Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

O JEDNEJ CHINČINOVEJ VETE

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Došlo dne 12. srpna 1959)

A. CHINČIN dokázal r. 1924 zaujímavú vetu (pozri [1]), týkajúcu sa tzv. spočetných (transfinitných) pravdepodobností. Táto veta mala hlboké aplikácie v aritmetike kontinua. V tomto článku ukážeme jej použitie na štúdium rozdelenia znamienok v istom type absolútne konvergentných radov a zostríme tým výsledok práce [2].

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) značí v celom tomto článku rad s kladnými členmi, nech (1) konverguje a má súčet A (teda $A > 0$). Nech

$$a_n > R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Označme znakom W množinu všetkých tých x, ktoré možno vyjadriť vo tvare

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{alebo} \quad -1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Potom W je perfektná množina a pre jej Lebesgueovu mieru $|W|$ platí

$$|W| = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} R_n .$$

V práci [2] je dokázaná nasledujúca veta o rozdelení znamienok v radoch $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n = 1$ alebo -1 $(n = 1, 2, \ldots)$.

Nech $|W| > 0$. Nech $f(n, x)$ značí počet čísel 1 v konečnej postupnosti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ (pritom $x = \sum_1^{\infty} \varepsilon_n a_n$), potom pre skoro všetky $x \in W$ (v zmysle Lebesgueovej miery) platí

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left| f(n, x) - \frac{n}{2} \right|}{\sqrt{n \log \log n}} \leqq 1 .$$

V tomto článku ukážeme, že pre skoro všetky $x \in W$ je dokonca

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left| f(n, x) - \frac{n}{2} \right|}{\sqrt{n \log \log n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Napred popíšeme štruktúru množiny W. Vynechaním intervalu $\Delta_1^1 = (-a_1 + R_1, a_1 - R_1)$ z intervalu $\langle -A, A\rangle$ dostaneme množinu J_1 pozostávajúcu z dvoch intervalov.

$$i_1^1 = \langle -A, -a_1 + R_1\rangle\,, \quad i_1^2 = \langle a_1 - R_1, A\rangle\,,$$

každý z nich má dĺžku $2R_1$. Vynechaním intervalu

$$\Delta_2^1 = (-a_1 - a_2 + R_2, -a_1 + a_2 - R_2)$$

z intervalu i_1^1 dostaneme dva intervaly i_2^1, i_2^2 patriace k J_2 a to:

$$i_2^1 = \langle -A, -a_1 - a_2 + R_2\rangle\,, \quad i_2^2 = \langle -a_1 + a_2 - R_2, -a_1 + R_1\rangle\,.$$

Podobne vynechaním intervalu $\Delta_2^2 = (a_1 - a_2 + R_2, a_1 + a_2 - R_2)$ z intervalu i_1^2 dostaneme dva intervaly i_2^3, i_2^4 množiny J_2,

$$i_2^3 = \langle a_1 - R_1, a_1 - a_2 + R_2\rangle\,, \quad i_2^4 = \langle a_1 + a_2 - R_2, A\rangle\,.$$

Teda J_2 pozostáva zo štyroch intervalov i_2^k $(k = 1, 2, 3, 4)$. Každý z intervalov i_2^k $(k = 1, 2, 3, 4)$ má dĺžku $2R_2$. Interval Δ_1^1 nazývame styčným intervalom (množiny W) prvého poradia, Δ_2^k $(k = 1, 2)$ nazývame styčnými intervalmi druhého poradia.

V konštrukcii možno pokračovať ďalej. Nech sme už zostrojili množinu J_n pozostávajúcu z 2^n intervalov i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, 2^n)$, každý z nich má dĺžku $2R_n$. Teda

$$\begin{aligned} i_n^1 &= \langle -A, -a_1 - a_2 - \ldots - a_n + R_n\rangle\,,\\ i_n^2 &= \langle -a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1} + a_n - R_n, -a_1 - \ldots - a_{n-1} + a_n + R_n\rangle\,,\\ &\vdots\\ i_n^m &= \langle \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - R_n, \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + R_n\rangle\,, \quad \ldots\\ &\qquad (\varepsilon_k = 1 \text{ alebo } -1 \text{ pre } k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Pre každý interval i_n^m je charakteristické, že všetky čísla $x \in W$, ktoré patria do i_n^m, majú vo svojich rozvojoch $x = \sum_1^\infty \varepsilon_k a_k$ na prvých n miestach tie isté faktory ε_k ako ľavý (a tiež pravý) koncový bod intervalu i_n^m. Stručne hovoríme, že interval

$$i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - R_n, \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + R_n\rangle$$

patrí k postupnosti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ a naopak.

Ak píšeme $\Delta_{n+1}^m = (\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - a_{n+1} + R_{n+1}, \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + a_{n+1} - R_{n+1})$, $1 \leqq m \leqq 2^n$ a vynecháme pri danom n z každého intervalu i_n^m interval Δ_{n+1}^m, dostaneme 2^{n+1} intervalov i_{n+1}^k tvoriacich množinu J_{n+1}.

Pritom je $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ a pre stručnosť označujeme znakom J_n množinu $\{i_n^1, i_n^2, \ldots, i_n^{2^n}\}$ ako aj množinu $\bigcup_{m=1}^{2^n} i_n^m$ (nemôže dôjsť k nedorozumeniu).

Pri pevnom n je teda $\langle -A, A\rangle$ zjednotením 2^n intervalov množiny J_n a styčných intervalov Δ_k^l, $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq l \leqq 2^{k-1}$.

Položme $X_n = \{-1, 1\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a na množine všetkých podmnožín množiny X_n definujme mieru μ_n tak, aby

$$\mu_n = (\{-1\}) = \mu_n(\{1\}) = \tfrac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Utvorme nekonečný kartézsky súčin X množín X_n,

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times \ldots$$

a nech μ značí (nekonečný) súčin mier μ_n,

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n \times \ldots,$$

μ je, ako je známe (pozri [3], str. 332–339) miera definovaná na istom σ-aditívnom telese S podmnožín množiny X. Nech μ' značí zúplnenie miery μ, μ' je teda úplná miera definovaná na istom σ-aditívnom telese $S' \supset S$ podmnožín množiny X.

Z definície μ a μ' ihneď vyplýva (pozri [3], str. 332–339 a [4]), že μ' splňuje všetky axiomy spočetnej pravdepodobnosti.

Označme pri $\tau > 0$

$$N_\tau = E\left[\eta;\ \eta \in X,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\nu(n, \eta) - \frac{n}{2}\right|}{\sqrt{\frac{n}{2}\log\log n}} \in \langle 1 - \tau,\ 1 + \tau\rangle\right],$$

kde $\nu(n, \eta)$ značí počet čísel 1 v postupnosti (konečnej) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ $(\eta = \{\eta_k\}_{k=1}^\infty)$. Podľa Chinčinovej vety je $\mu'(N_\tau) > 1 - \tau$. Napred uvedieme niekoľko pomocných viet.

Lemma 1. *Nech $\eta \in X$. Potom $\mu(\{\eta\}) = 0$.*

Dôkaz. $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$, kde $\eta_n \in X_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Položme pre každé $n = 1, 2, \ldots$

$$F_n = \{\eta_1\} \times \{\eta_2\} \times \ldots \times \{\eta_n\} \times X^{(n},$$

kde $X^{(n} = X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots$ Potom $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ je klesajúca postupnosť μ-merateľných množín v X (pozri [3], str. 334) a $\{\eta\} = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$, preto

$$\mu(\{\eta\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Poznámka. Podľa predošlej vety je tiež $\mu'(\{\eta\}) = 0$ pre každé $\eta \in X$.

V ďalšom definujeme zobrazenie T množiny X na množinu W takto: Pre $\eta \in X$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n, \ldots)$ kladieme $T(\eta) = \sum_{n=1}^\infty \eta_n a_n$.

Dôležitú úlohu v dôkaze výsledku tejto práce bude mať nasledujúca pomocná veta:

Lemma 2. *Nech* $|W| = 1$. *Nech* $M \subset W$, M *merateľná* (L). *Potom množina*

$$T_{-1}(M) = \underset{\eta \in X}{E}\, T(\eta) \in M$$

je μ'*-merateľná v* X *a platí* $\mu'(T_{-1}(M)) = |M|$.

D ô k a z. Dôkaz uskutočníme vo viacerých krokoch. Napred zavedieme pre stručnosť toto označenie: Ak $K \subset \langle -A, A \rangle$, potom $K^* = K \cap W$.

a) Nech $M = i_n^{k*}$ $(i_n^{k*} = (i_n^k)^*)$, nech i_n^k patrí k postupnosti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, potom zrejme

$$T_{-1}(i_n^{k*}) = \{\varepsilon_1\} \times \{\varepsilon_2\} \times \ldots \times \{\varepsilon_n\} \times X^{(n}$$

a $\mu'(T_{-1}(i_n^{k*})) = \frac{1}{2^n}$ (pozri [3], str. 338) a tiež, ako ľahko vidieť, $|i_n^{k*}| = \frac{1}{2^n}$, teda tvrdenie lemmy v tomto prípade platí.

b) Nech $M = J^*$, kde J je nejaký interval, $J \subset \langle -A, A \rangle$.

Môžeme už zrejme predpokladať, že oba koncové body intervalu J sú z W. Ďalej vzhľadom na lemmu 1 môžeme predpokladať, že ľavý (pravý) koncový bod intervalu J nie je ľavým (pravým) koncovým bodom nejakého styčného intervalu množiny W a že J je otvorený interval. Ľahko možno nahliadnuť, že pre taký interval je už J^* spočetným zjednotením množín i_n^{k*}, teda

$$J^* = \bigcup_{i_n^{k*} \subset J^*} i_n^{k*} \quad \text{a} \quad T_{-1}(J^*) = \bigcup_{i_n^{k*} \subset J^*} T_{-1}(i_n^{k*}) .$$

Každý zo sčítancov vpravo patrí podľa a) do S', teda aj celá pravá strana je μ'-merateľná množina v X a podľa a)

$$\mu'(T_{-1}(J^*)) = \sum_{i_n^{k*} \subset J^*} \mu'(T_{-1}(i_n^{k*})) = \sum_{i_n^{k*} \subset J^*} |i_n^{k*}| = |J^*| .$$

Teda aj v tomto prípade platí tvrdenie lemmy.

c) Nech $F \subset W$, nech F je uzavretá (na priamke) množina. Položme $J = \langle \text{Min}\, F, \text{Max}\, F \rangle$, potom $F \subset J$ a $J - F$ je otvorená množina na priamke, preto $J - F = \bigcup_n J'_n$, vpravo máme zjednotenie dizjunktného spočetného systému otvorených intervalov, $J'_n \subset \langle -A, A \rangle$. Ďalej je zrejmé, že

$$W \cap (J - F) = J^* - F = \bigcup_n J_n'^* .$$

Potom podľa b) platí

$$T_{-1}(J^* - F) = \bigcup_n T_{-1}(J_n'^*) \in S'$$

a taktiež podľa b) je

$$\mu'(T_{-1}(J^* - F)) = \sum_n \mu'(T_{-1}(J_n'^*)) = \sum_n |J_n'^*| = |J^* - F| .$$

Ďalej z $F = J^* - (J^* - F)$ dostávame $T_{-1}(F) = T_{-1}(J^*) - T_{-1}(J^* - F)$, pravá strana (a teda aj ľavá strana) patrí podľa b) a podľa predošlého do S' a

$$\mu'(T_{-1}(F)) = \mu'(T_{-1}(J^*)) - \mu'(T_{-1}(J^* - F)) = |J^*| - |J^* - F| = |F| .$$

d) Nech M je merateľná (L), $M \subset W$.

Predovšetkým položíme $J = \langle -A, A \rangle$, potom $M \subset J$. Z teorie Lebesguoevej miery je známe, že existuje postupnosť navzájom dizjunktných množín $N, F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, tak, že $M = N \cup F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n \cup \ldots$, F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sú uzavreté množiny a $|N| = 0$; podobne existuje postupnosť navzájom dizjunktných množín $Q, F_1', F_2', \ldots, F_n', \ldots$, tak, že $J^* - M = Q \cup F_1' \cup F_2' \cup \ldots \cup F_n' \cup \ldots$, F_i' $(i = 1, 2, \ldots)$ sú uzavreté množiny a $|Q| = 0$.

Zrejme

$$\begin{aligned} T_{-1}(M) &= T_{-1}(N) \cup T_{-1}(F_1) \cup \ldots \cup T_{-1}(F_n) \cup \ldots , \\ T_{-1}(J^* - M) &= T_{-1}(Q) \cup T_{-1}(F_1') \cup \ldots \cup T_{-1}(F_n') \cup \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Položme $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cup F_n')$, potom podľa c) je

$$T_{-1}(Z) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T_{-1}(F_n) \cup T_{-1}(F_n')) \in S'$$

a

$$\begin{aligned} \mu'(T_{-1}(Z)) &= \sum_{k=1}^{\infty} [\mu'(T_{-1}(F_n)) + \mu'(T_{-1}(F_n'))] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (|F_n| + |F_n'|) = |M| + |J^* - M| = |J^*| = \mu'(T_{-1}(J^*)) , \end{aligned} \tag{3}$$

a keďže $J^* = Z \cup (N \cup Q)$, je

$$T_{-1}(J^*) = T_{-1}(Z) \cup T_{-1}(N \cup Q) , \tag{4}$$

a tak podľa predošlého a podľa c) je $T_{-1}(N \cup Q) \in S'$ a podľa (3), (4) je $\mu'(T_{-1}(N \cup \cup Q)) = 0$. Vzhľadom na úplnosť miery μ' je teda $\mu'(T_{-1}(N)) = \mu'(T_{-1}(Q)) = 0$. Z toho a z (2) dostávame tvrdenie lemmy okamžite.

Pristúpime k dôkazu vety, zostrujúcej výsledok práce [2]. Dôkaz bude už ľahkým dôsledkom pomocných viet.

Veta. *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $a_n > 0$,

$$a_n > R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Označme znakom W množinu všetkých tých x, ktoré možno vyjadriť vo tvare

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n , \quad \varepsilon_n = 1 \quad \textit{alebo} \quad -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Predpokladajme, že $|W| > 0$ ($|W|$ značí Lebesgueovu mieru množiny W).

Označme znakom $f(n, x)$ počet čísel 1 *v (konečnej) postupnosti*

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \quad \left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\right).$$

Tvrdenie. *Pre skoro všetky $x \in W$ (v zmysle Lebesgueovej miery) platí*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\left|f((n, x) - \frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n \log \log n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Poznámka. Podľa uvedenej vety platí pre skoro všetky $x \in W$ tento rozdeľovací zákon pre znamienka:

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + \Omega(\sqrt{n \log \log n})$$

($\phi(n) = \Omega(\psi(n))$, $\psi(n) > 0$ značí, že

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|\phi(n)|}{\psi(n)} = c, \quad 0 < c < +\infty).$$

Dôkaz vety. Môžeme už predpokladať, že $|W| = 1$, v opačnom prípade by sme prešli k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{|W|}$.

Zvoľme klesajúcu postupnosť kladných čísel $\{\tau_k\}_1^{\infty}$, $\tau_k \to 0$. Položme

$$N = \bigcap_{k=1}^{\infty} N_{\tau_k}, \quad \text{kde} \quad N_{\tau_k} = E\left[\eta; \eta \in X, \limsup_{n \to \infty} \frac{\left|\nu(n, \eta) - \frac{n}{2}\right|}{\sqrt{\frac{n}{2} \log \log n}} \in \langle 1 - \tau_k, 1 + \tau_k \rangle\right].$$

Zrejme

$$N = E\left[\eta; \eta \in X, \limsup_{n \to \infty} \frac{\left|\nu(n, \eta) - \frac{n}{2}\right|}{\sqrt{\frac{n}{2} \log \log n}} = 1\right]$$

a podľa Chinčinovej vety

$$\mu'(N) = \lim_{k \to \infty} \mu'(N_{\tau_k}) \geqq \lim_{k \to \infty} (1 - \tau_k) = 1,$$

tedy $\mu'(N) = 1$. Ak teraz klademe

$$M = E\left[x; x \in W, \limsup_{n \to \infty} \frac{\left|f(n, x) - \frac{n}{2}\right|}{\sqrt{\frac{n}{2} \log \log n}} = 1\right],$$

potom zrejme $N = T_{-1}(M)$ a podľa lemmy 2 je

$$|M| = \mu'(T_{-1}(M)) = \mu'(N) = 1 .$$

Tým je dôkaz vety skončený.

Literatúra

[1] *A. Chinčin*: Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fund. Math., *VI* (1924), 9–20.

[2] *T. Šalát*: Absolútne konvergentné rady a dyadické rozvoje. Mat.-fyz. čas. SAV *IX* (1959), 1, 3–14.

[3] *R. Sikorski*: Funkcje rzeczywyste I. Warszawa 1958.

[4] *H. Steinhaus*: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure. Fund. Math. *IV* (1923), 286–310.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХИНЧИНА

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

Результатом настоящей работы является следующая теорема, доказательство которой основывается на одном результате А. Хинчина (см. [1]):

Теорема. *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $a_n > 0$, $a_n > R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Обозначим через W множество всех тех x, которые допускают представление вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n , \quad \varepsilon = 1 \quad \textit{или} \quad -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Допустим, что $|W| > 0$ ($|W|$ *обозначает меру Лебега множества* W).

Обозначим через $f(n, x)$ *количество чисел* 1 *в (конечной) последовательности*

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \quad (x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n) .$$

Утверждение: Почти для всех $x \in W$ *(в смысле меры Лебега) имеет место*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\left| f(n, x) - \frac{n}{2} \right|}{\sqrt{n \log \log n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Эта теорема представляет усиление одного из более ранних результатов автора (см. [2]).

Zusammenfassung

ÜBER EINEN SATZ VON A. CHINČIN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Das Ergebnis dieser Arbeit ist folgender Satz, dessen Beweis auf einem Ergebnis von A. CHINČIN beruht (siehe [1])

Satz. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $a_n > 0$,

$$a_n > R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es bedeute W die Menge aller derjenigen x, welche die Form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \varepsilon_n = 1 \quad \textit{oder} \quad -1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

haben.

Setzen wir voraus, dass $|W| > 0$ *ist* ($|W|$ *bedeutet das Lebesguesche Mass der Menge* W).

Bezeichnen wir mit $f(n, x)$ *die Anzahl der Zahlen* 1 *in der (endlichen) Folge* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \ldots, \varepsilon_n$ $\left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\right)$.

Behauptung. Für fast alle $x \in W$ *(im Sinne des Lebesgueschen Masses) gilt*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\left| f(n, x) - \frac{n}{2} \right|}{\sqrt{n \log \log n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dieser Satz ist die Verschärfung eines früheren Ergebnisses des Verfassers (siehe [2]).