Karel Šindelář
Planární a hyperplanární body

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 1, 56--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117362

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

PLANÁRNÍ A HYPERPLANÁRNÍ BODY

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

(Došlo dne 20. října 1959)

Vyšetřují se vlastnosti planárních bodů nadploch a ploch i inflexních bodů čar v souvislosti s jejich protínáním lineárními prostory, dále v souvislosti s jejich Hessiánem a s vlastnostmi jejich polár, zejména rozložitelností. Odvozené výsledky se aplikují na určení úplné soustavy planárních bodů i jejich jakosti na dané ploše nebo nadploše. Vedle toho se studuje konstelace planárních bodů dané plochy nebo nadplochy v případě, že takové body leží v přímce. Konečně je pojem planárního bodu rozšířen zavedením pojmu bodů hyperplanárních.

1

Všechny dosavadní práce, které se planárními body zabývaly, na příklad [1], [5], [6], vyšetřovaly — pokud je mi známo — jen planární body ploch v obyčejném trojrozměrném prostoru, a to zvláště planární body kubických ploch, které objevil E. F. ECKARDT.

My se však budeme planárními body zabývat obecněji, a proto bude třeba, abychom planární body ze svého obecnějšího hlediska nejen definovali, nýbrž i rozlišili zavedením pojmu řádu planárního bodu.

Poznámky k označování. Při algebraickém vyšetřování planárních bodů budeme velmi často potřebovat homogenní mnohočleny různých stupňů a o různém počtu proměnných. Proto si vyhradíme pro jejich označení písmeno f, a to tak, že f_k bude vždy značit formu k-tého stupně, za níž v závorce budou vypsány nezávisle proměnné, pokud to nebude patrno ze souvislosti v textu. Dalšími indexy a značkami, na příklad ${}^nf$, $f^{(n)}$, f', $\bar{f}$ a podobně, budeme různé takové formy od sebe rozlišovat. Písmena ze začátku abecedy $a, b, c, \ldots$ opatřená případně jakýmikoli indexy nebo značkami budou vždy znamenat koeficienty; r bude vždy značit dimensi prostoru.

Definice 1. *Je-li nadplocha* $\mathbf{V}$ *proťata tečnou nadrovinou ve svém regulárním bodě* P *ve varietě* $\mathbf{U}$, *která obsahuje bod* P *jako bod* $(k + 2)$*-násobný, nazývá se bod* P *planárním bodem nadplochy* $\mathbf{V}$ k*-tého řádu.*

Poznámka. Podle definice 1 je tedy každý regulární bod dané nadplochy jejím bodem planárním řádu $k \geqq 0$. Pro pohodlnější vyjadřování odlišíme body řádu $k = 0$ od ostatních planárních bodů tím, že je budeme nazývat *planární body triviální* a budeme je v dalším ze svých úvah vylučovat, pokud neuvedeme opak. Nadále se tedy bude planárním bodem rozumět planární bod netriviální, jehož řád je $k \geqq 1$.

Budeme se zabývat jen planárními body algebraických ploch a nadploch. Uvažme však, že definice 1 má smysl i tehdy, když se jedná o algebraickou nadplochu v rovině, tedy o algebraickou čáru a její tečnu v daném jejím regulárním bodě P. Varieta $\boldsymbol{U}$ se v tomto případě skládá z isolovaných bodů. Pokládáme-li každý z nich za tolikanásobný bod variety $\boldsymbol{U}$, kolikanásobným je průsečíkem čáry s její tečnou,[1]) je bod P $(k + 2)$-násobným bodem variety $\boldsymbol{U}$ právě tehdy, když je inflexním bodem k-tého řádu dané čáry. To však uvádí planární body do úzké souvislosti s body inflexními, takže lze dokonce vyslovit:

Důsledek definice 1. *Planární body čar v rovině jsou inflexní body těchto čar. Řád planárního bodu je řádem příslušné inflexe.*

Na algebraické nadploše n-tého stupně $(n > 1)$ mohou být planární body řádu nejvýše $(n - 2)$-ho, neboť žádná algebraická varieta n-tého stupně nemůže mít bod o násobnosti vyšší než n. Pro planární body tohoto nejvyššího řádu zavedeme zvláštní označení.

Definice 2. *Planární bod algebraické nadplochy n-tého stupně, který má nejvyšší možný řád, to je $n - 2$, se nazývá jejím bodem Eckardtovým.*

Každý planární bod (prvního řádu) kubické nadplochy je tedy jejím bodem Eckardtovým, kdežto kvadratické nadplochy planární body nenulového řádu vůbec nemají.

Věta 1. *Nadplocha n-tého stupně v r-rozměrném projektivním prostoru má ve svém regulárním bodě O_0 planární bod k-tého řádu s tečnou nadrovinou*

$$x_1 = 0 \tag{1}$$

právě tehdy, když ji lze vyjádřit rovnicí

$$x_0^{n-1}x_1 + \sum_{h=2}^{k+1} x_0^{n-h}x_1 f_{h-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{h=k+2}^{n} x_0^{n-h} f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,, \tag{2}$$

kde ve formě $f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ se vyskytuje aspoň jeden sčítanec neobsahující činitele x_1.

Důkaz. K tomu, aby nadrovina (1) protala algebraickou nadpochu n-tého stupně v r-rozměrném prostoru procházející bodem O_0 a vyjádřenou anulovanou rovnicí, jejíž levá strana je seřazena sestupně podle mocnin x_0 tak jako (2), ve varietě, na níž O_0 je bod $(k + 2)$-násobný, je nutné, aby všechny členy obsahující x_0 v mocninách $(n - 1)$-ní, $(n - 2)$-hé, ..., $(n - k - 1)$-ní,

[1]) Ve smyslu [7], str. 312.

obsahovaly i činitele x_1. Potom je nadplocha (2) proťata nadrovinou (1) ve varietě, kterou lze v nadrovině (1) vyjádřit rovnicí

$$\sum_{h=k+2}^{n} x_0^{n-h} f_h(0, x_2, \ldots, x_r) = 0 ,$$

takže O_0 je $(k + 2)$-násobným bodem této variety právě tehdy, když první sčítanec na levé straně její rovnice $x_0^{n-k-2} f_{k+2}(0, x_2, \ldots, x_r)$ je nenulový. Ale to nastane právě tehdy, když $f_{k+2}(0, x_2, \ldots, x_r)$ identicky nevymizí, což však znamená, že se ve formě $f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ vyskytuje aspoň jeden člen, který neobsahuje činitele x_1. Kdyby se v této formě žádný takový člen nevyskytoval, byl by buď řád planárního bodu O_0 nadplochy (2) vyšší než k nebo by nadplocha (2) obsahovala nadrovinu (1) jako součást.

Poznámka. Tato druhá možnost může skutečně nastat. Je-li nadplocha **V** vyjádřena rovnicí (2), kde $k = n - 1$, lze x_1 z celé její levé strany vytknout, takže *nadrovina* (1) *je součástí nadplochy* (2). Bod O_0 budeme v tomto případě nazývat *absolutním planárním bodem* variety **V** a budeme mu přisuzovat řád $k = \infty$, tedy vyšší než řád libovolného planárního bodu neabsolutního, tj. takového, o jakých až dosud byla řeč. V dalším však budeme i absolutní planární body ze svých úvah vylučovat, pokud neuvedeme opak, takže planárním bodem bez bližšího určení budeme nadále rozumět planární bod, jehož řád je přirozené číslo.

2

Obraťme nyní pozornost k útvaru, který vznikne, protneme-li algebraickou nadplochu libovolnou nadrovinou, která prochází jejím planárním bodem. Výsledek je nám již známý, jde-li o nadrovinu tečnou k dané nadploše v tomto planárním bodě. Zbývá tedy vyšetřit ostatní případy.

Všechny úvahy i výsledky této druhé části pojednávající o protínání platí i pro triviální planární (resp. triviální inflexní) body. Teprve ve třetí části (od věty 7) budeme planárním (resp. inflexním) bodem rozumět opět planární (resp. inflexní) bod netriviální.

Věta 2. *Libovolnou nadrovinou* **L** *procházející planárním bodem P k-tého řádu dané nadplochy* **V** *— s výjimkou tečné nadroviny této nadplochy v bodě P — je nadplocha* **V** *proťata ve varietě* **U**, *která má v bodě P opět bod planární, a to řádu nejméně k-tého, nebo absolutní planární bod.*

Poznámka. Je jistě zřejmé, co se rozumí planárním bodem variety **U**, o níž mluví věta 2. Tuto varietu lze totiž pokládat v nadrovině **L**, která je sama prostorem $(r - 1)$-rozměrným, za nadplochu, na níž planární body jsou již zavedeny ve smyslu definice 1.

Důkaz věty 2. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 1 tak, aby nadrovina $\mathbf{L}$ měla rovnici

$$x_2 = 0 \,. \tag{3}$$

Rovnice průsečnice v nadrovině (3) pak bude

$$x_0^{n-1} x_1 + \sum_{h=2}^{k+1} x_0^{n-h} x_1 f_{h-1}(x_1, 0, x_3, \ldots, x_r) + \sum_{h=k+2}^{n} x_0^{n-h} f_h(x_1, 0, x_3, \ldots, x_r) = 0 \,, \tag{4}$$

což je rovnice algebraické nadplochy n-tého stupně v $(r - 1)$-rozměrném prostoru, která má v bodě O_0 planární bod aspoň k-tého řádu s tečnou nadrovinou (1).

Poznámka 1. Může se dokonce stát, že všechny členy na levé straně rovnice (4) obsahují činitele x_1, takže jej pak lze z celé levé strany vytknout, a průsečnice (4) obsahuje jako součást lineární prostor $x_1 = x_2 = 0$, což znamená, že O_0 je jejím absolutním planárním bodem (nebo absolutním inflexním bodem obdobně definovaným). Proto bylo třeba ve formulaci věty 2 pamatovat i na tuto možnost. V dalším však budeme tento doplněk důsledně vynechávat a místo toho se umluvíme, že rčení *planární* (*nebo inflexní*) *bod řádu aspoň k-tého* bude značit buď planární (resp. inflexní) bod řádu h-tého, kde $h \geqq k$ nebo absolutní planární (resp. inflexní) bod.

Poznámka 2. Aby měla věta 2 smysl, je třeba předpokládat, že nadplocha $\mathbf{V}$ je dána v prostoru r-rozměrném, kde $r \geqq 3$. Pro nejmenší možné $r = 3$ má věta 2 tento zvláštní tvar.

Důsledek 1. *Libovolnou rovinou $\mathbf{L}$ procházející planárním bodem P k-tého řádu dané plochy $\mathbf{V}$ — s výjimkou její tečné roviny v bodě P — je plocha $\mathbf{V}$ proťata v rovinné čáře, která má v bodě P bod inflexní řádu nejméně k-tého.*

Naopak opakováním věty 2 docházíme k tomuto jejímu zobecnění.

Důsledek 2. *Libovolným lineárním prostorem $\mathbf{L}$ (aspoň dvojrozměrným) procházejícím planárním bodem P k-tého řádu dané nadplochy $\mathbf{V}$ — s výjimkou těch prostorů, jež leží celé v její tečné nadrovině — je nadplocha $\mathbf{V}$ proťata ve varietě $\mathbf{U}$, která má v bodě P planární (resp. inflexní) bod, a to řádu nejméně k-tého.*

Může se však stát, že daná nadplocha $\mathbf{V}$ obsahující planární bod k-tého řádu P je proťata nadrovinou $\mathbf{L}$ ve varietě, která má v bodě P planární bod vyššího řádu než k-tého. To platí i pro $k = 0$. Zaveďme proto tento pojem.

Definice 3. *Nadrovina $\mathbf{L}$, která prochází planárním bodem P k-tého řádu dané nadplochy $\mathbf{V}$ a protíná ji ve varietě mající v bodě P planární bod vyššího řádu než k-tého, se nazývá asymptotická nadrovina nadplochy $\mathbf{V}$ v jejím bodě P.*

Asymptotické nadroviny nadplochy v jejím planárním bodě se však nevyskytují jednotlivě. Tvoří celé soustavy, jak plyne z této věty.

Věta 3. *Má-li nadplocha $\mathbf{V}$ ve svém planárním bodě P k-tého řádu (nevylučuje se $k = 0$) asymptotickou nadrovinu $\mathbf{L}$, má v něm — až na jednu nadrovinu — celý* *svazek asymptotických nadrovin určený jednak nadrovinou* **L** *jednak tečnou nadrovinou nadplochy* **V** *v jejím bodě P s výjimkou této tečné nadroviny.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 1. Je-li (3) asymptotická nadrovina nadplochy **V** v bodě O_0, lze výraz $f_{k+2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r)$ z rovnice (2) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}(5) \qquad & f_{k+2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r) = \\ & = x_1 \cdot {}^1f_{k+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r) + x_2 \cdot {}^2f_{k+1}(x_2, x_3, \ldots, x_r) .\end{aligned}$$

Libovolná nadrovina svazku — až na nadrovinu tečnou — má rovnici $cx_1 + x_2 = 0$. Provedeme-li transformaci souřadnic

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_0 &= x_0' , \\ x_1 &= x_1' , \\ x_2 &= -cx_1' + x_2' , \\ x_3 &= x_3' , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= x_r' , \end{aligned}$$

nabude výraz (5) tvaru

$$x_1'\, {}^1f_{k+1}(x_1', -cx_1' + x_2', \ldots, x_r') + (-cx_1' + x_2')\, {}^2f_{k+1}(-cx_1' + x_2', x_3', \ldots, x_r') ,$$

což lze vyjádřit opět výrazem

$$x_1'\, {}^1\bar{f}_{k+1}(x_1', x_2', \ldots, x_r') + x_2'\, {}^2\bar{f}_{k+1}(x_2', x_3', \ldots, x_r') ;$$

to však znamená, že nadrovina $x_2' = 0$, tedy $cx_1 + x_2 = 0$ je asymptotickou nadrovinou nadplochy (2) v jejím planárním bodě O_0.

Definice 4. *Svazky nadrovin, které obsahují — až na jednu výjimku — samé asymptotické nadroviny dané nadplochy* **V** *v jejím planárním bodě P (třeba i triviálním), se nazývají asymptotické svazky nadrovin nadplochy* **V** *v tomto jejím planárním bodě.*

Zbývá ještě nalézt odpověď na otázku, kolik existuje asymptotických nadrovin určujících s tečnou nadrovinou dané nadplochy **V** v jejím daném bodě P různé asymptotické svazky.

Věta 4. *Planárním bodem P k-tého řádu dané nadplochy* **V** *prochází nejvýše $k + 2$ nadrovin určujících různé asymptotické svazky. V prostoru r-rozměrném ($r > 3$) nemusí však existovat žádná asymptotická nadrovina. V trojrozměrném prostoru existuje vždy $k + 2$ asymptotických svazků, jež však spolu mohou — buď všechny nebo po skupinách — splývat.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic tak jako ve větě 1. Forma $f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ je $(k + 2)$-ho stupně. Napišme ji ve tvaru

$$(7) \qquad f_{k+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1\, \bar{f}_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \bar{f}_{k+2}(x_2, x_3, \ldots, x_r) .$$

Forma $\bar{f}_{k+2}(x_2, x_3, \ldots, x_r)$, která vzhledem k větě 1 není identicky rovna nule, obsahuje $r - 1$ proměnných.

Je-li $r = 3$, je f_{k+2} binární forma $(k + 2)$-ho stupně, kterou lze vždy rozložit na $k + 2$ lineárních binárních forem tvaru

(8) $$ax_2 + bx_3\,,$$

z nichž však některé (nebo dokonce všechny) mohou spolu splynout. Ale ke každému lineárnímu činiteli (8) tohoto rozkladu existuje vždy asymptotická rovina dané plochy v jejím planárním bodě O_0 s rovnicí

(9) $$ax_2 + bx_3 = 0\,,$$

jak plyne z transformace souřadnic, kterou se tato rovina stane — pokud již snad není — některou rovinou souřadnicovou $x_2 = 0$ nebo $x_3 = 0$. Tím je nalezeno hledaných $k + 2$ asymptotických rovin, z nichž každá spolu s tečnou rovinou (1) plochy (2) v jejím planárním bodě O_0 určuje asymptotický svazek. Avšak nalezených $k + 2$ asymptotických svazků nemusí být vždy od sebe různých.

Je-li $r > 3$, je $\bar{f}_{k+2}(x_2, x_3, \ldots, x_r)$ forma o více než dvou proměnných, tedy aspoň ternární, jež nemusí být vždy rozložitelná nebo její rozklad nemusí obsahovat lineární činitele. V takovém případě neexistuje žádná asymptotická nadrovina nadplochy **V** v jejím planárním bodě O_0. Existuje-li však rozklad formy $\bar{f}_{k+2}(x_2, x_3, \ldots, x_r)$ na činitele, z nichž aspoň jeden je lineární, odpovídá každému takovému lineárnímu činiteli asymptotická nadrovina a spolu s ní i asymptotický svazek, přičemž opět asymptotické svazky odpovídající dvěma nebo třeba i několika činitelům tohoto rozkladu nemusí být vždy navzájem různé.

Poznámka. Zajímavý případ věty 4 nastane pro obyčejný regulární bod P plochy **V** v trojrozměrném prostoru, takže je pak $r = 3$, $k = 0$. Asymptotická rovina plochy **V** v bodě O_0 ji pak protíná v křivce, která má v tomto bodě bod inflexní, který může být i absolutní. Podle věty 4 existují dva svazky asymptotických rovin, jež nemusí být vždy od sebe různé. Jejich osy ležící v tečné rovině plochy **V** v bodě O_0 určují tak zvané asymptotické směry.

V jistém smyslu obrácená k větě 2 je tato věta.

Věta 5. *Je-li nadplocha* **V** *proťata všemi nadrovinami* **L** *procházejícími jejím regulárním bodem P — kromě své nadroviny tečné v tomto bodě — v takových varietách* **U**, *na nichž bod P je bodem planárním aspoň k-tého řádu, přičemž aspoň na jedné z nich je právě k-tého řádu, je P planárním bodem nadplochy* **V** *k-tého řádu.*

Důkaz. Nechť bod P splňuje předpoklady věty 5 a tedy je planární. Předpokládejme, že řád jeho planárnosti na nadploše **V** je h (přičemž nevylučujeme možnost $h = 0$).

Kdyby bylo $h < k$, bylo by možno podle věty 4 najít aspoň jednu nadrovinu protínající **V** ve varietě **U** takové, na níž by byl bod P planární ne vyššího než h-tého řádu, což odporuje předpokladu.

Kdyby bylo naopak $h > k$, neexistovala by podle věty 2 žádná nadrovina protínající **V** ve varietě, na níž by byl bod P k-tého, tedy nižšího než h-tého řádu.

Zbývá tedy jen možnost $h = k$.

Opětovnou aplikací věty 5 na jednotlivé nadroviny procházející planárním bodem P dané nadplochy $\boldsymbol{V}$ dostáváme:

Důsledek. *Je-li s jakékoli přirozené číslo ($1 < s < r$) a je-li nadplocha $\boldsymbol{V}$ v r-rozměrném prostoru proťata všemi lineárními podprostory s-rozměrnými procházejícími jejím planárním bodem P (kromě těch, které leží v tečné nadrovině variety $\boldsymbol{V}$ v bodě P) vesměs ve varietách, na nichž P je planární aspoň k-tého řádu, přičemž aspoň na jedné z nich je řádu právě k-tého, je P planárním bodem nadplochy $\boldsymbol{V}$ k-tého řádu.*

Dokonce stačí požadovat ještě o něco méně.

Věta 6. *Nechť $\boldsymbol{p}$ je libovolná přímka procházející regulárním bodem P nadplochy $\boldsymbol{V}$ v r-rozměrném prostoru, ale neležící v jeho tečné nadrovině. Nechť dále s je jakékoli přirozené číslo, pro něž platí $1 < s < r$. Potom protínají-li všechny lineární podprostory s-rozměrné procházející přímkou $\boldsymbol{p}$ nadplochu $\boldsymbol{V}$ v takových varietách $\boldsymbol{U}$, na nichž P je planární aspoň k-tého řádu, přičemž aspoň na jedné takové varietě $\boldsymbol{U}$ je právě k-tého řádu, je P planárním bodem nadplochy $\boldsymbol{V}$ k-tého řádu.*

Důkaz. Nechť řád planárního bodu P na nadploše $\boldsymbol{V}$ je h ($0 \leqq h$).

Kdyby bylo $h > k$, odporovaly by předpoklady věty 6 větě 2, což není možné.

Kdyby bylo naopak $h < k$, bylo by možno podle věty 4 nalézti aspoň jednu nadrovinu procházející přímkou $\boldsymbol{p}$ a protínající nadplochu $\boldsymbol{V}$ v takové varietě $\boldsymbol{W}$, na níž P by byl planární ne vyššího řádu než h-tého, neboť přímka $\boldsymbol{p}$ leží mimo osy všech asymptotických svazků. Opětovnou aplikací této úvahy na varietu $\boldsymbol{W}$ a na další variety řetězce variet, který takto postupně vzniká, docházíme k rozporu s tím předpokladem věty 4, podle něhož aspoň na jedné varietě $\boldsymbol{U}$ je bod P planární právě h-tého řádu (nikoli vyššího).

Nezbývá tedy jiná možnost než $h = k$.

3

Všechny výsledky, které jsme až dosud odvodili, nasvědčují tomu, že inflexní body jsou planárním bodům svými vlastnostmi obdobné. Poznáme ještě další jejich společné vlastnosti. Ale tato obdoba nejde do všech důsledků. Ukážeme si větu, kterou lze u inflexních bodů obrátit, u planárních nikoli.

Věta 7. *Nechť regulární bod P algebraické nadplochy $\boldsymbol{V}$ n-tého stupně je jejím bodem planárním (netriviálním). Potom je alespoň $(r - 1)$-násobným bodem jejího Hessiánu.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic jako ve větě 1. Hessián nadplochy $\boldsymbol{V}$ jako determinant stupně $(r + 1)$-ho obsahuje ve všech svých prvcích činitele x_0 s mocnitelem nejvýše $n - 3$ až na prvky druhého řádku a druhého sloupce, jež obsahují x_0 s mocnitelem nejvýše $n - 2$. Protože každý člen determinantu je součinem nejvýše dvou prvků obsahujících x_0 v mocnině $(n - 2)$-hé, kdežto všechny ostatní činitelé obsahují x_0 v mocnině nejvýše $(n - 3)$-tí, je nejvyšší možný mocnitel u x_0 v kterémkoli členu Hessiánu

$$2(n-2) + (r-1) \cdot (n-3) = (n-2) \cdot (r+1) - (r-1) .$$

Stupeň Hessiánu jakožto nadplochy je $(n - 2) \cdot (r + 1)$. To však znamená, že O_0 je jeho bodem alespoň $(r - 1)$-násobným.

Pro zvláštní případy r, na příklad pro $r = 3$ nebo $r = 2$, dostáváme tyto důsledky.

Důsledek 1. *Je-li regulární bod algebraické plochy jejím bodem planárním, je alespoň dvojnásobným bodem jejího Hessiánu.*

Důsledek 2. *Je-li regulární bod algebraické křivky jejím bodem inflexním, je také bodem jejího Hessiánu.*

Z věty 7 i všech jejích zvláštních případů pro různá r lze obrátit jen důsledek 2 pro $r = 2$. Dostáváme tak známou větu:

Věta 8. *Je-li regulární bod dané algebraické křivky bodem jejího Hessiánu, je to inflexní bod dané křivky.*

Důkaz.[2]) Nechť algebraická čára n-tého stupně $(n > 1)$ prochází jednoduše bodem O_0 a má v něm tečnu (1). Potom ji lze vyjádřit rovnicí ve tvaru

$$x_0^{n-1}x_1 + x_0^{n-2}(a_1x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + a_2x_2^2) + \ldots = 0 , \tag{10}$$

kde všechny další členy obsahují x_0 již jen v nižších mocninách než $(n - 2)$-hé. Její Hessián je pak stupně $3(n - 2)$-ho a jako determinant obsahuje jen jediný člen, v němž x_0 má tohoto nejvyššího mocnitele $3(n - 2)$; je to člen $- 2a_2(n - - 1)^2 x_0^{3n-6}$. Protože Hessián prochází podle předpokladu bodem O_0 a daná čára není přímka, není $n - 1 = 0$, takže zbývá jen možnost $a_2 = 0$. To však znamená, že rovnice dané čáry je

$$x_0^{n-1}x_1 + x_0^{n-2}x_1(a_1x_1 + 2b_{12}x_2) + \ldots = 0 , \tag{11}$$

takže O_0 je skutečně jejím bodem inflexním s tečnou (1).

Eckardt se domníval, že je možno obrátit i důsledek 1 věty 7 alespoň pro plochy třetího stupně. K tomuto závěru došel mylným předpokladem, že kvadratická polára dvojnásobného bodu Hessiánu každé kubické plochy vzhledem k této ploše se rozpadá na dvě roviny. My však ukážeme příkladem, že tomu tak vždy není.

Vezměme v úvahu kubickou plochu, která má rovnici

$$\begin{aligned} x_0^2x_1 + x_0(2x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 9x_3^2) + \\ + x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 6x_1^2x_3 + 9x_1x_2^2 + 6x_1x_2x_3 + 6x_1x_3^2 + 15x_2x_3^2 + 2x_3^3 = 0 . \end{aligned} \tag{12}$$

Ačkoli tato plocha prochází bodem O_0 a její Hessián prochází bodem O_0 dokonce dvojnásobně, není regulární bod O_0 plochy (12) jejím bodem planárním, ani jeho kvadratická polára k ploše (12) se nerozpadá na dvě roviny.

[2]) Jiný důkaz na základě teorie algebraických funkcí uvádí [7], str. 383 věta a).

Abychom prozkoumali hlouběji souvislost planárních bodů s rozložitelností jejich polár, zobecněme větu, kterou vyslovil již Eckardt. Tím bude — mezi jiným — nalezena nutná a zároveň postačující podmínka toho, aby daný regulární bod libovolné nadplochy byl jejím bodem planárním. Dosavadní podmínka planárnosti bodu vyslovená větou 7 je totiž jen nutná, nikoli však — až na případ inflexních bodů čar v rovině — dostačující.

Věta 9. *Regulární bod P nadplochy $\mathbf{V}$ n-tého stupně je jejím bodem planárním aspoň k-tého řádu právě tehdy, když jeho $(n - 1 - k)$-tá polára k této nadploše — to je polára $(k + 1)$-ho stupně — obsahuje jako součást tečnou nadrovinu nadplochy $\mathbf{V}$ v jejím bodě P.*

Poznámka. Tato věta platí zřejmě i pro nulový řád planárního bodu, tj. i pro triviální planární body, neboť $(n - 1)$-ní polára regulárního bodu k dané nadploše je tečná nadrovina dané nadplochy v tomto jejím bodě.

Než přikročíme k důkazu věty 9, dokážeme tuto pomocnou větu.

Obsahuje-li p-tá polára libovolného regulárního bodu P dané nadplochy $\mathbf{V}$ n-tého stupně k téže nadploše její tečnou nadrovinu v tomto bodě P jako součást, obsahují tuto nadrovinu jako součást všechny q-té poláry bodu P k nadploše $\mathbf{V}$, kdykoli $q \geqq p$, pokud existují.

Důkaz pomocné věty. Nechť O_0 je regulární bod P nadplochy $\mathbf{V}$ a tečná nadrovina v něm nechť má rovnici (1). Obsahuje-li tuto nadrovinu p-tá polára bodu O_0 k nadploše $\mathbf{V}$ jako součást, je rovnice této poláry

$$x_1 \, f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 . \tag{13}$$

Avšak rovnice všech q-tých polár bodu O_0 k nadploše $\mathbf{V}$, kdykoli $q \geqq p$, pak jsou — pokud tyto poláry existují —

$$x_1 \frac{\partial^{q-p}}{\partial x_0^{q-p}} \, f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 , \tag{14}$$

takže všechny tyto poláry obsahují tečnou nadrovinu (1) jako součást, jak jsme chtěli dokázati.

Důkaz věty 9. Vzhledem k pomocné větě, kterou jsme právě dokázali, lze větu 9 vyslovit v ekvivalentním znění takto:

Regulární bod P nadplochy $\mathbf{V}$ n-tého stupně je jejím bodem planárním aspoň k-tého řádu právě tehdy, když všechny jeho p-té poláry od $p = n - k - 1$ až do $p = n - 1$, tedy jeho poláry k dané nadploše všech stupňů $1, 2, \ldots, k + 1$, obsahují jako součást tečnou nadrovinu nadplochy $\mathbf{V}$ v jejím bodě P.

V tomto pozměněném znění větu 9 nyní dokážeme.

Nechť O_0 je regulárním bodem nadplochy $\mathbf{V}$ n-tého stupně a nechť tečná nadrovina nadplochy $\mathbf{V}$ v bodě O_0 je (1). Potom má nadplocha rovnici

(15) $$x_0^{n-1}x_1 + \sum_{h=2}^{r} x_0^{n-h} f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,.$$

Bod O_0 je planárním bodem k-tého řádu nadplochy (15) podle věty 1 právě tehdy, když platí

(16) $$f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1 \bar{f}_{h-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

pro $h = 2, 3, \ldots, k + 1$, nikoli však pro h vyšší.

Rovnice p-té poláry bodu O_0 k nadploše (15) potom je

(17) $$\frac{(n-1)!}{(n-p-1)!} x_0^{n-p-1}x_1 + \sum_{h=2}^{n-p} \frac{(n-h)!}{(n-p-h)!} x_0^{n-p-h} f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,.$$

Nechť nyní nejprve bod O_0 je planárním bodem k-tého řádu nadplochy (15). Pro $n - k - 1 \leqq p \leqq n - 1$ je $n - p \leqq k + 1$, takže ve druhém členu levé strany rovnice (17) se vyskytují jen takoví sčítanci, pro něž je $h \leqq k + 1$. Pro příslušná $f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ však podle předpokladu platí vztah (16), takže rovnici (17) lze v tomto případě napsat ve tvaru

(18) $$x_1 f^*_{n-1-p}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,,$$

což znamená, že vyjadřuje složenou plochu $(n - p)$-tého stupně, jež obsahuje jako součást rovinu (1).

Důkaz obráceného tvrzení provedeme pomocí matematické indukce.

Nechť všechny p-té poláry od $p = n - 1 - k$ až do $p = n - 1$ bodu O_0 k nadploše (15) obsahují jako součást nadrovinu (1). Rovnice $(n - 1)$-ní poláry bodu O_0 k nadploše (15) napsaná ve tvaru (17) je

(19) $$(n-1)!\,.\,x_1 = 0\,,$$

takže vyjadřuje právě nadrovinu (1). Rovnice $(n - 2)$-hé poláry v obdobném tvaru je

(20) $$(n-1)!\,.\,x_0x_1 + (n-2)!\,.\,f_2(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,.$$

Tato polára obsahuje jako součást nadrovinu (1) právě tehdy, když platí

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1 \bar{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,,$$

to je právě tehdy, když O_0 je planárním bodem nadplochy (15) aspoň prvního řádu.

Předpokládejme, že dokazované tvrzení platí již pro řád planárního bodu $k = s$, to znamená, že obsahují-li všechny p-té poláry bodu O_0 k nadploše (15) od $p = n - 1 - s$ až do $p = n - 1$ jako součást nadrovinu (1), je bod O_0 planární aspoň s-tého řádu, takže potom vztah (16) platí pro $h = 2, 3, \ldots, \ldots, s + 1$.

A nyní nechť všechny p-té poláry bodu O_0 k nadploše (15) od $p = n - 1 - (s + 1) = n - 2 - s$ až do $p = n - 1$ obsahují jako součást nadrovinu (1). Potom jednak vztah (16) platí pro $h = 2, 3, \ldots, s + 1$, jednak $(n - 2 - s)$-tá polára bodu O_0 k nadploše (15) obsahuje jako součást nadrovinu (1). Rovnice této poláry však zní

$$(21)\qquad \frac{(n-1)!}{(s+1)!}\,x_0^{s-1}x_1 + \sum_{h=2}^{s+1}\frac{(n-h)!}{(s+2-h)!}\,x_0^{s+2-h}\,f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \\ + (n-s-2)!\,.\,f_{s+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,.$$

Protože podle předpokladu jednak činitele x_1 obsahují všichni sčítanci na levé straně, až nejvýše na posledního, jednak činitele x_1 lze vytknout z celé levé strany této rovnice, obsahuje i poslední sčítanec levé strany tohoto činitele, takže platí

$$(22)\qquad f_{s+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1\,\bar{f}_{s+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,,$$

což znamená, že bod O_0 je opravdu planární bod aspoň $(s+1)$-ho řádu nadplochy (15).

Omezíme-li se na trojrozměrný prostor a na dané nadploše n-tého stupně jen na planární body nejvyššího možného řádu, to je řádu $(n-2)$-ho, tedy na body Eckardtovy, dostaneme jako důsledek věty (9) známou větu Eckardtovu:

Důsledek. *Regulární bod plochy n-tého stupně je jejím bodem Eckardtovým právě tehdy, když jeho první polára k ploše se rozpadá tak, že jednou její součástí je tečná rovina plochy v tomto bodě.*

Eckardt použil tohoto výsledku k určení planárních bodů jednotlivých ploch třetího stupně. Důležitost obecnější věty 9 tkví v tom, že nám dovoluje často poměrně snadným výpočtem rozhodnout o tom, zda daný regulární bod dané nadplochy je jejím bodem planárním, a v kladném případě určit i jeho řád.

5

Nejprve použijeme věty 9 k odvození věty, jejíž některé speciální případy jsou již známy.

Věta 10. *Spojnice dvou planárních bodů libovolné kubické nadplochy* $\boldsymbol{V}$ *ji protne po třetí opět v planárním bodě, pokud neleží celá na kubické nadploše* $\boldsymbol{V}$.

Důkaz. Neleží-li spojnice dvou planárních bodů kubické nadplochy $\boldsymbol{V}$ celá na této nadploše, neleží ani v její tečné nadrovině v žádném z těchto bodů, takže tyto planární body lze zvolit za vrcholy souřadnicového simplexu O_0 a O_1 a za tečné nadroviny v nich jednak nadrovinu (1), jednak nadrovinu

$$(23)\qquad x_0 = 0\,.$$

Rovnice nadplochy $\boldsymbol{V}$ třetího stupně pak má tvar

$$(24)\qquad y_1x_0^2x_1 - y_0x_0x_1^2 + x_0x_1\,f_1(x_2, \ldots, x_r) + f_3(x_2, \ldots, x_r)\,,$$

kde y_0, y_1 jsou první dvě souřadnice zbývajícího průsečíku spojnice O_0O_1 s nadplochou $\boldsymbol{V}$, bodu $Y(y_0, y_1, 0, \ldots, 0)$.

Rovnice první poláry bodu Y k nadploše **V** pak je

$$(x_1y_0 + x_0y_1) \, . \, \{x_0y_1 - x_1y_0 + f_1(x_2, \ldots, x_r)\} = 0 \tag{25}$$

a rovnice druhé poláry

$$x_0y_1 - x_1y_0 + f_1(x_2, \ldots, x_r) = 0 \, . \tag{26}$$

Obsahuje tedy první polára bodu Y jeho druhou poláru (tedy tečnou nadrovinu v tomto bodě) jako součást, to znamená, že Y je planárním bodem dané nadplochy (24).

Věta 11. *Leží-li na přímce* **p** *libovolné tři planární body nadplochy* **V** *čtvrtého stupně takové, že přímka* **p** *neleží v tečné nadrovině nadplochy* **V** *v žádném z nich, je zbývající čtvrtý průsečík této přímky s nadplochou* **V** *opět jejím bodem planárním.*

Důkaz věty 11 lze provést obdobnými prostředky jako důkaz věty 10.

A takto lze pokračovati dále. Avšak již na plochách čtvrtého stupně existují planární body vyšších řádů. Užitím jejich prvních polár, tedy kubických polár, k dané nadploše lze dokázat na příklad větu:

Věta 12. *Protíná-li spojnice* **p** *dvou planárních bodů druhého řádu nadplochy* **V** *čtvrtého stupně tuto nadplochu v dalším planárním bodě a neleží-li v tečné nadrovině nadplochy* **V** *v žádném z nich, jsou všechny čtyři průsečíky přímky* **p** *s nadplochou* **V** *její planární body druhého řádu, tedy body Eckardtovy.*

Při zkoumání planárních bodů vyšších řádů nebo na plochách vyšších stupňů se výpočty komplikují, takže určit obecnější vztahy mezi jejich planárními body ležícími na téže přímce touto metodou by bylo značně obtížné. Proto užijeme jiného postupu.[3]) Dokážeme nejdříve obdobné vztahy pro inflexní body čar v rovině a pak je zobecníme na planární body nadploch v r-rozměrném prostoru.

Pomocná věta. *Nechť p inflexních bodů řádů alespoň $k_1, k_2, \ldots, k_p$ křivky* **v** *stupně n-tého leží na přímce* **q** *a nechť $k \geqq \max\,(k_1, k_2, \ldots, k_p)$. Potom platí-li podmínka*

$$\sum_{i=1}^{p} k_i \geqq k(n-1) - \tfrac{1}{2}k(k-1) \, , \tag{27}$$

jsou všechny průsečíky přímky **q** *s křivkou* **v** *jejími inflexními body řádu alespoň k-tého nebo celá přímka* **q** *leží na čáře* **v**.

Důkaz. Označme průsečíky křivky **v** s přímkou **q** postupně $A_1, A_2, \ldots, A_n$, takže A_i bude inflexním bodem křivky **v** řádu alespoň k_i pro $i = 1, 2, \ldots, p$. Tečny čáry **v** v bodech A_i označme $\mathbf{t}_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

S čarou $\bar{\mathbf{v}}$ složenou ze všech tečen $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ má křivka **v** celkem n^2 společných bodů (počítaných i s násobnostmi), z nichž alespoň $\sum_{i=1}^{p} k_i + 2n$ leží na přímce **q**, tedy nejvýše $n^2 - \sum_{i=1}^{p} k_i - 2n$ leží mimo přímku **q**.

[3]) Tento postup mi ukázal prof. dr. J. Metelka.

Vyberme z těchto posledních $n^2 - 2n - \sum_{i=1}^{p} k_i$ bodů jakýchkoli $\frac{1}{2}(n - k + 1)$ . . $(n - k - 2)$ bodů a veďme jimi čáru $(n - k - 2)$-ho stupně, kterou označme $\mathbf{u}$. Je-li nyní v platnosti vztah (27), má křivka $\mathbf{v}$ s čarou $\bar{\bar{\mathbf{v}}}$ n-tého stupně, složenou z čáry $\mathbf{u}$ a přímky $\mathbf{q}$ počítané $(k + 2)$-krát, alespoň

$$(28) \quad k \cdot (n - 1) - \tfrac{1}{2}k \cdot (k - 1) + \frac{(n - k + 1) \cdot (n - k - 2)}{2} = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$$

takových bodů společných, jež leží zároveň na čáře $\bar{\mathbf{v}}$. To však znamená, že čára $\bar{\mathbf{v}}$ prochází všemi n^2 spole nými body čar $\mathbf{v}$ a $\bar{\bar{\mathbf{v}}}$, což je možné jen tak, že všechny body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou inflexními body řádu k-tého křivky $\mathbf{v}$, není-li celá přímka $\mathbf{q}$ součástí čáry $\mathbf{v}$.

Věta 13. *Nechť p planárních bodů řádů alespoň $k_1, k_2, \ldots, k_p$ nadplochy $\mathbf{V}$ stupně n-tého leží na přímce $\mathbf{q}$ a nechť $k \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_p)$. Platí-li potom podmínka (27), jsou všechny průsečíky přímky $\mathbf{q}$ s nadplochou $\mathbf{V}$ jejími planárními body řádu alespoň k-tého nebo přímka $\mathbf{q}$ leží v tečné nadrovině nadplochy $\mathbf{V}$ sestrojené alespoň v jednom jejím společném bodě s přímkou $\mathbf{q}$.*

Důkaz. Každá rovina ϱ procházející přímkou $\mathbf{q}$ protíná nadplochu $\mathbf{V}$ v křivce $\mathbf{v}$, která má ve všech p planárních bodech nadplochy inflexní body týchž nebo vyšších řádů, tedy nejméně $k_1, k_2, \ldots, k_p$. O křivce $\mathbf{v}$ jsme však v pomocné větě dokázali, že další její průsečíky s přímkou $\mathbf{q}$ jsou její inflexní body řádu nejméně k-tého. To platí pro všechny roviny ϱ procházející přímkou $\mathbf{q}$. Podle věty 6 jsou tedy všechny průsečíky přímky $\mathbf{q}$ s nadplochou $\mathbf{V}$ její planární body řádu nejméně k-tého, pokud přímka $\mathbf{q}$ neleží v tečné nadrovině nadplochy $\mathbf{V}$ v žádném z těchto bodů.

Poznámka. Jiný důkaz věty 13 by mohl být proveden na základě téže pomocné věty, ale užitím věty 9 místo věty 6.

Dosadíme-li do (27) $k = 1$, $p = n - 1$, dostaneme:

Důsledek 1. *Nechť $n - 1$ planárních bodů nadplochy $\mathbf{V}$ n-tého stupně leží na přímce $\mathbf{q}$, jež není incidentní s tečnou nadrovinou nadplochy $\mathbf{V}$ v žádném z těchto bodů. Potom i zbývající n-tý průsečík nadplochy $\mathbf{V}$ s přímkou $\mathbf{q}$ je planární bod nadplochy $\mathbf{V}$.*

A dosadíme-li dále do (27) $k = n - 2$, dostaneme:

Důsledek 2. *Nechť p planárních bodů řádů alespoň $k_1, k_2, \ldots, k_p$ nadplochy $\mathbf{V}$ n-tého stupně leží na přímce $\mathbf{q}$ a nechť*

$$(29) \qquad \sum_{i=1}^{p} k_i \geqq \tfrac{1}{2}(n + 1) \cdot (n - 2) \,.$$

Potom všechny body nadplochy $\mathbf{V}$ ležící na přímce $\mathbf{q}$ jsou její planární body $(n - 2)$-ho řádu, tedy její body Eckardtovy, nebo přímka $\mathbf{q}$ leží v tečné nadrovině nadplochy $\mathbf{V}$ aspoň v jednom z jejích společných bodů s touto přímkou $\mathbf{q}$.

6

Další aplikace vět, které jsme dokázali, se týká nalezení a určení řádu všech planárních bodů na dané ploše nebo nadploše.

Podle věty 7 lze nejprve určit všechny body dané plochy nebo nadplochy, které mohou být jejími body planárními aspoň prvního řádu. Jsou to všechny ty její regulární body, které jsou zároveň body jejího Hessiánu v potřebné násobnosti, tedy $(r - 1)$-násobné, jde-li o nadplochu v r-rozměrném prostoru.

Nalezením všech takových bodů není ovšem náš úkol ještě ukončen. Zbývá rozhodnout, které z nalezených bodů jsou skutečně planární (aspoň prvního řádu), a v kladném případě určit jejich řád. Pokud tato jejich vlastnost není patrná na první pohled z jejich souřadnic a z tvaru rovnice plochy nebo nadplochy, lze ji snadno určit na základě věty 9 o rozložitelnosti polár planárního bodu.

Celá tato druhá část zkoumání ovšem odpadá, jedná-li se o inflexní body čar v rovině, jak je patrné z věty 8, pokud nám ovšem nezáleží na jejich řádu.

Příklad 1. Určíme všechny planární body dané kubické plochy, tak zvané ekvianharmonické, jejíž rovnici lze užitím vhodné soustavy souřadnic dát tvar

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 . \tag{30}$$

Její Hessián má rovnici

$$x_0 x_1 x_2 x_3 = 0 , \tag{31}$$

což znamená, že ve všech dvojnásobných bodech jejího Hessiánu jsou dvě ze souřadnic x_0, x_1, x_2, x_3 rovny nule, takže tyto body leží na osách souřadnicového simplexu.

Vyberme si jednu z těchto os, na příklad spojnici bodů O_0, O_1. Libovolný bod Y, který na ní leží, má souřadnice $Y(y_0, y_1, 0, 0)$, a leží-li zároveň na ploše (30), platí o nich

$$y_0^3 + y_1^3 = 0 . \tag{32}$$

Rovnice (32), jak je zřejmé, má celkem tři řešení, která mají různý geometrický význam, totiž

$$1.\ y_0 = 1,\ y_1 = -1 ; \quad 2.\ y_0 = 1,\ y_1 = \varepsilon_6 ; \quad 3.\ y_0 = 1,\ y_1 = \varepsilon_6^5 , \tag{33}$$

kde ε_6 značí libovolnou šestou primitivní odmocninu z jednotky; podobně i nadále ε_k bude značit libovolnou k-tou primitivní odmocninu z jednotky.

Zbývá rozhodnout, které z nalezených bodů $Y_1(1, -1, 0, 0)$, $Y_2(1, \varepsilon_6, 0, 0)$, $Y_3(1, \varepsilon_6^5, 0, 0)$ jsou skutečně planárními body dané ekvianharmonické kubické plochy (30) (prvního řádu). První polára bodu $Y(y_0, y_1, 0, 0)$ k ploše (30) má rovnici

$$y_0 x_0^2 + y_1 x_1^2 = 0 , \tag{34}$$

jeho druhá polára k téže ploše rovnici

(35) $$y_0^2x_1 + y_1^2x_1 = 0 .$$

Pro bod Y_1 platí

(36) $$x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1) . (x_0 - x_1) ,$$

a pro body Y_2 a Y_3

(37) $$x_0^2 + \varepsilon_6 x_1^2 = (x_0 + \varepsilon_3 x_1) . (x_0 - \varepsilon_3 x_1) ,$$

(38) $$x_0^2 + \varepsilon_6^5 x_1^2 = (x_0 + \varepsilon_3^2 x_1) . (x_0 - \varepsilon_3^2 x_1) .$$

Rovnice (36), (37) a (38) však znamenají, že kvadratické poláry bodů Y_1, Y_2 i Y_3 obsahují jejich lineární poláry jako součást, tedy že body Y_1, Y_2, Y_3 jsou planárními body ekvianharmonické kubické plochy (30).

Ostatní planární body dané plochy (30) leží na ostatních osách O_hO_k souřadnicové soustavy, a to tak, že na každé leží tři: jeden reálný a dva imaginární. Celkem má tedy plocha (30) $3 . \binom{4}{2} = 18$ planárních bodů, z nichž však jen 6 je reálných. Jsou to vesměs její body Eckardtovy, a to:

(39) $$\begin{array}{lll} Y_1(1, -1, 0, 0) , & Y_7(1, 0, 0, -1) , & Y_{13}(0, 1, 0, -1) , \\ Y_2(1, \varepsilon_6, 0, 0) , & Y_8(1, 0, 0, \varepsilon_6) , & Y_{14}(0, 1, 0, \varepsilon_6) , \\ Y_3(1, \varepsilon_6^5, 0, 0) , & Y_9(1, 0, 0, \varepsilon_6^5) , & Y_{15}(0, 1, 0, \varepsilon_6^5) , \\ Y_4(1, 0, -1, 0) , & Y_{10}(0, 1, -1, 0) , & Y_{16}(0, 0, 1, -1) , \\ Y_5(1, 0, \varepsilon_6, 0) , & Y_{11}(0, 1, \varepsilon_6, 0) , & Y_{17}(0, 0, 1, \varepsilon_6) , \\ Y_6(1, 0, \varepsilon_6^5, 0) , & Y_{12}(0, 1, \varepsilon_6^5, 0) , & Y_{18}(0, 0, 1, \varepsilon_6^5) . \end{array}$$

Všechny tyto body nalezl již Eckardt.

Příklad 2. Určíme všechny planární body dané plochy čtvrtého stupně

(40) $$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0 ,$$

jejíž všechny body, jak je patrno z její rovnice, jsou imaginární.

Její Hessián je

(41) $$x_0^2x_1^2x_2^2x_3^2 = 0 ,$$

takže jeho dvojnásobné body vyplňují všechny čtyři roviny souřadnicové

(42) $$x_0 = 0 , \quad x_1 = 0 , \quad x_2 = 0 , \quad x_3 = 0 .$$

Uvidíme však, že mimo jejich průsečnice, osy soustavy souřadnicové, neleží žádný planární bod dané plochy (40). Kdyby totiž existoval takový bod na příklad na první rovině ze soustavy (42), na příklad $Y(0, y_1, y_2, y_3)$ mimo osy souřadnic, takže by bylo

(43) $$y_1y_2y_3 \neq 0 ,$$

byla by jeho druhá (kvadratická) polára k ploše (40)

(44) $$y_1^2x_1^2 + y_2^2x_2^2 + y_3^2x_3^2 = 0$$

a jeho třetí (lineární) polára k ploše (40)

$$y_1^3x_1 + y_2^3x_2 + y_3^3x_3 = 0 \tag{45}$$

a muselo by platit

$$y_1^2x_1^2 + y_2^2x_2^2 + y_3^2x_3^2 = (y_1^3x_1 + y_2^3x_2 + y_3^3x_3) \cdot (ax_1 + bx_2 + cx_3)\,, \tag{46}$$

tedy čísla a, b, c by musela být řešením rovnic

$$\begin{gathered} ay_1^3 = y_1^2\,, \quad by_2^3 = y_2^2\,, \quad cy_3^3 = y_3^2\,; \\ ay_2^3 + by_1^3 = 0\,, \quad ay_3^3 + cy_1^3 = 0\,, \quad by_3^3 + cy_2^3 = 0\,. \end{gathered} \tag{47}$$

Podle prvních tří z nich by však muselo platit

$$a = \frac{1}{y_1}\,, \quad b = \frac{1}{y_2}\,, \quad c = \frac{1}{y_3}\,, \tag{48}$$

což dosazeno na příklad do čtvrté rovnice ze soustavy (47) by dalo

$$\frac{y_2^3}{y_1} + \frac{y_1^3}{y_2} = \frac{y_1^4 + y_2^4}{y_1y_2} = 0\,. \tag{49}$$

Ale to není možné, neboť pro bod $Y(0, y_1, y_2, y_3)$ plochy (40) znamená podmínka (49) $y_3 = 0$, což odporuje předpokladu (43).

Lze tedy planární body plochy (40) hledat opět jen na osách soustavy souřadnic.

Provedením úvah a výpočtů analogických těm, jež byly provedeny v příkladu 1, zjistíme, že plocha (40) má na každé ose soustavy souřadnic čtyři planární body (ovšem vesměs imaginární), celkem tedy $4 \cdot \binom{4}{2} = 24$ planárních bodů, z nichž na příklad na ose O_0O_1 jsou:

$$P_1(1, \varepsilon_8, 0, 0)\,, \quad P_2(1, \varepsilon_8^3, 0, 0)\,, \quad P_3(1, \varepsilon_8^5, 0, 0)\,, \quad P_4(1, \varepsilon_8^7, 0, 0)\,.$$

Pomocí rozkladu prvních (kubických) polár dokonce zjistíme, že všechny nalezené 24 planární body plochy (40) jsou jejími planárními body druhého (tedy nejvyššího možného) řádu. Jsou to tedy Eckardtovy body dané plochy (40).

Příklad 3. Určíme konečně planární body ekvianharmonické kubické nadplochy ve čtyřrozměrném prostoru o rovnici

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0\,. \tag{50}$$

Její Hessián je

$$x_0x_1x_2x_3x_4 = 0\,. \tag{51}$$

Trojnásobné body Hessiánu leží jen na osách souřadnicového simplexu. Z nich body dané nadplochy (50) ležící na příklad na ose O_0O_1 jsou $P_1(1, -1, 0, 0, 0)$, $P_2(1, \varepsilon_6, 0, 0, 0)$, $P_3(1, \varepsilon_6^5, 0, 0, 0)$. Všechny jsou, jak se snadno zjistí, planární body dané nadplochy (50). Celkem má tedy tato nadplocha $3 \cdot \binom{5}{2} = 30$ planárních bodů, vesměs Eckardtových, z nichž však jen 10 je reálných.

7

Pojem planárního bodu lze různě zobecnit. Omezme se přitom na s-násobné body uniplanární a zaveďme tento pojem:

Definice 5. *Je-li nadplocha* **V** *proťata tečnou nadrovinou ve svém s-násobném uniplanárním bodě P ve varietě* **U** *tak, že P je* $(s + k + 1)$*-násobným bodem variety* **U**, *nazývá se bod P s-násobným hyperplanárním bodem nadplochy* **V** *k-tého řádu.*

Má-li tečná nadrovina variety **V** v jejím s-násobném hyperplanárním bodě k-tého řádu O_0 rovnici (1), lze rovnici variety **V** uvést na tvar

$$(52)\quad x_0^{n-s}x_1^s + \sum_{h=s+1}^{s+k} x_0^{n-h} x_1 f_{h-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{h=s+k+1}^{n} x_0^{n-h} f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0\,.$$

Některé vlastnosti hyperplanárních bodů takto definovaných (přičemž se opět omezujeme až na výjimečné případy na takové hyperplanární body, jejichž řád je aspoň 1) jsou zcela obdobné vlastnostem bodů planárních. Jsou to na příklad vlastnosti vyjádřené větami 2, 3, 4, 5 a 6, jejichž zobecnění na body hyperplanární je snadné a nebudeme se jím tedy zabývat.

Poněkud méně zřejmé je zobecnění vět 7 a 9 na body hyperplanární.

Zobecněním věty 7 dostaneme výsledek sice negativní, ale značně překvapující:

Věta 14. *Je-li s-násobný uniplanární bod dané nadplochy* **V** $(s \geqq 2)$ *jejím bodem hyperplanárním, nemusí v něm mít její Hessián bod vyšší násobnosti než v obyčejném s-násobném bodě nadplochy* **V**.

Naproti tomu k větě 9 existuje pro hyperplanární body věta značně analogická.

Věta 15. *s-násobný uniplanární bod P dané nadplochy* **V** *je jejím bodem hyperplanárním k-tého řádu právě tehdy, když jeho* $(n - s - k)$*-tá polára obsahuje tečnou nadrovinu v bodě P jako součást.*

Důkazy vět 14 a 15 vynecháme, protože jsou zcela obdobné důkazům vět 7 a 9.

Literatura

[1] *E. F. Eckardt*: Über diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Math. Annalen 1876, Leipzig, 227—273.

[2] *H. Basset*: A Treatise on the Geometry of surfaces. Cambridge 1910.

[3] *J. L. Coolidge*: A Treatise on algebraic plane curves. Oxford 1931.

[4] *G. Salmon - W. Fiedler*: Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1922.

[5] *L. Godeaux*: Sur les droites d'une surface cubique. Mathesis 1933, Paris, 333—339.

[6] *J. Metelka*: Sur les points planaires des surfaces cubiques. Bulletin de l'Académie royale Belgique, Classe des Sciences 1947, Bruxelles, 143—155.

[7] *B. Bydžovský*: Úvod do algebraické geometrie. Praha 1948.

Резюме

ПЛАНАРНЫЕ И ГИПЕРПЛАНАРНЫЕ ТОЧКИ

КАРЕЛ ШИНДЕЛАРЖ (Karel Šindelář), Жилина

В начале статьи понятие планарной точки расширено так, что всякая точка области регулярности любой гиперповерхности в r-мерном проективном пространстве называется планарной точкой k-го порядка, если в ней совместное многообразие гиперповерхности и ее касательной гиперплоскости имеет точку $(k + 2)$-кратную. Порядок $k = 0$ из этого обыкновенно исключается. Это значит, что понятие планарной точки кривой на плоскости совпадает с понятием точки перегиба даже относительно ее порядка. Сперва доказывается, что всякая гиперплоскость, проходящая через планарную точку k-го порядка заданной гиперплоскости — за исключением касательной гиперплоскости — пересекает гиперповерхность в многообразии, в котором эта точка является также планарной точкой по крайней мере k-го порядка. Поскольку существуют гиперплоскости, пересекающие гиперповерхность в многообразиях, у которых порядок планарности этой точки высший, то такие гиперплоскости образуют пучки гиперплоскостей, а именно не больше $k + 2$ пучков, у которых оси — то есть $(r — 2)$-мерные линейные пространства — находятся в касательной гиперплоскости данной гиперповерхности в ее планарной точке.

Далее, оказывается, что для того, чтобы заданная точка области регулярности гиперповерхности

$$f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$$

в r-мерном пространстве была ее планарной точкой по крайней мере первого порядка, необходимо, чтобы она была по крайней мере $(r —1)$-кратной точкой ее гессияна:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_0^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_0\, \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_0\, \partial x_r} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_0\, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_1^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_1\, \partial x_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_0\, \partial x_r} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_1\, \partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_r^2} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Однако это условие недостаточно за исключением точек перегиба плоских кривых.

С другой стороны, для того чтобы заданная точка гиперплоскости являлась ее планарной точкой k-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы ее ($n - 1 - k$)-тая поляра к заданной гиперплоскости распадалась на части, в том числе на касательную гиперплоскость заданной гиперповерхности в этой планарной точке.

При помощи этих необходимых и достаточных условий исследуются сначала планарные точки данной гиперплоскости, лежащие на прямой линии, в особенности относительно их порядка, большей частью на основании аналогичных результатов о точках перегиба кривых на плоскости.

Дальнейшим применением доказанных теорем является полное определение всех планарных точек заданной поверхности или гиперповерхности; способ нахождения показан на примере эквиангармонической кубической поверхности, далее на аналогичной поверхности четвертой степени и, наконец, на эквиангармонической кубической гиперповерхности в четырехмерном пространстве.

В заключение понятие планарной точки распространено на так называемые гиперпланарные точки. Эти точки определены как многократные унипланарные точки гиперповерхности в r-мерном проективном пространстве, а именно такие, что касательная гиперплоскость в этих точках пересекает данную гиперповерхность в многообразии, в котором кратность данной точки выше, чем в общем случае. Оказывается, что некоторые свойства определенных таким образом гиперпланарных точек совпадают, а некоторые отличаются от аналогичных свойств планарных точек.

Résumé

LES POINTS PLANAIRES ET HYPERPLANAIRES

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

La notion de point planaire est généralisée de façon que chaque point régulier d'une hypersurface dans l'espace projectif à r dimensions est son point planaire d'ordre k, quand la variété commune de l'hypersurface et de son hyperplan tangent en ce point comprend le point tangent à multiplicité $k + 2$. D'ordinaire, l'ordre $k = 0$ est exclu. Mais cette définition entraîne que dans le plan la notion de point planaire coïncide avec celle de point d'inflexion même en ce qui concerne son ordre.

On démontre d'abord que chaque hyperplan passant par un point planaire d'ordre k d'une hypersurface — à l'exception de l'hyperplan tangent en ce point planaire — coupe l'hypersurface dans une variété pour laquelle ce point est planaire d'ordre k au moins. Quand il y a encore des hyperplans coupant l'hypersurface dans les variétés sur lesquelles l'ordre de ce point s'élève, ces hyperplans remplissent des faisceaux d'hyperplans, au plus $k + 2$ faisceaux, dont les axes

— ce sont des espaces linéaires à r — 2 dimensions — sont situés dans l'hyperplan tangent à l'hypersurface originale en son point planaire.

Ci-après, on démontre que la condition nécessaire pour qu'un point régulier d'une hypersurface dans l'espace à r dimensions soit son point planaire d'ordre un au moins est qu'il soit le point de son hessienne de multiplicité $r - 1$ au moins. Mais cette condition n'est pas suffisante, à l'exception des points d'inflexion de courbes dans le plan.

Au contraire, la condition nécessaire et suffisante à la fois pour qu'un point d'une hypersurface soit son point planaire d'ordre k est que sa $(n - 1 - k)^e$ polaire se décompose en hyperplan tangent de l'hypersurface en ce point planaire.

Tenant compte de ces conditions nécessaires et suffisantes, on examine tous les points planaires d'une hypersurface situés dans une ligne droite, spécialement en ce qui concerne leur ordre, en utilisant pour la plupart les rapports analogues des points d'inflexion des courbes.

L'application suivante de ces théorèmes, c'est la détermination complète des points planaires d'une surface ou d'une hypersurface. Ce procédé est démontré pour le cas de la surface cubique équianharmonique, d'une surface analogue d'ordre 4 et de l'hypersurface équianharmonique cubique dans l'espace à 4 dimensions.

Pour conclure, la notion de point planaire est généralisée de nouveau aux points hyperplanaires. Selon la définition ce sont les points uniplanaires de multiplicité supérieure à un d'une hypersurface dans l'espace projectif à r dimensions tels que l'hyperplan tangent en ces points coupe l'hypersurface dans une variété dans laquelle la multiplicité d'un tel point est plus élevée que dans le cas général.

On démontre que les points hyperplanaires ainsi déterminés ont les propriétés tantôt analogues tantôt différentes des propriétés des points planaires.