Časopis pro pěstování matematiky

Karel Šindelář

Reálné cyklické korelace v rovině a trojrozměrném prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 1, 93--102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117365`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

REÁLNÉ CYKLICKÉ KORELACE V ROVINĚ A TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

(Došlo dne 25. listopadu 1959)

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 80. narozeninám

Je známo, že existují reálné cyklické korelace jak v rovině, tak v trojrozměrném prostoru, avšak podrobněji je zpracována jen teorie involutorních korelací, na příklad v [1], [2], [3], [4], [5], nebo cyklických korelací čtvrtého stupně, ta však již jen ojediněle, nejpodrobněji snad ve [4]. Naproti tomu je teorie reálných cyklických kolineací propracována mnohem důkladněji, na příklad v [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Prvním krokem k podrobnějšímu zpracování i teorie cyklických korelací bude bezpochyby určení všech možných cyklických korelací a jejich roztřídění. Tento úkol se zde řeší analytickou metodou a roztřídění je provedeno podle typů soustav rovnic, kterými lze hledané korelace vyjádřit.

ÚVOD

Složením několika korelací v libovolném r-rozměrném projektivním prostoru S_r vzniká, jak známo, kolineace nebo korelace podle toho, je-li počet skládaných korelací sudý nebo lichý. Právě tak tomu je, opakuje-li se přitom stále táž korelace, jejíž sudé mocniny jsou tedy kolineace, liché korelace. Druhá mocnina dané korelace je kolineace zvaná přidružená.

Definice 1. Nechť n-tá mocnina dané korelace K je kolineace identická J. Potom se K nazývá *cyklická korelace* n-tého stupně. Cyklická korelace druhého stupně se nazývá *involutorní*.

Důsledek 1. Stupeň n libovolné cyklické korelace K je číslo sudé.

Důsledek 2. Je-li K cyklická korelace n-tého stupně, je přidružená kolineace $H = K^2$ také cyklická a obráceně. Přitom stupeň přidružené kolineace je poloviční $\frac{1}{2}n$. Z toho vyplývá:

Věta 1. *Cyklické korelace jsou právě ty, jejichž přidružené kolineace jsou cyklické.*

V dalším se omezíme na r-rozměrný projektivní prostor nad tělesem reálných čísel.

Pro $r = 1$, tedy v přímce, splývá pojem korelace s pojmem kolineace, takže mluvíme prostě o projektivnosti v přímce, kterou však dovedeme vyjádřit i chápat dvěma způsoby: buď jako zvláštní případ kolineace nebo korelace.

Mezi reálnými projektivnostmi v přímce jsou cyklické, jak známo, jen tyto: 1. projektivnost identická, 2. projektivnost involutorní hyperbolická, 3. projektivnost eliptická, jež může být cyklická libovolného stupně $n \geqq 2$; tu lze při vhodné volbě soustavy souřadnic podle [6] vyjádřit rovnicemi

$$x_1 = x_1' \cos \alpha + x_2' \sin \alpha\,, \quad x_2 = -\, x_1' \sin \alpha + x_2' \cos \alpha\,, \tag{1}$$

kde $\alpha = \frac{p}{n} \pi$ a p s n jsou nesoudělné.

To je vyjádření eliptické cyklické projektivnosti v přímce jako zvláštního případu kolineace.

Vyjádříme-li však projektivnost v přímce po způsobu korelací tak, že bodovým souřadnicím libovolného bodu přímky (x_1, x_2) odpovídají nadrovinové souřadnice bodu přiřazeného (ξ_1, ξ_2), dostaneme tento výsledek:

Věta 2. *V přímce existují tři druhy reálných cyklických projektivností:*

1. *identická, kterou lze vyjádřit rovnicemi:*

$$x_1 = -\, \xi_2'\,, \quad x_2 = \xi_1'\,; \tag{2}$$

2. *involutorní hyperbolická*

$$x_1 = \xi_2'\,, \quad x_2 = \xi_1'\,; \tag{3}$$

3. *eliptická projektivnost cyklická n-tého stupně vyjádřená při vhodné volbě soustavy souřadnic rovnicemi:*

$$x_1 = \xi_1' \sin \alpha - \xi_2' \cos \alpha\,, \quad x_2 = \xi_1' \cos \alpha + \xi_2' \sin \alpha\,, \tag{4}$$

kde $\alpha = \frac{p}{n} \pi$, *přičemž* p *je s* n *nesoudělné.*

D ů k a z. Transformace bodových souřadnic v přímce v souřadnice nadrovinové je vyjádřena soustavou rovnic (2); tato soustava tedy již vyjadřuje projektivnost identickou.

Složením transformace vyjadřující involutorní projektivnost hyperbolickou, jejíž samodružné body lze vždy zvolit v bodech O_1, O_2 soustavy souřadnic,

$$x_1 = -\, x_1'\,, \quad x_2 = x_2' \tag{5}$$

s transformací (2) vede k soustavě rovnic (3).

A konečně složením transformace (1) s transformací (2) dostáváme soustavu rovnic tvaru (4).

Pro naše potřeby bude třeba umět k dané cyklické projektivnosti P v přímce určit takovou projektivnost Π, aby daná projektivnost byla její dvojmocí $P = \Pi^2$, a projektivnost Π vyjádřit jako speciální případ korelace soustavami rovnic (2), (3), (4).

Věta 3. *Nechť v přímce je dána cyklická projektivnost P. Potom úloha určit projektivnost Π tak, aby platilo $\Pi^2 = P$, je řešitelná v těchto případech:*

1. *Je-li P identická, existuje Π jednak identická a pak lze Π vyjádřit rovnicemi (2), dále existuje Π involutorní hyperbolická, kterou lze při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit rovnicemi (3), a konečně involutorní eliptická, kterou lze ve vhodné soustavě souřadnic vyjádřit rovnicemi (4), kde $n = 2$.*

2. *Je-li P involutorní hyperbolická vyjádřená na příklad rovnicemi (5), neexistuje žádná hledaná projektivnost Π.*

3. *Je-li P eliptická vyjádřená rovnicemi (1), existuje projektivnost Π jedna, je-li n liché, nebo existují projektivnosti Π dvě, je-li n sudé, a v obou případech lze Π vyjádřit rovnicemi (4), kde $\alpha = \frac{p}{2n}\pi$ nebo $\alpha = \frac{p+n}{2n}\pi$.*

Důkaz. V případě, že P je identická, je tvrzení věty 2 zřejmé. V případě involutorní hyperbolické projektivnosti P nemá úloha řešení, neboť neexistuje reálná cyklická projektivnost čtvrtého stupně s reálnými samodružnými body. V případě eliptické projektivnosti P je Π zřejmě také eliptická, neboť má tytéž samodružné body, takže nemůže být vyjádřena jinak než opět soustavou rovnic (4); stupeň této cyklické projektivnosti je však dvojnásobný.

Ve vícerozměrných prostorech nad tělesem reálných čísel existuje ke každé reálné cyklické korelaci K stupně n-tého cyklická kolineace přidružená $H = K^2$ stupně $\frac{1}{2}n$-tého, která na každé své samodružné přímce l vytváří podle [6] cyklickou projektivnost. Jednotlivým bodům přímky l odpovídají korelací K nadroviny svazku, jehož „osa“, to je lineární prostor $(r - 2)$-rozměrný L, může mít s přímkou l trojí vzájemnou polohu:

I. L a l nemají žádný společný bod; jsou mimoběžné;

II. L a l mají právě jeden společný bod, v němž se protínají;

III. L a l mají nekonečně mnoho společných bodů; celá přímka l leží v podprostoru L, s nímž je tedy incidentní.

O tom, který z uvedených tří případů může nastat, rozhoduje druh cyklické projektivnosti, kterou přidružená kolineace $H = K^2$ vytváří na přímce l.

Věta 4. *Nechť K je reálná cyklická korelace n-tého stupně, $H = K^2$ přidružená kolineace a l libovolná její samodružná přímka. Na ní nechť H vytváří cyklickou projektivnost P. Je-li P involutorní hyperbolická, nemůže nastat případ I. Je-li P eliptická, nemůže nastat případ II.*

Důkaz. Jsou-li l a L mimoběžné, odpovídá řadě bodové na l korelací K projektivní svazek nadrovin protínající l v perspektivní řadě bodové. Korelace

K vytváří na l cyklickou projektivnost Π, jejíž dvojmoc je $P = \Pi^2$. Reálná projektivnost Π však neexistuje, je-li P involutorní hyperbolická.

Mají-li l a L právě jeden společný bod S, je S samodružným bodem přidružené kolineace $H = K^2$. To však není možné, je-li P eliptická.

CYKLICKÉ KORELACE V ROVINĚ

Všechny reálné cyklické korelace v rovině bez výjimky včetně involutorních jsou v podstatě téhož typu, neboť platí:

Věta 5. *Každou reálnou cyklickou korelaci K v rovině lze při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit rovnicemi*

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1' \sin \alpha - \xi_2' \cos \alpha\,, \\ x_2 &= \xi_1' \cos \alpha + \xi_2' \sin \alpha\,, \\ x_3 &= \xi_3'\,, \end{aligned} \tag{6}$$

kde α je racionální násobek π.

Důkaz. Podle [6] a podle věty 1 lze rovnice každé přidružené kolineace $H = K^2$ napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' \cos \omega + x_2' \sin \omega\,, \\ x_2 &= -x_1' \sin \omega + x_2' \cos \omega\,, \\ x_3 &= x_3'\,, \end{aligned} \tag{7}$$

kde ω je racionální násobek 2π.

Je-li za prvé projektivnost vytvořená kolineací (7) na ose o_{12} soustavy souřadnic identická, což nastane pro $\omega = k\pi$ (k celé), jsou pro K myslitelné celkem tři různé možnosti:

1. Korelace K vytváří na ose o_{12} identickou projektivnost a její rovnice lze napsat ve tvaru

$$x_1 = -\xi_2'\,, \quad x_2 = \xi_1'\,, \quad x_3 = \xi_3'\,. \tag{6A}$$

2. Korelace K vytváří na ose o_{12} involutorní projektivnost hyperbolickou a možno ji vyjádřit rovnicemi

$$x_1 = \xi_2'\,, \quad x_2 = \xi_1'\,, \quad x_3 = \xi_3'\,. \tag{6B}$$

3. Korelace K vytváří na ose o_{12} involutorní projektivnost eliptickou a jejím rovnicím lze dát tvar

$$x_1 = \xi_1'\,, \quad x_2 = \xi_2'\,, \quad x_3 = \xi_3'\,. \tag{6C}$$

Je-li za druhé reálná projektivnost vytvořená kolineací (7) na ose o_{12} cyklická n-tého stupně, tedy eliptická, je $\omega = \frac{p}{m}\pi$ a hledaná korelace K má rovnice (6), kde je buď $\alpha = \frac{p}{2m}\pi$ nebo $\alpha = \frac{p+m}{2m}\pi$.

Konečně jsou myslitelné ještě takové případy reálných cyklických korelací K v rovině, které samodružné přímce l přidružené kolineace $H = K^2$ přiřazují involutorně některý bod na této přímce. Výpočtem lze však ukázat, že takové korelace mohou být jen involutorní nebo cyklické čtvrtého stupně, a to takového typu, že jsou vyjádřeny již soustavou rovnic (6A).

Avšak jak korelace vyjádřené soustavou (6A), tak korelace vyjádřené soustavou (6C), jsou zvláštním případem korelací vyjádřených soustavou (6), do jejíchž rovnic stačí dosadit v prvním případě $\alpha = 0$, ve druhém $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. Zbývá tedy již jen soustava rovnic (6B) vyjadřující polárnost, jež je involutorní. Tu lze však vyjádřit rovněž soustavou (6), do níž dosadíme $\alpha = \frac{1}{2}\pi$.

Poznámka. K dané přidružené kolineaci (7) lze vyjádřit hledané cyklické korelace nejobecněji soustavou rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a\xi_1' \sin\alpha - a\xi_2' \cos\alpha\,, \\
x_2 &= a\xi_1' \cos\alpha + a\xi_2' \sin\alpha\,, \\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad b\xi_3'\,,
\end{aligned}
\tag{6'}
$$

kde $a\,.\,b \neq 0$ a α je vázáno s ω vztahem $\alpha = \frac{1}{2}\omega$, případně $\alpha = \frac{1}{2}(\omega + \pi)$. Avšak transformací soustavy souřadnic

$$x_1 = \sqrt{a}\,.\,\bar{x}_1\,,\quad x_2 = \sqrt{a}\,.\,\bar{x}_2\,,\quad x_3 = \sqrt{b}\,.\,\bar{x}_3$$

lze vždy dosáhnout toho, že soustava rovnic (6′) přejde v soustavu (6), vynecháme-li ještě posléze pruhování.

CYKLICKÉ KORELACE V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

Kdežto v rovině existuje v podstatě jen jeden druh reálných cyklických korelací, jehož zvláštním případem jsou rovinné korelace involutorní, polárnosti, jsou v prostoru poměry značně složitější. Již jen involutorní korelace jsou, jak známo, dvojí: polárnosti a korelace nulové. Ale i když tyto dva zvláštní případy vyjmeme, zbudou mezi ostatními ještě značně různé typy cyklických korelací.

Věta 6. *Vedle involutorních korelací nulových a polárností existuje v trojrozměrném prostoru ještě šest různých druhů reálných cyklických korelací.*

Tři z nich jsou cyklické čtvrtého stupně a lze je při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit rovnicemi:

$$x_1 = -\,\xi_2'\,,\quad x_2 = \xi_1'\,,\quad x_3 = \xi_4'\,,\quad x_4 = \xi_3'\,, \tag{8}$$

nebo rovnicemi

$$x_1 = -\,\xi_2'\,,\quad x_2 = \xi_1'\,,\quad x_3 = \xi_3'\,,\quad x_4 = \xi_4'\,, \tag{9}$$

nebo konečně rovnicemi

$$x_1 = -\,\xi_4'\,,\quad x_2 = \xi_3'\,,\quad x_3 = \xi_2'\,,\quad x_4 = \xi_1'\,. \tag{10}$$

Další tři mohou být cyklické libovolného (ovšem sudého) stupně; lze je vyjádřit buď soustavou rovnic

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= \xi_1' \sin \alpha - \xi_2' \cos \alpha , \\
x_2 &= \xi_1' \cos \alpha + \xi_2' \sin \alpha , \\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \xi_3' \sin \beta - \xi_4' \cos \beta , \\
x_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \xi_3' \cos \beta + \xi_4' \sin \beta ,
\end{aligned}
$$

kde α i β jsou racionální násobky π, nebo soustavou

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= \xi_1' \sin \alpha - \xi_2' \cos \alpha , \\
x_2 &= \xi_1' \cos \alpha + \xi_2' \sin \alpha , \\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \xi_4' , \\
x_4 &= \qquad\qquad\qquad \xi_3' ,
\end{aligned}
$$

kde α je racionálním násobkem π, nebo konečně soustavou

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= \qquad\qquad\qquad\qquad a\xi_3' \sin \varphi - a\xi_4' \cos \varphi , \\
x_2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad a\xi_3' \cos \varphi + a\xi_4' \sin \varphi , \\
x_3 &= b\xi_1' \sin \psi - b\xi_2' \cos \psi , \\
x_4 &= b\xi_1' \cos \psi + b\xi_2' \sin \psi ,
\end{aligned}
$$

kde $a \,.\, b \neq 0$ a součet $\psi + \psi$ je rovný racionálnímu násobku π.

Důkaz. Samodružné přímce l přidružené kolineace $H = K^2$ jako řadě bodové odpovídá korelací K osa svazku nadrovin $\bar{l}$, což je opět samodružná přímka kolineace H, která si s přímkou l korelací K odpovídá involutorně. Přímky l a $\bar{l}$ mohou mít trojí vzájemnou polohu:

I. Jsou mimoběžné. Potom přidružená kolineace H může na obou přímkách l i $\bar{l}$ vytvářet projektivnosti identické nebo eliptické.

Zvolme za přímku l osu o_{12}, za přímku $\bar{l}$ osu o_{34} soustavy souřadnic.

1. Vytváří-li kolineace H na obou přímkách projektivnosti identické, jsou myslitelné tyto případy:

a) K vytváří rovněž na obou osách identické projektivnosti; to však vede ke známému případu involutorní korelace nulové.

b) K vytváří na obou osách involutorní projektivnosti, a to buď obě hyperbolické nebo obě eliptické nebo jednu hyperbolickou a jednu eliptickou; všechny tyto tři možnosti vedou ke známému případu polárnosti.

c) K vytváří jen na jedné ose identickou projektivnost, na příklad na ose o_{34}, kdežto na druhé o_{12} involutorní projektivnost, jež je buď hyperbolická nebo eliptická. V obou těchto případech vznikne cyklická korelace čtvrtého stupně, již lze vyjádřit v prvním případě rovnicemi (8), ve druhém (9).

2. Vytváří-li přidružená kolineace $H = K^2$ na obou přímkách cyklické projektivnosti eliptické, lze její rovnice podle [6] napsat ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1' \cos \omega + x_2' \sin \omega , \\
x_2 &= - x_1' \sin \omega + x_2' \cos \omega , \\
x_3 &= x_3' \cos \bar{\omega} + x_4' \sin \bar{\omega} , \\
x_4 &= - x_3' \sin \bar{\omega} + x_4' \cos \bar{\omega} ,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

kde jak ω, tak i $\bar{\omega}$ jsou racionální násobky π.

Potom korelace K může vytvářet na osách o_{12} i o_{34} jedině cyklické projektivnosti eliptické dvojnásobných stupňů a lze ji vyjádřit soustavou rovnic (11), kde α i β jsou určeny známým způsobem pomocí ω a $\bar{\omega}$, takže jsou rovněž racionálními násobky π.

3. Vytváří-li přidružená kolineace H jen na jedné z obou přímek cyklickou projektivnost eliptickou, kdežto na druhé projektivnost identickou, lze její rovnice napsat ve tvaru (14), kde $\bar{\omega} = 0$, a jsou myslitelné tyto případy:

a) K vytváří na ose o_{34} projektivnost identickou a její rovnice lze napsat ve tvaru (11), kde $\beta = 0$.

b) K vytváří na ose o_{34} eliptickou projektivnost involutorní, takže ji lze vyjádřit rovnicemi (11), kde $\beta = \pm \frac{1}{2}\pi$.

c) K vytváří na ose o_{34} hyperbolickou projektivnost involutorní a její rovnice lze napsat ve tvaru (12).

II. Přímky l a $\bar{l}$ jsou různoběžné a protínají se v jediném společném bodě. Podobně jako v rovině zjistíme i v trojrozměrném prostoru, že cyklické korelace mohou být v tomto případě jen buď involutorní polárnosti nebo cyklické korelace čtvrtého stupně vyjádřené rovnicemi (9), které jsme nalezli již dříve.

III. Neexistuje-li žádný pár přímek l a $\bar{l}$, jež by byly mimoběžné nebo se aspoň protínaly jen v jednom bodě, mají každé takové dvě přímky l a $\bar{l}$ nekonečně mnoho bodů společných, jsou totožné.

Nechť přímka, ve které se l a $\bar{l}$ ztotožní, je osou o_{12} soustavy souřadnic, takže tato osa je samodružnou přímkou přidružené kolineace $H = K^2$. Mimo ni má kolineace H ještě aspoň jednu reálnou samodružnou přímku, jež je s ní mimoběžná. Zvolme ji za osu o_{34} soustavy souřadnic, takže hledaná korelace K přiřazuje i ose o_{34} jako řadě bodové tutéž přímku jako osu svazku odpovídajících nadrovin a rovnice kolineace H budou tedy při vhodné volbě soustavy souřadnic buď (14) nebo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1' \cos \omega + x_2' \sin \omega , \\
x_2 &= - x_1' \sin \omega + x_2' \cos \omega , \\
x_3 &= x_3' , \\
x_4 &= - x_4' ,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

nebo je přidružená kolineace involutorní středová nebo dvojosá, případně identická.

Poslední dvě z těchto možností, kdy H je identická nebo involutorní dvojosá, vedou buď k involutorním korelacím nulovým nebo k cyklickým korelacím čtvrtého stupně, jež lze vyjádřit soustavou rovnic (10).

K dalším dvěma případům, kdy přidružená kolineace H je buď involutorní středová nebo ji lze vyjádřit soustavou rovnic (15), neexistuje žádná hledaná cyklická korelace K, jak plyne z této úvahy:

Každá hledaná korelace K přiřazuje řadě bodové na ose o_{12} svazek rovin s osou v téže přímce. Jednotlivé roviny tohoto svazku protínají osu o_{34} v perspektivní řadě bodové, tedy projektivní s původní řadou bodovou na ose o_{12}. Hledaná korelace vytváří tedy projektivní zobrazení osy o_{12} na osu o_{34} a obdobně ovšem osy o_{34} na osu o_{12}. Složením obou těchto zobrazení vznikají projektivnosti, které přidružená kolineace H vytváří na svých samodružných přímkách osách o_{12} a o_{34}. Obě tyto projektivnosti jsou cyklické, a to téhož řádu, a jejich samodružné body si odpovídají projektivním zobrazením obou os, jež vytváří korelace K.

Nemůže tedy jedna z obou projektivností být identická a druhá hyperbolická nebo eliptická ani nemůže být jedna hyperbolická a druhá eliptická. To však znamená, že H nemůže být ani středová, ani vyjádřená soustavou rovnic (15).

Zbývá tedy poslední možnost, a to ta, že přidružená kolineace H je vyjádřená soustavou rovnic (14), ovšem tak, že stupně cyklických projektivností, jež H vytváří na obou osách, jsou stejné. Hledaná korelace K je pak vyjádřena soustavou rovnic (13) a přidružená kolineace H soustavou rovnic (14), kde však je

$$\omega = \bar{\omega} = \varphi + \psi .$$

Kolineace (14) je tedy dvojosá s imaginárními osami samodružných bodů.

Jiné případy v trojrozměrném prostoru nastat nemohou.

Poznámka. K daným přidruženým kolineacím vyjádřeným soustavou rovnic (14) existují hledané cyklické korelace K, jejichž rovnice lze napsat v nejobecnějším tvaru buď

$$\begin{aligned}
x_1 &= a\xi_1' \sin \alpha - a\xi_2' \cos \alpha , \\
x_2 &= a\xi_1' \cos \alpha + a\xi_2' \sin \alpha , \\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad b\xi_3' \sin \beta - b\xi_4' \cos \beta , \\
x_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad b\xi_3' \cos \beta + b\xi_4' \sin \beta ,
\end{aligned} \tag{11'}$$

nebo

$$\begin{aligned}
x_1 &= a\xi_1' \sin \alpha - a\xi_2' \cos \alpha , \\
x_2 &= a\xi_1' \cos \alpha + a\xi_2' \sin \alpha , \\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad b\xi_4' , \\
x_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad b\xi_3' ,
\end{aligned} \tag{12'}$$

kde $a \, . \, b \neq 0$.

Stačí však provést transformaci souřadnic

$$x_1 = \sqrt{a} \, . \, \bar{x}_1 \,, \quad x_2 = \sqrt{a} \, . \, \bar{x}_2 \,, \quad x_3 = \sqrt{b} \, . \, \bar{x}_3 \,, \quad x_4 = \sqrt{b} \, . \, \bar{x}_4 \,,$$

jíž soustava rovnic (11′) přejde v soustavu (11) a soustava (12′) v soustavu (12), vynecháme-li ještě nakonec ve výsledné soustavě rovnic pruhování.

Literatura

[1] *B. Bydžovský*: Úvod do algebraické geometrie. Praha 1948.
[2] *J. Vojtěch*: Geometrie projektivní. Praha 1930.
[3] Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, T. III. Paris, Leipzig 1904.
[4] *R. Sturm*: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Leipzig 1908.
[5] *W. Hodge, D. Pedoe*: Methods of Algebraic Geometry. Cambridge 1947.
[6] *K. Šindelář*: The Real Cyclic Collineations. Sborník sjezdu československých a polských matematiků v Praze 1949, 263—267.

Резюме

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОРРЕЛЯЦИИ

КАРЕЛ ШИНДЕЛАРЖ (Karel Šindelář), Жилина

В статье исследуются виды существующих циклических корреляций в плоскости и в трехмерном пространстве над полем вещественных чисел.

С этой целью нужно прежде всего всевозможные вещественные циклические проективности в прямой линии записать как специальный случай корреляций в виде системы уравнений, которая сопоставляет проективным однородным координатам точки двойственные координаты ее образа, если эту точку рассматривать как гиперплоскость. Следовательно, тождественная проективность принимает вид системы уравнений (2), инволютивная гиперболическая проективность — вид (3), а эллиптическая — n-ной степени — вид (4), где $\alpha = \frac{p}{n}\pi$ и p и n взаимно просты.

Из результатов работы явствует, что в плоскости существует только один тип вещественных циклических корреляций (в том числе инволютивные корреляции), уравнения которых в подходящей системе координат всегда выражены в виде (6).

В трехмерном пространстве существуют либо вещественные циклические инволютивные корреляции (полярные и нуль-полярные), либо вещественные циклические корреляции, уравнения которых в подходящей системе

координат принимают всегда один из видов (8), (9), (10), (11), (12), (13). Порядок первых трех типов (8), (9), (10) всегда четыре, а порядок остальных — какое-нибудь четное число.

Résumé

LES RÉCIPROCITÉS CYCLIQUES RÉELLES

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

Dans le présent article, on examine les réciprocités cycliques qui existent dans le plan et dans l'espace à trois dimensions sur le corps des nombres réels.

A ce but il faut d'abord écrire toutes les projectivités cycliques réelles sur la ligne droite en forme des équations des réciprocités, c'est-à-dire exprimer les coordonnées homogènes projectives d'un point sur la ligne droite par les coordonnées hyperplanaires du point correspondant. La projectivité identique est ainsi exprimée par le système d'équations (2), la projectivité involutoire hyperbolique par le système (3), la projectivité cyclique elliptique d'ordre n par le système (4) où $\alpha = \frac{p}{n}\pi$ et p est prime par rapport à n.

Le résultat du travail montre que dans le plan il n'existe qu'un seul type de réciprocités cycliques réelles (y compris involutoires) qu'on peut toujours exprimer par le système (6) dans un système de coordonnées convenable.

Dans l'espace à trois dimensions, il existe ou bien des réciprocités réelles involutoires (les polarités et les réciprocités nulles), ou bien des réciprocités réelles qu'on peut, dans un système de coordonnées convenable, exprimer toujours par un des systèmes d'équations (8), (9), (10), (11), (12), (13). Les trois premiers (8), (9), (10) sont toujours du 4^e ordre, les autres (11), (12), (13) d'ordre pair quelconque.