František Hladík

Poznámka o rovnici $y'' + \phi y' + \psi y = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 372--373

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117371`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O ROVNICI $y'' + \varphi y' + \psi y = 0$

FRANTIŠEK HLADÍK, Písek

Věta. *Nechť funkce φ, ψ' jsou spojité na intervalu (a, b) a nechť ψ nemění na tomto intervalu znaménko. Nechť*

$$(1) \qquad \frac{F^2}{F' + \varphi F} = \alpha\,,$$

kde α je nenulová konstanta a $F = 2\varphi + \psi'/\psi$. Pak lze rovnici

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \varphi(x) \,.\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \psi(x)\, y = 0$$

převést substitucí

$$(3) \qquad \eta(\xi) = y(x)\,, \quad \xi = -\alpha F^{-1}(x_1) + \int_{x_1}^{x} \exp\left(-\int_{x_1}^{s} \varphi(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\,, \quad x_1 \in (a, b)$$

na rovnici

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2} + k|\xi|^{-\alpha}\,\eta = 0\,.$$

Poznámka. Jestliže $\alpha = 0$, pak lze rovnici (2) převést na rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\psi}{|\psi|}\,\eta = 0 \quad \text{substitucí} \quad \xi = \int \sqrt{|\psi|}\,, \quad \eta(\xi) = y(x)\,.$$

Jestliže $\alpha = 2$, pak rovnice (4) je rovnice Eulerova. Jestliže $\alpha = 4k/(2k - 1)$, kde k je celé číslo, pak lze rovnici (4) převést na rovnici Riccatiho, která je řešitelná pomocí elementárních funkcí.

Důkaz. Záměnou (3) přejde rovnice (2) v rovnici

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2} + \psi(x)\, e^{2\int_{x_1}^{x} \varphi(r)\,\mathrm{d}r} \,.\, \eta = 0\,,$$

kde $x = x(\xi)$. Ze vztahu (1) plyne, že F^{-1} je řešením rovnice $u' - \varphi u = -1/\alpha$. Můžeme tedy psát, použijeme-li vztahu (3),

$$F^{-1}(x) = -\frac{\xi(x)}{\alpha\,\xi'(x)}\,.$$

Odtud plyne

$$\left|\frac{\xi(x)}{\xi(x_1)}\right|^{-\alpha} = e^{2\int_{x_1}^{x}\varphi(s)\,\mathrm{d}s}\cdot\frac{\psi(x)}{\psi(x_1)}\,.$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (5), obdržíme (4).

Poznámka. Použitím této věty snadno nalezneme řešení, např. rovnic

$$y'' - y'\operatorname{cotg} x + a\,\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,y = 0 \quad \text{a} \quad y'' + \frac{2x+1}{x^2}\,y' + \frac{a^2}{x^4}\,y = 0\,.$$

PŘIBLIŽNÁ KONSTRUKCE PRAVIDELNÉHO SEDMIÚHELNÍKA

P. Hugo Vorlíček, Havlíčkův Brod, zaslal redakci tuto přibližnou konstrukci pravidelného sedmiúhelníka

Buď k kružnice o poloměru 1 se středem v počátku v rovině s kartézskou souřadnou soustavou. Sestrojme body $A = [1, 0]$, $B = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$, $C = [\frac{5}{9}, 0]$. (Bod B leží na k a má od bodu A vzdálenost 1.) Strana pravidelného sedmiúhelníka, vepsaného do kružnice k, se pak přibližně rovná vzdálenosti bodu B od bodu C. Jestliže totiž středový úhel, příslušný k tětivě délky d, označíme symbolem α, je

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}d = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{4} + \left(\tfrac{5}{9} - \tfrac{1}{2}\right)^2} = \tfrac{1}{18}\sqrt{61}\,,$$

a tedy $\alpha \doteq 51°25'51{,}6''$. Chyba $\alpha - 360°/7$ je přibližně rovna $8{,}7''$.

Redakce