y)}\, dy =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} [f(m), g(n)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx}\, \varphi_1(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iny}\, \varphi_2(y)\, dy\,.$$

Wir beweisen folgendes Lemma:

Lemma 6.2. *Es seien $f \in R$, $g \in R$ und $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ seien konvolutore Abbildungen des Raumes R in sich selbst, welche den Funktionen $a_1 \in Q$, $a_2 \in Q$ entsprechen. Es sei weiter $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)$, $\varphi_1(x) \in S$, $\varphi_2(x) \in S$. Dann ist*

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = (\mathfrak{F}[f, g], (\mathfrak{F}a_1)(x)\, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)}\, \varphi)\,.$$

Beweis. Nach Lemma 6.1 ist

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = [(\mathfrak{F}\mathbf{A}_1 f, \varphi_1(x)), (\mathfrak{F}\mathbf{A}_2 g, \overline{\varphi_2(-y)})]\,.$$

Es gilt jedoch

$$\mathfrak{F}\mathbf{A}_1 f = \mathfrak{F}a_1 \mathfrak{F}f\,, \quad \mathfrak{F}\mathbf{A}_2 g = \mathfrak{F}a_2 \mathfrak{F}g\,;$$
$$[(\mathfrak{F}\mathbf{A}_1 f, \varphi_1(x)), (\mathfrak{F}\mathbf{A}_2 g, \overline{\varphi_2(-y)})] = [(\mathfrak{F}f, \mathfrak{F}a_1(x)\, \varphi_1(x)), (\mathfrak{F}g, \mathfrak{F}a_2(y)\, \overline{\varphi_2(-y)})] =$$
$$= [(\mathfrak{F}f, \varphi_1^*(x)), (\mathfrak{F}g, \overline{\varphi_1^*(-y)})]\,,$$

wobei $\varphi_1^*(x) = (\mathfrak{F}a_1)(x)\, \varphi_1(x)$; $\varphi_1^*(y) = \varphi_2(y)\, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)}$ ist. Auf Grund des Lemmas 6.1 ist also

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = (\mathfrak{F}[f, g], \mathfrak{F}a_1(x)\, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)}\, \varphi)\,.$$

Der Beweis ist erbracht.

Wir beweisen nun folgenden Satz:

Satz 6.1. *Es sei $f \in R$, $g \in R$, und $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ seien (den Funktionen $a_1 \in Q$, $a_2 \in Q$ entsprechende) konvolutore Abbildungen des Raumes R in R. Es sei weiter $\varphi(x, y) \in S_2$. Dann ist*

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = (\mathfrak{F}[f, g], \mathfrak{F}a_1(x)\, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)}\, \varphi)\,.$$

Beweis. Unter der Voraussetzung, dass $\varphi = \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)$, $\varphi_1(x) \in S$, $\varphi_2(x) \in S$ ist, gilt dieser Satz auf Grund von Lemma 6.2. Es ist jedoch $[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g] \in R^2$. Es gilt also

$$\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{imx} e^{iny}\,.$$

Darum ist

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} e^{iny}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy\,,$$

so dass gilt

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \psi(m, n),$$

wobei wir $\psi(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} e^{inx} \varphi(x, y) \, dx \, dy$ schreiben. Wir definieren nun die Funktion $\psi^*(x, y)$ folgendermassen

$$\psi^*(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_1(x - m) \, \zeta_1(y - n) \, \psi(m, n) \text{ [24]}$$

und bezeichnen

$$\varphi^*(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(u, v) \, e^{-ixu} e^{-iyv} \, du \, dv .$$

Dann ist

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = (\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi^*),$$

denn

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} e^{iny} \varphi^*(x, y) \, dx \, dy =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \psi^*(m, n) = (\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi)$$

gilt und $\psi(m, n) = \psi^*(m, n)$ für alle $(m, n) \in M^2$. Die Reihe ist für die Funktion $\psi^*(x, y)$ im Raum S_2 konvergent. Dann gilt auf Grund der Eigenschaften des Fourierschen Integrals

$$\varphi^*(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(m, n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \zeta_1(u - m) \, du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyv} \zeta_1(v - n) \, dv =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(m, n) \, \kappa_m^{(1)}(x) \, \kappa_n^{(2)}(y)$$

und die Reihe konvergiert in S_2. Es ist also

$$(\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi) = (\mathfrak{F}[\mathbf{A}_1 f, \mathbf{A}_2 g], \varphi^*) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(m, n)([\mathfrak{F}\mathbf{A}_1 f, \mathfrak{F}\mathbf{A}_2 g], \kappa_m^{(1)}(x) \, \kappa_n^{(2)}(y)) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathfrak{F}[f, g], \psi(m, n) \, \mathfrak{F}a_1(x) \, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)} \, \kappa_m^{(1)}(x) \, \kappa_n^{(2)}(y)) =$$

$$= (\mathfrak{F}[f, g] \, \mathfrak{F}a_1(x) \, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)}, \varphi^*(x, y)) =$$

$$= (\mathfrak{F}[f, g] \, \mathfrak{F}a_1(x) \, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)}, \varphi(x, y)) =$$

$$= (\mathfrak{F}[f, g], \mathfrak{F}a_1(x) \, \overline{\mathfrak{F}a_2(-y)} \, \varphi(x, y)) .$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

---

[24]) Siehe die auf Seite 468 angeführte Funktion ζ_n.

Es sei nun $g \in R_m$. Ordnen wir dieser Funktion eine Funktion $G \in R_m^2$ derart zu, dass

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{1,1}, \ldots, G_{1,m} \\ \\ G_{m,1}, \ldots, G_{m,m} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_{k,l}(p,q) = [g_k(p), g_l(q)]$$

ist. Die Funktion $G \in R_m^2$ nennen wir die Kovariationsfunktion der Funktion $g \in R_m$. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Satz 6.2. *Es sei* $\mathbf{A}$ *eine der Matrix* $a \equiv (a_{i,j})$ *entsprechende konvolutore Abbildung des Raumes* R_m *in* R_m. *Es sei weiter* $g \in R_m$ *mit der Kovariationsmatrix* $G \in R_m^2$, *sei* $h = Ag$ *und* H *sei die Kovariationsmatrix des Elementes* h. *Dann ist*

$$\mathfrak{F}H = (\mathfrak{F}a(x))\,(\mathfrak{F}G)\,\widehat{(\overline{\mathfrak{F}a(-y)})}\,, \tag{6.1}$$

wobei mit dem Symbol $\widehat{(\overline{\mathfrak{F}a(-y)})}$ *die transponierte Matrix der Matrix* $\overline{\mathfrak{F}a(-y)}$ *bezeichnet wird und der Ausdruck* (6.1) *im Sinne der Matrizenmultiplikation aufzufassen ist.*

Beweis. Ist $\mathbf{A}g = h$, so ist $\mathfrak{F}h = \mathfrak{F}a\mathfrak{F}g$. Darum, wenn

$$\mathfrak{F}h = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}h_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{F}h_m \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{F}h_j \in U\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \quad \mathfrak{F}g = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}g_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{F}g_m \end{bmatrix}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{F}h_j = \sum_{l=1}^{m} a_{j,l}\mathfrak{F}g_l\,;$$

es ist also

$$\mathfrak{F}[h_j, h_k] = \mathfrak{F}\Big[\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}_{j,l}g_l, \sum_{n=1}^{m} \mathbf{A}_{k,n}g_n\Big]\,.$$

Nach Satz 6.1 ist

$$(\mathfrak{F}[h_j, h_h], \varphi) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{n=1}^{m} (\mathfrak{F}[\mathbf{A}_{j,l}g_l, \mathbf{A}_{k,n}g_n], \varphi) =$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{n=1}^{m} (\mathfrak{F}a_{j,l}(x)\, \mathfrak{F}[g_l, g_n], \mathfrak{F}a_{k,n}(-y), \varphi)\,.$$

Man kann also symbolisch

$$\mathfrak{F}H = (\mathfrak{F}a(x))\,(\mathfrak{F}G)\,\widehat{(\overline{\mathfrak{F}a(-y)})} \tag{6.2}$$

schreiben, wobei mit $\widehat{\overline{\mathfrak{F}a(-y)}}$ die transponierte Matrix der Matrix $\overline{\mathfrak{F}a(-y)}$ bezeichnet wurde. Im Ausdruck (6.2) handelt es sich um die Matrizenmultiplikation.

Aus Satz (6.2) folgt offensichtlich auch die Lösung der Aufgabe, eine Kovariatonsmatrix der Lösung des $\mathbf{A}$-Problems $\mathbf{A}x = y$ zu finden, wenn wir die Kovariationsmatrix des Elementes y kennen. Wenn nämlich $|||\mathfrak{F}a|||\geqq\alpha>0$ für alle x gilt, so existiert (vergl. Abschnitt 4) eine inverse Abbildung $\mathbf{A}^{-1}$, welche gleichzeitig eine konvolutore Abbildung ist. Infolgedessen können wir direkt den Satz 6.2 anwenden.

In diesem Absatz haben wir uns mit den Hilbertschen Räumen befasst und die Kovariationsmatrix ausgedrückt. Offenbar ist es möglich, die Ergebnisse dieses Abschnittes auf das Studium zufälliger Differenzengleichungen anzuwenden. Mit konkreten technischen Problemen werden wir uns in einer weiteren Arbeit befassen.

Literaturverzeichnis

[1] *Ivo Babuška*: The Fourier transform in the theory of difference equations and its applications. Archiwum mechaniki stosowanej *11* (1959), 349—381.

[2] *Emil Vitásek*: The *n*-dimensional Fourier transform in the theory of difference equations. Archiwum mechaniki stosowanej *12* (1961), 185—202.

Výtah

FOURIEROVA TRANSFORMACE V TEORII DIFERENČNÍCH ROVNIC VE SPOČETNĚ NORMOVANÝCH PROSTORECH A NĚKTERÉ APLIKACE

IVO BABUŠKA, Praha

Práce je rozšířením teorie diskrétní Fourierovy transformace, která byla podrobně studována v práci [1], na problémy abstraktních funkcí. Speciálně je studován případ Hilbertova prostoru a problém znáhodnělých řešení diferenčních rovnic a jejich kovariančních funkcí.

Резюме

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ В СЧЕТНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ИВО БАБУШКА (IVO BABUŠKA), Прага

Работа является расширением теории дискретного преобразования Фурье, которая подробно исследовалась в работе [1], на проблемы абстрактных функций. В частности исследуется случай пространства Гильберта и проблема случайных решений уравнений в конечных разностях и их функций ковариантности.