Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

REFERÁTY

ROZŠÍŘENÍ ADITIVNÍCH A ISOTONNÍCH FUNKCIONÁLŮ NA ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH GRUPÁCH

(Referát přednesený v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 4. dubna 1960 v Brně)

Je-li $(G \leqq)$ abelovská částečně uspořádaná grupa (stručně: *po*-grupa; pod grupou budeme dále rozumět abelovskou grupu), pak pod funkcionálem F na G budeme rozumět reálnou funkci, definovanou na množině G. F je aditivní na G, platí-li $a, b \in G \Rightarrow F(a + b) = F(a) + F(b)$ a isotonní na $(G \leqq)$, je-li $F(a) \geqq 0$ pro všechna $a \in G$, $a \geqq 0$. Pod $(G \prec)$ budeme rozumět *po*-grupu, jejíž částečné uspořádání $\prec$ je jemnější než částečné uspořádání $\leqq$, tj. pro něž platí $a \in G$, $a \geqq 0 \Rightarrow a \succ 0$. Je-li H podgrupa *po*-grupy $(G \leqq)$, f aditivní a isotonní funkcionál (*ai*-funkcionál) na $(H \leqq)$, pak *ai*-funkcionál F na $(G \leqq)$ nazveme aditivním a isotonním rozšířením (*ai*-rozšířením) na $(G \leqq)$ funkcionálu f, jestliže platí $F(a) = f(a)$ pro všechna $a \in H$.

Cílem práce je řešení následující otázky: Je-li $y \in G$, Φ množina všech *ai*-rozšíření na $(G \leqq)$ *ai*-funkcionálu f, jest nalézti množinu hodnot $F(y)$ všech $F \in \Phi$, a řešení několika otázek příbuzných, týkajících se jednoznačnosti *ai*-rozšíření. Otázky podobného druhu pro částečně uspořádané vektorové prostory byly řešeny v práci W. Nef, *Über die Fortsetzung monotoner Linearformen*, Math. Zeitschr. *66* (1956), 129—142.

Všude v dalším používáme zavedených označení a předpokladu $f \neq 0$.

Věta. *Tehdy a jen tehdy existuje ai-rozšíření na $(G \leqq)$ funkcionálu f, jestliže na G existuje částečné uspořádání $\prec$ jemnější než $\leqq$ s vlastnostmi: 1. f je isotonní na $(H \prec)$, 2. pro libovolné $y \in G$ existují prvky $x, z \in H$ a přirozené číslo n tak, že platí $x \succ ny \succ z$.*

Množinu všech částečných uspořádání $\prec$, splňujících podmínky předešlé věty označíme Q. Je-li $y \in G$, $\prec$ částečné uspořádání grupy G, rozumějme pod $R(y, \prec)$ resp. $S(y, \prec)$ množinu všech reálných čísel ϱ resp. σ takových, že platí $\varrho \geqq \frac{1}{n} f(x)$ resp. $\sigma \leqq \frac{1}{n} f(x)$ pro vhodně zvolený prvek $x \in H$ a pro vhodně zvolené přirozené číslo n s vlastností $x \succ ny$ resp. $x \prec ny$. Označme $r(y, \prec) = \inf R(y, \prec)$, $s(y, \prec) = \sup S(y, \prec)$. Označme dále $r(y) = \sup\limits_{\prec \in Q} r(y, \prec)$, $s(y) = \inf\limits_{\prec \in Q} s(y, \prec)$.

Věta. *Budiž $Q \neq \emptyset$. Pro libovolné $y \in G$ a libovolné ai-rozšíření F na $(G \leqq)$ funkcionálu f platí $s(y) \leqq F(y) \leqq r(y)$.*

Pro libovolné $y \in G$ a libovolné (konečné) reálné číslo η, $s(y) < \eta < r(y)$, existuje ai-rozšíření F na $(G \leqq)$ funkcionálu f tak, že platí $F(y) = \eta$.

Věta. *Je-li $Q \neq \emptyset$, pak množina M všech prvků $y \in G$, pro něž platí $-\infty < s(y) = r(y) < \infty$, je podgrupa v G, $H \subset M \subset G$. Funkcionál F, definovaný na M rovnicí $F(y) = s(y)$, je jednoznačně určené ai-rozšíření na $(M \leqq)$ funkcionálu f. K libovolnému prvku $z \in G$, z non $\in M$, existují ai-rozšíření F_1, F_2 na $(G \leqq)$ funkcionálu f taková, že platí $F_1(z) \neq F_2(z)$.*

Věta. *Tehdy a jen tehdy existuje přesně jedno ai-rozšíření na* $(G \leqq)$ *ai-funkcionálu* f, *když existuje částečné uspořádání* $\prec$ *na* G, *jemnější než* $\leqq$, *když* f *je isotonní na* $(H \prec)$ *a když k libovolnému takovému částečnému uspořádání a k libovolnému reálnému číslu* $\varepsilon > 0$ *existují prvky* $x, z \in H$ *a přirozené číslo* n *tak, že platí* $x \succ ny \succ z, f(x) - f(z) < n\varepsilon$.

Prvek $y \in G$ nazveme jednoznačně ohodnocený nad (H, f), jestliže existuje přesně jedno *ai*-rozšíření na $(\{H, y\} \leqq)$ funkcionálu f (kde $\{H, y\}$ je podgrupa v G, vytvořená podgrupou H a prvkem y).

Věta. *Prvek* $y \in G$ *je jednoznačně ohodnocený nad* (H, f), *když a jen když platí* $-\infty < s(y, \leqq) = r(y, \leqq) < \infty$.

Věta. 1. *Prvky jednoznačně ohodnocené nad* (H, f) *tvoří podgrupu* N, $H \subset N \subset G$.

2. *Na* N *definovaná funkce* $F(y) = s(y, \leqq)$ *je ai-rozšíření na* $(N \leqq)$ *funkcionálu* f.

3. *Je-li* F *(jednoznačně určené) ai-rozšíření na* $(N \leqq)$ *funkcionálu* f *a prvek* $y \in G$ *jednoznačně ohodnocen nad* (N, F), *pak platí* $y \in N$.

F. Šik, Brno