

Karel Svoboda

Poznámka o minimálních plochách s kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 3, 291--299

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117333>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

POZNÁMKA O MINIMÁLNÍCH PLOCHÁCH
S KRUŽNICEMI NORMÁLNÍ KŘIVOSTI KONSTANTNÍHO
POLOMĚRU

KAREL SVOBODA, Brno

(Došlo dne 23. června 1959)

V této práci jsou odvozeny nutné a postačující podmínky k tomu, aby plocha $(2m + 1)$ -rozměrného projektivního prostoru mohla být považována za minimální plochu $(2m + 1)$ -rozměrného prostoru s konstantní křivostí, jejíž indikatrice normální křivosti až do řádu $m - 1$ jsou kružnicemi konstantních poloměrů.

1. V první části obsáhlého pojednání [2], věnovaného teorii normální křivosti plochy v n -rozměrném prostoru S_n ($n \geq 4$) s konstantní křivostí c , studoval prof. O. BORŮVKA existenční otázky a základní vlastnosti ploch, jejichž indikatrice normální křivosti řádu $1, 2, \dots, m - 1$ ($2 \leq m \leq [\frac{1}{2}n]$) jsou v každém bodě M plochy kružnicemi se středy v tomto bodě. Tyto plochy jsou při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše definovány soustavou diferenciálních rovnic

$$(1) \quad \begin{aligned} dM &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \omega_n \mathbf{e}_n, \\ d\mathbf{e}_i &= -c\omega_i M + \omega_{i1} \mathbf{e}_1 + \omega_{i2} \mathbf{e}_2 + \dots + \omega_{in} \mathbf{e}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

pro jejíž koeficienty ω platí kromě rovnic $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) vztahy

$$(2) \quad \begin{aligned} \omega_3 &= \omega_4 = \dots = \omega_n = 0, \\ \omega_{2k-1, 2k+1} + i\omega_{2k, 2k+1} &= R_k(\omega_1 - i\omega_2), \\ \omega_{2k-1, 2k+1} - i\omega_{2k, 2k+1} &= R_k(\omega_1 + i\omega_2), \\ \omega_{2k-1, 2k+2} + i\omega_{2k, 2k+2} &= iR_k(\omega_1 - i\omega_2), \\ \omega_{2k-1, 2k+2} - i\omega_{2k, 2k+2} &= -iR_k(\omega_1 + i\omega_2), \\ \omega_{2k-1, 2k+3} &= \omega_{2k-1, 2k+4} = \dots = \omega_{2k-1, n} = 0, \\ \omega_{2k, 2k+3} &= \omega_{2k, 2k+4} = \dots = \omega_{2k, n} = 0 \\ (i &= +\sqrt{-1}; k = 1, 2, \dots, m - 1; R_k > 0), \end{aligned}$$

z nichž je třeba vypustiti rovnice vzniklé z rovnic napsaných v posledních dvou

řádcích pro $k = m - 1$, jestliže $2m = n$. Podmínky integrability soustavy (2) jsou vyjádřeny relacemi

$$(3) \quad \left[(\omega_1 - i\omega_2) \left(\frac{dR_k}{R_k} + i \cdot \overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}} \right) \right] = 0,$$

$$\left[(\omega_1 + i\omega_2) \left(\frac{dR_k}{R_k} - i \cdot \overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}} \right) \right] = 0,$$

$$[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})] = 0,$$

$$[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})] = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, m - 1; j = 2m + 1, 2m + 2, \dots, n),$$

z nichž je třeba vynechati rovnice napsané v posledních dvou řádcích, jestliže $2m = n$.

V závěru výše zmíněné první části pojednání [2] jest obsaženo několik poznámek o uvedených plochách v případě, že jejich kružnice normální křivosti řádu $1, 2, \dots, m - 1$ mají v každém bodě plochy konstantní poloměry. Pro $2m = n$ jsou tyto plochy podrobně studovány v pojednání [3], a to jak z hlediska metrického, tak i projektivního; v dalším se proto nebudeme tímto případem blíže zabývat. Zjištění existence uvažovaných ploch v obecném případě $2m < n$ vede k příliš dlouhým a obtížným výpočtům a nebylo proto v citované práci [2] provedeno. Výjimku zde tvoří nejjednodušší případ $2m + 1 = n$, o němž bylo pro $m = 2$ podrobně pojednáno v práci [1].

Úkolem tohoto pojednání jest ukázat, že charakteristické projektivní vlastnosti ploch pětirozměrného prostoru, studovaných ve zmíněné práci [1], lze bez obtíží rozšířit na prostor s konstantní křivostí libovolné liché dimense.

2. V dalších úvahách se budeme zabývatí plochami M prostoru S_{2m+1} s konstantní křivostí c , jejichž indikatrice normální křivosti řádu $1, 2, \dots, m - 1$ jsou v každém bodě M plochy kružnicemi se středy v bodě M a s konstantními poloměry.

Podle označení užitého v pojednání [2] je $R_1 R_2 \dots R_k$ ($k = 1, 2, \dots, m - 1$) poloměr kružnice normální křivosti řádu k a předcházející předpoklad o těchto poloměrech je tedy totožný s požadavkem, aby všechny funkce R_k uvedené v (2) byly konstantní. Vzhledem k tomuto předpokladu dostaneme z vnějších relací (3) rovnice, které lze po jednoduché úpravě psáti ve tvaru

$$(4) \quad \omega_{2k+1,2k+2} = (k + 1) \omega_{12} \quad (k = 1, 2, \dots, m - 1),$$

$$\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1} = A(\omega_1 - i\omega_2),$$

$$\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1} = B(\omega_1 + i\omega_2),$$

kde A, B jsou funkce parametrů, na nichž závisí volba reperu přiřazeného k ploše.

Vnějším diferencováním rovnic (4) pak obdržíme po úpravě vztahy

$$(5) \quad R_k^2 = \frac{1}{2} k(k+1) R_1^2 - \frac{1}{2} (k-1)(k+2) \frac{c}{2},$$

$$AB = m(m+1) R_1^2 - (m-1)(m+2) \frac{c}{2},$$

$$[(\omega_1 - i\omega_2)(dA + i\overline{m+1} A\omega_{12})] = 0,$$

$$[(\omega_1 + i\omega_2)(dB - i\overline{m+1} B\omega_{12})] = 0,$$

kteří jsou podmínkami integrability soustavy diferenciálních rovnic (2), (4), jimiž jsou analyticky definovány uvažované plochy \mathbf{M} . Odtud je patrné, že je třeba — podobně jako v případě $m = 2$ uvažovaném v práci [1] — rozlišiti dvě možnosti podle toho, zda obě funkce A, B jsou různé od nuly nebo zda právě jedna z nich jest identicky rovna nule; vzhledem k souměrnosti příslušných vztahů budeme v dalším předpokládati $A = 0, B \neq 0$. Příklad, že obě funkce A, B by byly identicky rovny nule, by vedl k plochám, které jsou vnořeny do prostoru dimenze menší než $2m + 1$.

Buď nejprve $AB \neq 0$ a označme příslušnou plochu \mathbf{M} v tomto případě \mathbf{M}_1 . Z rovnic (5) pak snadno získáme rovnici

$$(6) \quad \frac{dA}{A} + i(m+1)\omega_{12} = 0,$$

jejíž vnější diferenciál dává relaci

$$(7) \quad 2R_1^2 - c = 0.$$

Podmínky integrability soustavy diferenciálních rovnic určujících uvažované plochy \mathbf{M}_1 jsou tedy vyjádřeny první rovnicí (5) a rovnicí (7). Odtud plyne, že *minimální plochy \mathbf{M}_1 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního polo-měru existují v libovolném $(2m + 1)$ -rozměrném prostoru \mathbf{S}_{2m+1} s kladnou konstantní křivostí a závisí jen na konstantách.*

Z předcházejících vztahů plyne bezprostředně rovnost $R_k^2 = R_1^2 = \frac{c}{2}$ ($k = 1, 2, \dots, m - 1$), kterou je popsána závislost mezi jednotlivými veličinami R_k . Odtud pak vychází pro poloměr kružnice normální křivosti řádu k hodnota R_1^k , jejíž souvislost s křivostí c prostoru \mathbf{S}_{2m+1} je z předchozího zřejmá.

Buď nyní $A = 0, B \neq 0$ a označme příslušnou plochu \mathbf{M} v tomto případě \mathbf{M}_2 . Druhá z rovnic (5) má za tohoto předpokladu tvar

$$(8) \quad m(m+1) R_1^2 - (m-1)(m+2) \frac{c}{2} = 0$$

a z vnějších kvadratických relací (5) zůstává pouze druhá. Odtud plyne, že *minimální plochy \mathbf{M}_2 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního polo-měru existují v libovolném $(2m + 1)$ -rozměrném prostoru \mathbf{S}_{2m+1} s kladnou konstantní křivostí a závisí na jedné funkci jedné proměnné.*

Rovnicí (8) a první rovnicí (5) jsou v tomto případě vyjádřeny vztahy mezi veličinami R_k a křivostí c prostoru S_{2m+1} .

3. V dalších úvahách odvodíme charakteristické projektivní vlastnosti uvažovaných ploch M užitím výsledků a označení uvedených v pojednání [4]. Zvláště připomeňme, že P_{2m+1} je projektivní rozšíření prostoru S_{2m+1} , jehož absolutní kvadrikou je regulární kvadratická nadplocha A o rovnici $\frac{1}{c}x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$. Zavedme dále označení $E_k = e_{2k-1} + ie_{2k}$, $E_{-k} = e_{2k-1} - ie_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots, m$), $\Omega_1 = \omega_1 + i\omega_2$, $\Omega_{-1} = \omega_1 - i\omega_2$, pomocí něhož lze soustavu rovnic (1) s koeficienty danými v (2) nahraditi soustavou

$$\begin{aligned}
 (9) \quad dM &= \frac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \frac{1}{2}\Omega_1E_{-1}, \\
 dE_1 &= -c\Omega_1M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2, \\
 dE_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1E_{-2}, \\
 dE_k &= -R_{k-1}\Omega_1E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}, \\
 dE_{-k} &= -R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1E_{-(k+1)}, \\
 dE_m &= -R_{m-1}\Omega_1E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + (\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})e_{2m+1}, \\
 dE_{-m} &= -R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + (\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})e_{2m+1}, \\
 de_{2m+1} &= -\frac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})E_m - \frac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})E_{-m} \\
 &\quad (k = 2, 3, \dots, m-1).
 \end{aligned}$$

V této soustavě není vzhledem k pozdějším úvahám dosazeno podle (4).

4. Všimneme si nejprve ploch M_1 s $m-1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru a dokážeme následující větu, která popisuje jejich charakteristické vlastnosti:

Věta 1. *Plocha $(2m+1)$ -rozměrného projektivního prostoru P_{2m+1} může být definována jako minimální plocha M_1 s $m-1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru, vnořená do $(2m+1)$ -rozměrného neeukleidovského prostoru S_{2m+1} , tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť mající tyto vlastnosti: 1° Jest autopolární vzhledem k regulární kvadrice A prostoru P_{2m+1} a periodická s periodou $2(m+1)$; 2° Má oba invarianty stejné a konstantní.*

Důkaz. Ve větě 3.3 z pojednání [4] bylo dokázáno, že existence sdružené sítě s vlastností 1° na ploše projektivního prostoru P_{2m+1} je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby plocha prostoru P_{2m+1} mohla být považována za minimální plochu M_1 s $m-1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do neeukleidovského prostoru S_{2m+1} . Příslušná sdružená síť je tvořena křivkami, které jsou v neeukleidovské metrice určené kvadrikou A minimálními křivkami na uvažované ploše. Poznamenejme, že uvedené vlastnosti plochy prostoru P_{2m+1} lze analyticky vyjádřiti při vhodné volbě pohyblivého reperu soustavou diferenciálních rovnic (9) s podmínkami integrability (3), při čemž funkce A, B v (4) nejsou současně rovny nule a křivky sdružené sítě jsou určeny dife-

renciální rovnici $\Omega_1 \Omega_{-1} = 0$. K dokončení důkazu předcházející věty stačí tedy ukázat, že vlastnost 2° je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby všechny uvažované kružnice normální křivosti plochy M_1 měly v příslušné neeukleidovské metrice konstantní poloměry.

Ukážeme nejprve, že sdružená síť minimálních křivek na ploše M_1 prostoru S_{2m+1} má oba invarianty stejné a konstantní. Na základě rovnic (5) lze pro jednoduchost položit $A = 1$ a z (6) pak vychází $\omega_{12} = 0$. Odtud plyne vzhledem k rovnicím struktury prostoru S_{2m+1} , že Ω_1 a Ω_{-1} jsou úplnými diferenciály, a můžeme proto položit $\Omega_1 = du$, $\Omega_{-1} = dv$. Ze soustavy (9) pak vychází $M_{uv} = -\frac{1}{2}cM$ a odtud pro invarianty uvažované sítě plyne $h = k = -\frac{1}{2}c$. Síť minimálních křivek na ploše M_1 má tedy skutečně oba invarianty stejné a konstantní.

Předpokládejme naopak, že sdružená síť křivek $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ na ploše, určené v projektivním prostoru P_{2m+1} soustavou diferenciálních rovnic (9), má oba invarianty stejné a konstantní. Položíme-li $\Omega_1 = e^p du$, $\Omega_{-1} = e^q dv$, obdržíme snadno z rovnic struktury $i\omega_{12} = q_u du - p_v dv$ a ze soustavy (9) odvodíme rovnici $M_{uv} = -\frac{1}{2}ce^{p+q}M$, z níž získáme pro uvažované invarianty hodnoty $h = k = -\frac{1}{2}ce^{p+q}$. Z rovnic struktury užitých na formu ω_{12} obdržíme po jednoduchém výpočtu

$$(10) \quad (p + q)_{uv} = \frac{1}{2}(2R_1^2 - c) e^{p+q}.$$

Poněvadž invarianty h, k jsou konstantní, je také $p + q$ konstantní a to nastane podle (10) právě tehdy, když $2R_1^2 - c = 0$. Je tedy R_1 konstantní a odtud na základě rovnic (3) postupně odvodíme, že všechny veličiny R_k vyskytující se v soustavě (9) jsou konstantní. Předcházejícími úvahami je provedena zbývající část důkazu věty 1.

Právě dokázaná věta je přímým rozšířením výsledku odvozeného O. Borůvkou v pojednání [1].

5. Přistoupíme nyní k zjištění charakteristických projektivních vlastností ploch M_2 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru a dokážeme za tím účelem tuto větu:

Věta 2. *Plocha $(2m + 1)$ -rozměrného projektivního prostoru P_{2m+1} může být definována jako minimální plocha M_2 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti konstantního poloměru, vnořená do $(2m + 1)$ -rozměrného neeukleidovského prostoru S_{2m+1} , tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť mající tyto vlastnosti: 1° Jest autopolární vzhledem k regulární kvadrice A prostoru P_{2m+1} , její první, druhé, ..., m -té laplaceovské transformace leží na kvadrice A a její posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v jednom směru po m transformacích Goursatovým způsobem a v druhém směru po $m + 1$ transformacích Laplaceovým způsobem; 2° Křivky, v jejichž směru se příslušná posloupnost ukončí Goursatovým způsobem, jsou racionální normální křivky vnořené do lineárních podprostorů dimenze m projektivního prostoru P_{2m+1} .*

Důkaz. Při důkazu této věty vyjdeme z výsledku odvozeného ve větě 3.5 z pojednání [4], kde jest ukázáno, že existence sdružené sítě s vlastností 1° na ploše projektivního prostoru P_{2m+1} je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby plocha prostoru P_{2m+1} mohla býti považována za minimální plochu M_2 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do neeuclidovského prostoru S_{2m+1} . Uvedené vlastnosti jsou analyticky vyjádřeny při vhodné volbě pohyblivého reperu soustavou diferenciálních rovnic (9) s podmínkami integrability (3), při čemž právě jedna z funkcí A, B v (4) je rovna nule; v dalším se opět omezíme na dříve uvažovaný případ $A = 0, B \neq 0$. Podobně jako v předcházejícím případě jsou křivky uvedené sdružené sítě dány rovnicí $\Omega_1 \Omega_{-1} = 0$ a v neeuclidovské metrice určené kvadrikou A jsou minimálními křivkami na uvažované ploše. K dokončení důkazu předcházející věty je tedy třeba dokázati, že vlastnost 2° je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby poloměry všech kružnic normální křivosti plochy M_2 byly v příslušné neeuclidovské metrice konstantní.

Dokážeme nejprve, že křivky $\Omega_1 = 0$, v jejichž směru se posloupnost laplaceovských transformací sítě minimálních křivek na ploše M_2 ukončí Goursatovým způsobem, jsou racionální normální křivky lineárních podprostorů dimense m . Vzhledem k předpokladu $A = 0, B \neq 0$ a vzhledem k poslední rovnici (5) lze bez újmy na obecnosti položit $B = 1$, takže forma ω_{12} je lineárně závislá na Ω_1 . Podél libovolné křivky soustavy $\Omega_1 = 0$ na uvažované ploše je tedy $\omega_{12} = 0$ a z rovnic struktury pak vyplývá, že podél této křivky je Ω_{-1} úplným diferenciálem. Každá z uvažovaných křivek jest určena soustavou diferenciálních rovnic (9), v níž je třeba podle (4) dosaditi $\Omega_1 = 0, \omega_{2k-1, 2k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$), $\omega_{2m-1, 2m+1} \pm i\omega_{2m, 2m+1} = 0$. Položíme-li ještě $\Omega_{-1} = dv$ a označíme-li čárkou derivace podle v , dostaneme tím zvláště soustavu diferenciálních rovnic

$$(11) \quad M' = \frac{1}{2}E_1, \quad E'_k = R_k E_{k+1}, \quad E'_m = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1),$$

z níž se bezprostředně zjistí, že uvažovaná křivka je vnořena do lineárního podprostoru dimense m vnořeného do projektivního rozšíření P_{2m+1} prostoru S_{2m+1} . Ze soustavy (11) vychází dále diferenciální rovnice $M^{(m+1)} = 0$, jejímž obecným integrálem je polynom stupně m v proměnné v tvaru $M = C_0 + C_1 v + \dots + C_m v^m$. Odtud je patrné, že uvažovaná křivka $\Omega_1 = 0$ na ploše M_2 je racionální normální křivka stupně m .

Předpokládejme naopak, že křivky $\Omega_1 = 0$ na ploše, určené v projektivním prostoru P_{2m+1} soustavou diferenciálních rovnic (9), jsou racionálními normálními křivkami vnořenými do lineárních podprostorů dimense m prostoru P_{2m+1} . Abychom zjednodušili následující výpočty, zavedeme bod E_0 tím, že položíme $M = \frac{1}{2}E_0$. Ze soustavy (9) snadno plyne, že všechny oskulační prostory řádu alespoň m libovolné z uvažovaných křivek mají dimensi m a že tedy tyto křivky jsou vnořeny do lineárních podprostorů dimense m prostoru P_{2m+1} .

Pohybuje-li se bod E_0 po určité křivce soustavy $\Omega_1 = 0$, je podle (4) a (9)

$$(12) \quad \begin{aligned} dE_k &= -i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}, \\ dE_m &= -i\omega_{2m-1,2m}E_m \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \end{aligned}$$

a odtud plyne, že bod E_m nemění svou polohu a že prostor $[E_1E_2 \dots E_m]$ je pevný. Přiřadíme ke každé přímce $[E_0E_m]$ pohyblivý reper tvořený přímkami $[E_jE_m]$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) procházejícími pevným bodem E_m a ležícími v pevném prostoru $[E_1E_2 \dots E_m]$. Užijeme-li soustavy diferenciálních rovnic (9) s $\Omega_1 = 0$, dostaneme po jednoduchém výpočtu

$$(13) \quad \begin{aligned} d[E_0E_m] &= -i\omega_{2m-1,2m}[E_0E_m] + \Omega_{-1}[E_1E_m], \\ d[E_{k-1}E_m] &= -i(\omega_{2k-3,2k-2} + \omega_{2m-1,2m})[E_{k-1}E_m] + R_{k-1}\Omega_{-1}[E_kE_m], \\ d[E_{m-1}E_m] &= -i(\omega_{2m-3,2m-2} + \omega_{2m-1,2m})[E_{m-1}E_m] \quad (k = 2, 3, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Poněvadž uvažovaná křivka je racionální normální křivkou stupně m , je příbuznost mezi body E_1 ležícími na tečnách křivky v bodech E_0 a přímkami $[E_0E_m]$ projektivitou. Abychom našli analytické podmínky pro to, aby příbuznost mezi body E_1 a přímkami $[E_0E_m]$ byla projektivitou, přepíšme předcházející dvě soustavy diferenciálních rovnic tím, že místo bodu E_j ($j = 2, 3, \dots, m$) zavedeme bod $\frac{1}{R_1R_2 \dots R_{j-1}}E_j$. Po jednoduchém výpočtu dostaneme ze soustavy diferenciálních rovnic (12) ekvivalentní soustavu tvaru

$$\begin{aligned} dE_1 &= -i\omega_{12}E_1 + \Omega_{-1}E_2, \\ dE_k &= \left(\frac{dR_1}{R_1} + \dots + \frac{dR_{k-1}}{R_{k-1}} - i\omega_{2k-1,2k} \right) E_k + \Omega_{-1}E_{k+1}, \\ dE_m &= \left(\frac{dR_1}{R_1} + \dots + \frac{dR_{m-1}}{R_{m-1}} - i\omega_{2m-1,2m} \right) E_m \quad (k = 2, 3, \dots, m-1) \end{aligned}$$

a soustavu diferenciálních rovnic (13) nahradíme soustavou

$$\begin{aligned} d[E_0E_m] &= -i\omega_{2m-1,2m}[E_0E_m] + \Omega_{-1}[E_1E_m], \\ d[E_1E_m] &= -i(\omega_{12} + \omega_{2m-1,2m})[E_1E_m] + \Omega_{-1}[E_2E_m], \\ d[E_{k-1}E_m] &= \left(\frac{dR_1}{R_1} + \dots + \frac{dR_{k-2}}{R_{k-2}} - i \cdot \frac{\omega_{2k-3,2k-2} + \omega_{2m-1,2m}}{\omega_{2k-3,2k-2} + \omega_{2m-1,2m}} \right) [E_{k-1}E_m] + \\ &\quad + \Omega_{-1}[E_kE_m], \\ d[E_{m-1}E_m] &= \left(\frac{dR_1}{R_1} + \dots + \frac{dR_{m-2}}{R_{m-2}} - i \cdot \frac{\omega_{2m-3,2m-2} + \omega_{2m-1,2m}}{\omega_{2m-3,2m-2} + \omega_{2m-1,2m}} \right) [E_{m-1}E_m] \\ &\quad (k = 3, 4, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Z předcházejících dvou soustav plyne, že uvažovaná příbuznost je projektivitou tehdy a jen tehdy, když

$$(14) \quad \frac{dR_k}{R_k} + i(\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1).$$

Z tvaru těchto rovnic plyne, že jejich vnějším diferencováním dostaneme tytéž vztahy jako vnějším diferencováním soustavy rovnic $\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m - 1$), která je však ekvivalentní se soustavou rovnic napsaných v prvním řádku (4). Odtud plyne, že z rovnic (14) získáme vnějším diferencováním první dvě rovnice (5), v nichž $A = 0$, a že tedy všechny veličiny R_k ($k = 1, 2, \dots, m - 1$) jsou konstantní. Předcházejícími úvahami je dokončen důkaz věty 2.

Dokázaná věta je rozšířením výsledku odvozeného O. Borůvkou v pojednání [1].

6. Postupu důkazu předcházející věty lze použítí také v případě ploch, které jsou definovány soustavou (9) za předpokladu, že obě funkce A, B v (4) jsou současně rovny nule. Tyto plochy jsou vnořeny do prostoru S_{2m} dimenze $2m$ a byly v předcházejících úvahách vyloučeny. Pro tyto plochy se příslušná posloupnost laplaceovských transformací sdružené sítě ukončí v obou směrech po m transformacích Goursatovým způsobem a všechny křivky tvořící sdruženou síť na ploše jsou racionálními normálními křivkami vnořeny do m -rozměrných prostorů.

Literatura

- [1] O. Borůvka: Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university 106, 1928.
- [2] O. Borůvka: Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university I, 165, 1932; II, 212, 1935; III, 214, 1935.
- [3] O. Borůvka: Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce. Journal de mathématiques pures et appliquées 12, 1933, 337—333.
- [4] K. Svoboda: Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivostí. Časopis pro pěstování matematiky 83, 1958, 287—316.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ОКРУЖНОСТЯМИ НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПОСТОЯННОГО РАДИУСА

КАРЕЛ СВОБОДА (Karel Svoboda), Брно

В настоящей работе изучаются минимальные поверхности M с $m - 1$ окружностями нормальной кривизны постоянных радиусов, погруженные в $(2m + 1)$ -мерное пространство S_{2m+1} постоянной кривизны. Эти поверхности определены системой дифференциальных уравнений (9), ко-

эффициенты которой выполняют соотношения (4). Поверхность M обозначена через M_1 или через M_2 смотря по тому, отличны ли обе функции A, B в (4) от нуля или равна ли именно одна из них тождественно нулю.

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность проективного пространства P_{2m+1} могла быть определена как минимальная поверхность с $m - 1$ окружностями нормальной кривизны неевклидова пространства S_{2m+1} , содержатся в теоремах, доказанных в работе [4]. Для того, чтобы радиусы окружностей нормальной кривизны поверхности M были постоянными, необходимо и достаточно, чтобы — в случае поверхности M_1 — инварианты сопряженной сети, образованной минимальными кривыми, были одинаковы и постоянны, или чтобы — в случае поверхности M_2 — кривые, в направлении которых последовательность преобразований Лапласа сопряженной сети, образованной минимальными кривыми, окончена по способу Гурсата, были рациональными нормальными кривыми линейных пространств размерности m .

Résumé

REMARQUE SUR LES SURFACES MINIMA A CIRCONFÉRENCES DE COURBURE NORMALE DE RAYON CONSTANT

KAREL SVOBODA, Brno

Dans ce Mémoire, on étudie les surfaces minima M à $m - 1$ circonférences de courbure normale de rayons constants qui se trouvent plongées dans un espace S_{2m+1} à $2m + 1$ dimensions à courbure constante. Ces surfaces sont déterminées par le système d'équations différentielles (9) dont les coefficients satisfont aux relations (4). On désigne la surface M par M_1 ou bien M_2 suivant que les deux fonctions A, B dans (4) sont différentes de zéro ou bien précisément une de ces fonctions s'annule identiquement.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de l'espace projectif P_{2m+1} puisse être définie comme une surface minimum à $m - 1$ circonférences de courbure normale d'un espace non-euclidien S_{2m+1} sont fournies par les théorèmes démontrés dans le Mémoire [4]. Pour que les rayons des circonférences de courbure normale d'une surface M soient constants, il faut et il suffit que — dans le cas d'une surface M_1 — les invariants du réseau conjugué formé par les courbes minima soient égaux et constants, ou bien que — dans le cas d'une surface M_2 — les courbes, dans le sens desquelles la suite des transformations laplaciennes du réseau conjugué formé par les courbes minima s'arrête de la manière de Goursat, soient des courbes rationnelles normales d'un sous-espace linéaire à m dimensions.