Josef Král
Poznámka o povrchu kartézského součinu dvou množin

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 261--268

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117366`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 86 * PRAHA 24. VIII. 1961 * ČÍSLO 3

POZNÁMKA O POVRCHU KARTÉZSKÉHO SOUČINU DVOU MNOŽIN

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 9. prosince 1959)

V této poznámce je ukázáno, že strukturu povrchové míry definované na hranici kartézského součinu dvou měřitelných množin lze jednoduše popsat s pomocí povrchových měr příslušných k jednotlivým faktorům tohoto součinu.

V dalším E_n bude n-rozměrný euklidovský prostor. Pro $A \subset E_n$ značí symboly H_A, $\mathsf{L}_n A$ hranici a vnější Lebesgueovu míru množiny A. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme index n u symbolu L_n vynechávat.

Nechť $\mathscr{V}_n = \mathscr{V}$ je systém všech n-rozměrných vektorových funkcí $v = [v_1, \ldots, v_n]$ na E_n, jejichž složkami jsou nekonečně derivovatelné funkce s kompaktním nosičem. Dále buď $\mathscr{V}_n^1 = \mathscr{V}^1$ podsystém všech $v \in \mathscr{V}$, pro něž $\max\limits_{z \in E_n} |v(z)| \leqq 1$. Je-li A měřitelná podmnožina v E_n, pak symbolem $P(A, \ldots)$ označíme funkcionál na systému $\mathscr{V}$, jenž je definován vztahem

$$P(A, v) = \int_A \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(z)}{\partial z_i} \right) \mathrm{d}z\,, \quad v \in \mathscr{V}\,.$$

Položíme-li dále

$$\|A\| = \sup_v P(A, v)\,, \quad v \in \mathscr{V}^1\,,$$

potom podmínka $\|A\| < \infty$ je nutná a stačí k tomu, aby na hranici $H_A = H$ množiny A existovala úplně konečná borelovská míra $\mathsf{P}_A = \mathsf{P}$ a borelovsky měřitelná[1]) n-rozměrná vektorová funkce $\nu^A = [\nu_1^A, \ldots, \nu_n^A] = \nu$ o následujících vlastnostech:

(i) $$P(A, v) = \int_H v\nu \,\mathrm{d}\mathsf{P} \quad \text{pro všechna } v \in \mathscr{V}\,,$$

(ii) $$|\nu(z)| = 1 \quad \text{pro } \mathsf{P} - \text{skoro všechna } z \in H\,.$$

Vlastnostmi (i), (ii) je míra P stanovena jednoznačně a vektorová funkce ν skoro jednoznačně (vzhledem k P); dále je $\|A\| = \mathsf{P}H_A$.

[1]) To znamená, že funkce ν_i^A $(1 \leqq i \leqq n)$ jsou borelovsky měřitelné.

Pro případ, že množina A je omezená, byla právě uvedená tvrzení dokázána J. Maříkem v práci [5]. Z citované práce je rovněž patrno, že stejné metody lze aplikovat i v případě, že A není omezená. Lze rovněž snadno zjistit, že číslo $\|A\|$ splývá s povrchem množiny A definovaným de Giorgim v práci [1]. Odkazy na další práce H. Federera, W. H. Fleminga, K. Krickeberga, Chr. Y. Pauca, věnované teorii povrchové míry P a otázkám, které s ní úzce souvisí, nalezne čtenář v článku [6].

Cílem této poznámky je podat jednoduchý popis struktury míry P_C příslušné k množině C, jež je kartézským součinem měřitelných množin $A \subset E_r$ a $B \subset E_s$. Budeme stále předpokládat, že k, r, s jsou přirozená čísla taková, že $r + s = k$. Body prostoru E_k budeme psát ve tvaru $[x, y]$, kde $x \in E_r$ a $y \in E_s$. Pro $M \subset E_k$ a $x \in E_r$ (resp. $y \in E_s$) označíme symbolem $M^{x,*}$ (resp. $M^{*,y}$) množinu všech $y \in E_s$ (resp. $x \in E_r$), pro něž $[x, y] \in M$. Je-li dále $v = [v_1, \ldots, v_k]$ k-rozměrná vektorová funkce na M, pak pro $x \in E_r$ definujeme na $M^{x,*}$ s-rozměrnou vektorovou funkci $v^{x,*}$ předpisem

$$v^{x,*}(y) = [v_{r+1}(x, y), \ldots, v_k(x, y)], \quad y \in M^{x,*}.$$

Podobně definujeme pro $y \in E_s$

$$v^{*,y}(x) = [v_1(x, y), \ldots, v_r(x, y)], \quad x \in M^{*,y}.$$

Jsou-li P^1, P^2 dvě borelovské míry na M, pak zápisem $\mathsf{P}^1 \perp \mathsf{P}^2$ označíme, že míry P^1, P^2 jsou na M navzájem singulární (por. [4], kap. VI, § 30).

Nejprve dokážeme následující jednoduché lemma:

Lemma 1. *Nechť Z_1, Z_2 jsou borelovské množiny, $Z_1 \subset E_r$, $Z_2 \subset E_s$. Nechť P^i, L^i jsou borelovské míry na Z_i $(i = 1, 2)$. Potom $\mathsf{P}^1 \times \mathsf{L}^2 \perp \mathsf{L}^1 \times \mathsf{P}^2$ na $Z_1 \times Z_2$ právě tehdy, když $\mathsf{P}^1 \perp \mathsf{L}^1$ na Z_1 nebo $\mathsf{P}^2 \perp \mathsf{L}^2$ na Z_2.*

Důkaz. Je-li pro některé i $(= 1$ nebo $2)$ $\mathsf{P}^i \perp \mathsf{L}^i$ na Z_i, pak snadno nahlédneme, že $\mathsf{P}^1 \times \mathsf{L}^2 \perp \mathsf{L}^1 \times \mathsf{P}^2$ na $Z_1 \times Z_2$. (S tímto tvrzením ostatně v dalším vystačíme; obrácené tvrzení dokazujeme pouze pro úplnost.) Naopak, buď $\mathsf{P}^1 \times \mathsf{L}^2 \perp \mathsf{L}^1 \times \mathsf{P}^2$ na $Z_1 \times Z_2$. Pak existují disjunktní borelovské množiny X, Y tak, že $X \cup Y = Z_1 \times Z_2$ a

$$(\mathsf{P}^1 \times \mathsf{L}^2)\, X = 0 = (\mathsf{L}^1 \times \mathsf{P}^2)\, Y.$$

Odtud plyne, že existuje P^1-nulová borelovská množina $P \subset Z_1$ a L^1-nulová borelovská množina $L \subset Z_1$ tak, že

$$x \in Z_1 - P \Rightarrow \mathsf{L}^2 X^{x,*} = 0,$$
$$x \in Z_1 - L \Rightarrow \mathsf{P}^2 Y^{x,*} = 0.$$

Předpokládejme nyní, že není $\mathsf{P}^1 \perp \mathsf{L}^1$ na Z_1. Potom nutně $\mathsf{L}^1(Z_1 - P) > 0$, takže také $\mathsf{L}^1(Z_1 - P - L) > 0$; specielně tedy $Z_1 - P - L \neq \emptyset$. Zvolme nyní pevně $x \in Z_1 - P - L$. Pak $\mathsf{L}^2 X^{x,*} = 0 = \mathsf{P}^2 Y^{x,*}$. Ježto $X^{x,*}$, $Y^{x,*}$ jsou disjunktní borelovské množiny, jejichž sjednocením je Z_2, znamená to, že $\mathsf{P}^2 \perp \mathsf{L}^2$ na Z_2.

Poznámka 1. Je zřejmé, že výše uvedené lemma i s ideou důkazu lze přenést na míry definované na abstraktních množinách. My však vystačíme s předchozí formulací.

Lemma 2. *Nechť $A \subset E_r$, $B \subset E_s$ jsou měřitelné množiny. Potom*

$$\max\left(\mathrm{L}A \,.\, \|B\|\,,\quad \|A\| \,.\, \mathrm{L}B\right) \leqq \|A \times B\| \leqq \mathrm{L}A \,.\, \|B\| + \|A\| \,.\, \mathrm{L}B\,.$$

Důkaz. Poznamenejme nejprve, že pro každou vektorovou funkci $v \in \mathscr{V}_k$ platí vzorec

$$P(A \times B, v) = \int_A P(B, v^{x,*})\,\mathrm{d}x + \int_B P(A, v^{*,y})\,\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

Skutečně, $P(A \times B, v) = \int_{A\times B} \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i(x, y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{A\times B} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial y_j} v_{j+r}(x, y)\right) .$ $.\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_B P(A, v^{*,y})\,\mathrm{d}y + \int_A P(B, v^{x,*})\,\mathrm{d}x$. Je-li nyní $v \in \mathscr{V}_k^1$, je $v^{*,y} \in \mathscr{V}_r^1$ a $v^{x,*} \in \mathscr{V}_s^1$, $P(A, v^{*,y}) \leqq \|A\|$, $P(B, v^{x,*}) \leqq \|B\|$ a $P(A \times B, v) \leqq \|A\| \,.\, \mathrm{L}B + \mathrm{L}A \times$ $\times \|B\|$. Odtud vzhledem k libovolnosti volby vektorové funkce $v \in \mathscr{V}_k^1$ plyne ihned nerovnost

$$\|A \times B\| \leqq \|A\| \,.\, \mathrm{L}B + \mathrm{L}A \,.\, \|B\|\,.$$

Jestliže $\|A\| = 0$, pak ovšem

$$\|A \times B\| \geqq \|A\| \,.\, \mathrm{L}B\,.^{2)} \tag{2}$$

Předpokládejme nyní, že $\|A\| > 0$. Položme

$$K_n = \{y;\ y \in E_s, |y| \leqq n\}$$

a sestrojme na E_s nekonečně derivovatelné funkce g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tak, aby $g_n(y) = 1$ pro $y \in K_n$, $g_n(y) = 0$ pro $y \in E_s - K_{n+1}$, $0 \leqq g_n(y) \leqq 1$ pro všechna $y \in E_s$. Zvolme libovolně číslo $\alpha \in (0, \|A\|)$. Potom existuje $w \in \mathscr{V}_r^1$ tak, že $P(A, w) >$ $> \alpha$. Definujeme-li na E_k k-rozměrné vektorové funkce v^n předpisem

$$v^n(x, y) = [g_n(y) \,.\, w(x), 0]\,, \quad x \in E_r\,, \quad y \in E_s$$

(symbol 0 zde ovšem značí s-tici nul), pak zřejmě $v^n \in \mathscr{V}_k^1$ pro všechna n. Dále máme

$$\|A \times B\| \geqq P(A \times B, v^n) = \int_B g_n(y)\, P(A, w)\,\mathrm{d}y \geqq \alpha \int_B g_n(y)\,\mathrm{d}y \geqq \alpha \mathrm{L}(B \cap K_n)\,,$$

což dá po limitním přechodu pro $n \to \infty$ nerovnost

$$\|A \times B\| \geqq \alpha \mathrm{L}B\,.$$

Vidíme, že opět platí (2). Z důvodů symetrie také

$$\|A \times B\| \geqq \mathrm{L}A \,.\, \|B\|\,.$$

[2]) Definujeme $0 \,.\, \infty = 0$.

Poznámka 2. Pro $A \subset E_m$ označíme symboly $\bar{A}$, A^0 uzávěr a vnitřek množiny A. Je-li množina A měřitelná, pak existuje množina $X \subset A$ typu F_σ tak, že $\mathsf{L}(A - X) = 0$. Položíme-li $Y = X \cup A^0$, pak ovšem Y má opět typ F_σ, $Y \subset A$ a $\mathsf{L}(A - Y) = 0$. Kromě toho je $H_Y = \bar{Y} - Y^0 \subset \bar{A} - A^0 = H_A$. Pro každou vektorovou funkci $v \in \mathscr{V}_m$ platí $P(A, v) = P(Y, v)$. Odtud a z věty o jednoznačnosti míry P_A a vektorové funkce v^A snadno plyne, že $\mathsf{P}_A(H_A - H_Y) = 0$, $\mathsf{P}_A = \mathsf{P}_Y$ na H_Y, $v^A = v^Y$ P_A – skoro všude na H_Y. Je tedy vidět, že při studiu míry P_A a vektorové funkce v^A se můžeme bez újmy obecnosti omezit na případ, že A je borelovská množina.

Poznámka 3. Ke každé borelovské množině $A \subset E_m$, pro niž $\|A\| < \infty$, existuje borelovská množina $D_A \subset H_A$ tak, že

$$\mathsf{L}_m D_A = 0 = \mathsf{P}_A(H_A - D_A)$$

(viz [2], [3]; por. též [5], str. 547); míry P_A, L_m jsou tedy navzájem singulární na H_A.

Věta 1. *Nechť $A \subset E_r$, $B \subset E_s$ jsou borelovské množiny a položme $C = A \times B$. Předpokládejme, že*

$$\|A\| + \|B\| + \mathsf{L}A + \mathsf{L}B < \infty .^{3})$$

Potom $\|C\| < \infty$. Definujeme-li borelovské míry R_A, R_B a k-rozměrné vektorové funkce μ^A, μ^B tak, že položíme

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_A &= \mathsf{P}_A \times \mathsf{L}_s && \textit{na} \quad H_A \times E_s\,, \\ \mu^A(x, y) &= [v^A(x), 0] && \textit{pro} \quad x \in H_A,\, y \in E_s\,, \\ \mathsf{R}_B &= \mathsf{L}_r \times \mathsf{P}_B && \textit{na} \quad E_r \times H_B\,, \\ \mu^B(x, y) &= [0, v^B(y)] && \textit{pro} \quad x \in E_r,\, y \in H_B\,, \end{aligned}$$

pak pro míru P_C a vektorovou funkci v^C platí

$$\mathsf{P}_C = \mathsf{R}_A \quad \textit{na} \quad [H_A \times (B - H_B)] \cup [(H_A - A) \times (B \cap H_B)] = Z_A\,, \tag{3}$$

$$v^C = \mu^A \quad \mathsf{P}_C \text{ -- } \textit{skoro všude na } Z_A\,, \tag{4}$$

$$\mathsf{P}_C = \mathsf{R}_B \quad \textit{na} \quad [(A - H_A) \times H_B] \cup [(A \cap H_A) \times (H_B - B)] = Z_B\,, \tag{5}$$

$$v^C = \mu^B \quad \mathsf{P}^C \text{ -- } \textit{skoro všude na } Z_B\,, \tag{6}$$

$$\mathsf{P}_C = \mathsf{R}_A + \mathsf{R}_B \quad \textit{na} \quad (A \cap H_A) \times (B \cap H_B) = Z\,, \tag{7}$$

$$\mathsf{P}_C[(H_A - A) \times (H_B - B)] = 0\,, \tag{8}$$

$$v^C = \frac{\mathrm{d}\mathsf{R}_A}{\mathrm{d}(\mathsf{R}_A + \mathsf{R}_B)}\,\mu^A + \frac{\mathrm{d}\mathsf{R}_B}{\mathrm{d}(\mathsf{R}_A + \mathsf{R}_B)}\,\mu^B\ ^{4}) \quad \mathsf{P}_C \text{ -- } \textit{skoro všude na } Z\,.$$

Míry R_A, R_B jsou navzájem singulární na $H_A \times H_B$.

---

[3]) Vyloučíme-li triviální případ $\mathsf{L}A \,.\, \mathsf{L}B = 0$, pak tato podmínka je nutná k tomu, aby $\|C\| < \infty$; srvn. též následující větu 2. (Podotýkáme, že $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \mathsf{L}A = 0$.) Následující text věty 1 je možno též nahradit jednodušším tvrzením z níže uvedené poznámky 5.

[4]) Derivační symboly je zde ovšem třeba chápat ve smyslu teorie míry; por. [4], kap. VI, § 32.

Důkaz. Z lemmatu 2 je patrno, že $\|C\| < \infty$. Je-li $v \in \mathscr{V}_k$, pak

$$\int_{Z_A} v \,.\, \mu^A \, dR_A + \int_{Z_B} v \,.\, \mu^B \, dR_B +$$

$$+ \int_Z v \,.\left(\frac{dR_A}{d(R_A + R_B)} \mu^A + \frac{dR_B}{d(R_A + R_B)} \mu^B \right) d(R_A + R_B) =$$

$$= \int_{Z_A \cup Z} v \,.\, \mu^A \, dR_A + \int_{Z_B \cup Z} v \,.\, \mu^B \, dR_B = \int_B \left(\int_{H_A} v^{*,y} \,.\, v^A \, dP_A \right) dy +$$

$$+ \int_A \left(\int_{H_B} v^{x,*} \,.\, v^B \, dP_B \right) dx = \int_B P(A, v^{*,y}) \, dy + \int_A P(B, v^{x,*}) \, dx =$$

$$= (\text{viz } (1)) = P(C, v) = \int_{H_C} v \,.\, v^C \, dP_C \,.$$

Z předchozí poznámky a z lemmatu 1 ihned plyne, že

$$R_A \perp R_B \quad \text{na} \quad H_A \times H_B \,,$$

takže

$$\frac{dR_A}{d(R_A + R_B)} \cdot \frac{dR_B}{d(R_A + R_B)} = 0 \quad (R_A + R_B) - \text{skoro všude na } H_A \times H_B \,.$$

Protože ovšem

$$\frac{dR_A}{d(R_A + R_B)} + \frac{dR_B}{d(R_A + R_B)} = 1 \quad \text{skoro všude} \,,$$

je

$$\left| \frac{dR_A}{d(R_A + R_B)} \mu^A + \frac{dR_B}{d(R_A + R_B)} \mu^B \right| = 1$$

$(R_A + R_B)$ – skoro všude na $H_A \times H_B \supset Z$. Odtud a z předchozího plyne podle věty o jednoznačnosti míry P_C a vektorové funkce v^C naše tvrzení.

Věta 2. *Nechť $A \subset E_r$, $B \subset E_s$ jsou měřitelné množiny. Potom*

$$\|A \times B\| = \|A\| \,.\, LB + LA \,.\, \|B\| \,. \tag{9}$$

Důkaz. Je-li některé z čísel

$$LA \,, \quad LB \,, \quad \|A\| \,, \quad \|B\| \tag{10}$$

rovno nule, pak také $\|A\| \,.\, LB + LA \,.\, \|B\| = 0$ a z lemmatu 2 plyne, že (9) platí. Jsou-li čísla (10) vesměs kladná, pak na základě téhož lemmatu zjistíme, že (9) platí, je-li některé z nich nekonečné. Zbývá tedy vyšetřit případ, kdy všechna čísla (10) jsou konečná. Vzhledem k poznámce 2 můžeme předpokládat, že množiny A, B jsou borelovské. Pak můžeme aplikovat větu 1, čímž dostaneme

$$\|A\| \,.\, LB + LA \,.\, \|B\| - \|A \times B\| = R_A(H_A \times B) + R_B(A \times H_B) - P_C H_C =$$

$$= (\text{viz } (8)) = R_A(H_A \times B) - P_C Z_A + R_B(A \times H_B) - P_C Z_B - P_C Z \,.$$

Nyní stačí užít vztahů (3), (5), (7) a uvědomit si, že

$$H_A \times B = Z_A \cup Z\,, \quad A \times H_B = Z_B \cup Z$$

s disjunktními sjednoceními vpravo.

Poznámka 4. Je-li speciálně $s = 1$, $B = \langle a, a + h \rangle$ $(h > 0)$, pak $\|B\| = 2$ a z předchozí věty dostáváme vzorec pro povrch „válce" $A \times \langle a, a + h \rangle$

$$\|A \times \langle a, a + h \rangle\| = 2\mathsf{L}A + \|A\| \,.\, h\,.$$

Poznámka 5. Nechť $A \subset E_r$, $B \subset E_s$ jsou lebesgueovsky měřitelné množiny a nechť $\|A\| + \|B\| + \mathsf{L}A + \mathsf{L}B < \infty$, $C = A \times B$. Buď D_A borelovská množina s vlastnostmi z poznámky 3 (kde položíme $m = r$) a zvolme ještě borelovskou množinu $\tilde{A} \subset A - D_A$ tak, aby $\mathsf{L}(A - \tilde{A}) = 0$. Nechť množiny D_B, $\tilde{B}$ mají obdobný význam vzhledem k B. Definujeme-li borelovské míry R_A, R_B i vektorové funkce μ^A, μ^B stejně jako ve větě 1, pak pro míru P_C a vektorovou funkci v^C platí

$$\begin{gathered} \mathsf{P}_C = \mathsf{R}_A \quad \text{na} \quad D_A \times \tilde{B} = Y_A\,, \\ v^C = \mu^A \quad \mathsf{P}_C - \text{skoro všude na } Y_A\,, \\ \mathsf{P}_C = \mathsf{R}_B \quad \text{na} \quad \tilde{A} \times D_B = Y_B\,, \\ v^C = \mu^B \quad \mathsf{P}_C - \text{skoro všude na } Y_B\,;\ \mathsf{P}_C(H_C - (Y_A \cup Y_B)) = 0\,. \end{gathered}$$

K důkazu si stačí uvědomit, že pro každou vektorovou funkci $v \in \mathscr{V}_k$ platí

$$\int_{Y_A} v \,.\, \mu^A \,\mathrm{d}\mathsf{R}_A + \int_{Y_B} v \,.\, \mu^B \,\mathrm{d}\mathsf{R}_B = \int_{\tilde{B}} \left(\int_{D_A} v^{*,y} \,.\, v^A \,\mathrm{d}\mathsf{P}_A \right) \mathrm{d}y \,+$$

$$+ \int_{\tilde{A}} \left(\int_{D_B} v^{x,*} \,.\, v^B \,\mathrm{d}\mathsf{P}_B \right) \mathrm{d}x = \int_B P(A, v^{*,y})\,\mathrm{d}y + \int_A P(B, v^{x,*})\,\mathrm{d}x = \int_{H_C} v \,.\, v^C \,\mathrm{d}\mathsf{P}_C\,,$$

a aplikovat větu o jednoznačnosti míry P_C a vektorové funkce v^C (podobně jako v důkazu věty 1).

Je-li $\mathsf{L}H_A = 0$ (resp. $\mathsf{L}H_B = 0$), můžeme v předchozím tvrzení volit $\tilde{A} = A^0$ (resp. $\tilde{B} = B^0$) a zaměnit D_A (resp. D_B) množinou H_A (resp. H_B).

Předchozími větami je vyšetřování povrchové míry indukované na hranici kartézského součinu dvou měřitelných množin redukováno na studium povrchových měr příslušných k jednotlivým faktorům. Pro $A \subset E_r$ je souvislost míry P_A s $(r - 1)$-rozměrnou Hausdorffovou mírou a vektorové funkce v^A s Federerovou normálou vyšetřena v pracích [2], [3].

Literatura

[1] *E. De Giorgi:* Su una teoria generale della misura $(r - 1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. Mat. Pura Appl. *(4) 36* (1954), 191—213.

[2] *E. De Giorgi:* Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni. Ricerche di Mat. *4* (1955), 95—113.

[3] *H. Federer:* A note on the Gauss-Green theorem. Proc. Amer. Math. Soc. *9*, 1958, 447—451.

[4] *П. Халмот:* Теория меры. Москва 1953 (přel. z angl.: *P. R. Halmos*: Measure theory. New York 1950).
[5] *J. Mařík:* The surface integral. Чех. мат. журн. *6* (*81*), 1956, 523—558.
[6] *J. Král:* Poznámka o množinách, jejichž charakteristická funkce má za parciální derivaci zobecněnou míru. Čas. pro pěst. mat. *86*, 1961.

Резюме

ЗАМЕТКА О ПЕРИМЕТРЕ ДЕКАРТОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ МНОЖЕСТВ

ИОСЕФ КРАЛ (Josef Král), Прага

Обозначим символом $\mathscr{V}$ систему всех бесконечно дифференцируемых векторных функций $v = [v_1, \ldots, v_k]$ на E_k, обращающихся в нуль на бесконечности. Пусть, далее, $\mathscr{V}^1$ — подсистема всех $v \in \mathscr{V}$, удовлетворяющих требованию

$$\max_{z \in E_k} |v(z)| \leqq 1 .$$

Для каждого измеримого (по Лебегу) множества $C \subset E_k$ определим периметр $\|C\|$ множества C равенством

$$\|C\| = \sup_{v \in \mathscr{V}^1} \int_C \operatorname{div} v(z) \, dz .$$

Известно, что условие $\|C\| < \infty$ необходимо и достаточно для того, чтобы на границе H_C множества C существовали конечная борелевская мера P_C и борелевски измеримая векторная функция $v^C = [v_1^C, \ldots, v_k^C]$, удовлетворяющие требованиям

$$\text{(i)} \qquad v \in \mathscr{V} \Rightarrow \int_{H_C} v \, . \, v^C \, d\mathsf{P}_C = \int_C \operatorname{div} v(z) \, dz ,$$

$$\text{(ii)} \qquad |v^C(z)| = 1 \quad \text{для } \mathsf{P}_C \text{ — почти всех } z \in H_C .$$

(Условия (i), (ii) определяют P_C однозначно и v^C почти однозначно относительно P_C.)

Предположим теперь, что r, s — натуральные числа и $r + s = k$. Обозначим через L_m лебеговскую меру в E_m. Доказывается, что для произвольных измеримых (по Лебегу) множеств $A \subset E_r$ и $B \subset E_s$ имеет место равенство

$$\|A \times B\| = \|A\| \, . \, \mathsf{L}_s B + \mathsf{L}_r A \, . \, \|B\| .$$

В частности, если $\|A\| + \|B\| + \mathsf{L}_r A + \mathsf{L}_s B < \infty$, то $\|A \times B\| < \infty$; показывается, что в этом случае структура меры P, соответствующей множеству $C = A \times B$, может быть просто описана при помощи мер $\mathsf{P}_A \times \mathsf{L}_s$, $\mathsf{L}_r \times \mathsf{P}_B$.

Summary

A NOTE ON PERIMETER OF THE CARTESIAN PRODUCT OF TWO SETS

JOSEF KRÁL, Praha

Denote by $\mathscr{V}$ the system of all infinitely differentiable vector-valued functions $v = [v_1, \ldots, v_k]$ on E_k with $v(z) = 0$ for sufficiently large $|z|$. Further, let $\mathscr{V}^1$ be the system of all $v \in \mathscr{V}$ with $\max |v(z)| \leqq 1$, $z \in E_k$. For every Lebesgue measurable set $C \subset E_k$ the perimeter $\|C\|$ of C is defined by

$$\|C\| = \sup_{v \in \mathscr{V}^1} \int_C \operatorname{div} v(z) \, \mathrm{d}z \, .$$

It is known that $\|C\| < \infty$ is a necessary and sufficient condition for the existence of a finite Borel measure P_C over the boundary H_C of C and a Borel measurable vector-valued function $v^C = [v_1^C, \ldots, v_k^C]$ on H_C such that

(i) $$v \in \mathscr{V} \Rightarrow \int_{H_C} v \, . \, v^C \, \mathrm{d}\mathsf{P}_C = \int_C \operatorname{div} v(z) \, \mathrm{d}z \, ,$$

(ii) $$|v^C(z)| = 1 \quad \text{for } \mathsf{P}_C - \text{almost every } z \in H_C \, .$$

((i), (ii) determine P_C uniquely and v^C almost uniquely with respect to P_C). Suppose now that $k = r + s$, where r, s are positive integers. Denote by L_m the m-dimensional Lebesgue measure. It is proved that, for arbitrary Lebesgue measurable sets $A \subset E_r$, $B \subset E_s$, the formula

$$\|A \times B\| = \|A\| \, . \, \mathsf{L}_s B + \mathsf{L}_r A \, . \, \|B\|$$

is true. In particular, $\|A \times B\| < \infty$ whenever $\|A\| + \|B\| + \mathsf{L}_r A + \mathsf{L}_s B < \infty$; in the latter case the structure of the measure P_C, corresponding to $C = A \times B$, is simply described by means of $\mathsf{P}_A \times \mathsf{L}_s$, $\mathsf{L}_r \times \mathsf{P}_B$.