Ladislav Drs
Centrální axonometrie v n-rozměrném prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 3, 274--290

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117332

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE V n-ROZMĚRNÉM PROSTORU

LADISLAV DRS, Praha

(Došlo dne 26. května 1959)

V článku se vyšetřují vlastnosti axonometrických soustav, tj. vlastnosti středového průmětu souřadnicové soustavy do vlastní nadroviny. Na základě těchto vlastností se pak uvádějí konstrukce axonometrických soustav.

I. ÚVOD

Definice 1. *Souřadnicová soustava v* $\mathbf{P}^n$ [1]) je uspořádaná skupina n bodových trojic O, A_i, B_i ($0 \neq A_i \neq B_i \neq O$), přičemž body O, A_i, B_i leží na přímce x_i, *rameni* soustavy a ramena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislá. Označíme ji $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$.

Definice 2. Uspořádaná skupina n bodových trojic O', A'_i, B'_i ($O' \neq A'_i \neq B'_i \neq O'$), přičemž body O', A'_i, B'_i leží na přímce x'_i a přímky $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ lineárně vytvářejí vlastní nadrovinu, je *d-konfigurace*, přímky $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ jsou *ramena* této d-konfigurace. Označíme ji $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$.

Definice 3. *Axonometrická soustava* je průmět souřadnicové soustavy z některého bodu, který neleží na žádném rameni soustavy do některé vlastní nadroviny.[2]) *Každá axonometrická soustava je d-konfigurací.*

Vyšetřujme promítání, při němž se souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ s rameny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ promítá do axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{n'} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ s rameny $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Pak volbou reálných čísel $l_1, l_2, \ldots, l_n$ lze k bodu L, který má v souřadnicové soustavě na rameni x_i souřadnici l_i snadno sestrojit jeho průmět L'. Ten má na rameni x'_i souřadnici l_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, neboť sousouřadnice jsou při promítání invariantní.

Budeme se dále zabývat otázkou, kdy je daná d-konfigurace průmětem některé souřadnicové soustavy shodné s danou souřadnicovou soustavou. Důkazy známých vět budeme uvádět jen tam, kde jsou potřebné pro další úvahy.

[1]) $\mathbf{P}^n$ ($n \geqq 3$) je n-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor.

[2]) Mluvíme-li o průmětu, předpokládáme, že střed promítání neleží v průmětně.

Jsou-li v souřadnicové soustavě $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nevlastní, nazveme ji „normalisovanou soustavou".[3])

Věta 1. *Nechť v d-konfiguraci* $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ *jsou* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ *nevlastní body. Pak tato konfigurace je průmětem souřadnicové soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *shodné s danou normalisovanou soustavou* $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^n$ *právě tehdy, když simplexy* $\mathfrak{A}^\cdot = \{A^\cdot_1, A^\cdot_2, \ldots, A^\cdot_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ *jsou podobné.*[4])

Důkaz. Podmínka je nutná. Nechť daná konfigurace $\mathfrak{K}^n$ je průmětem souřadnicové soustavy $\mathfrak{S}^n$ shodné se soustavou $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ z bodu C. Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pak leží v nadrovině $\gamma \parallel \pi$, $C \in \gamma$.[5]) Dále jest $x_i \parallel CB_i$, takže průsečíky A_i, B'_i přímek x_i, CB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, s nadrovinami γ, π jsou vrcholy podobných simplexů $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$; tedy i simplexy $\mathfrak{A}^\cdot$, $\mathfrak{B}'$ jsou podobné.

Podmínka je dostačující. Nechť $\mathfrak{A}^\cdot$, $\mathfrak{B}'$ jsou podobné simplexy. Modul jejich podobnosti budiž m.[6])

K simplexu $\{O^\cdot, A^\cdot_1, A^\cdot_2, \ldots, A^\cdot_n\}$ stanovíme podobný simplex $\{C, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ a tím určíme dvojznačně bod C. Na přímce $O'C$ stanovíme (opět dvojznačně) bod O tak, aby platilo $CO = m \,.\, CO'$. Sestrojíme přímku x_i, $O \in x_i \parallel \parallel CB'_i$, její průsečík s nadrovinou γ, $C \in \gamma \parallel \pi$ označíme A_i, její nevlastní bod B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Simplex $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ je shodný se simplexem $\mathfrak{A}^\cdot = \{A^\cdot_1, A^\cdot_2, \ldots, A^\cdot_n\}$ a souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ takto vzniklá je shodná se soustavou $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ a jejím průmětem z bodu C do nadroviny π je právě $\mathfrak{S}^{n\prime}$.

Definice 4. Jakoukoli část některé d-konfigurace nazveme *částečnou konfigurací.*

Poučka 1. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$[7]) *s nevlastními body* A'_1, A'_2, *a dále normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^n$. *Pak existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ *s nevlastními body* $A'_1, A'_2, \ldots, A_1^n$, *která je průmětem souřadnicové soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *shodné se* $\mathfrak{S}^{n\cdot}$.

Důkaz. a) Budiž $n = 3$. Je-li $x'_1 = O'A'_1 \neq x'_2 = O'A'_2$ určíme v rovině $x'_1x'_2$ simplex $\mathfrak{B}^3 = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobný simplexu $\mathfrak{A}^3 = \{A^\cdot_1, A^\cdot_2, A^\cdot_3\}$. Přímka $O'B'_3 = x'_3$ je určena dvojznačně. Její nevlastní bod budiž A'_3. Pak je $\{O', A'_i, B'_i\}_1^3$ hledaná axonometrická soustava. Je-li $x'_1 = x'_2$, sestrojme simplex $\mathfrak{B}^3$

[3]) V práci [7] tzv. „normalisovaná desarguesovská konfigurace".

[4]) Viz [7] věta 1, [8] věta 8, 2, [12] str. 104.

[5]) π značí pevnou vlastní nadrovinu. Písmeny malé řecké abecedy označujeme nadroviny.

[6]) Modul podobnosti dvou simplexů $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ je m, platí-li pro délky d_1, d_2 odpovídajících si úseček $d_2 = md_1$.

[7]) Zápis znamená, že existuje d-konfigurace $\{O^*, A_i{}^*, B_1^n\}_1{}^n$ tak, že $O^* = O'$, $A_1{}^* = A_1{}'$, $B_1{}^* = B_1{}'$, $A_2{}^* = A_2{}'$, $B_2{}^* = B_2{}'$. Analogicky při dalších zápisech částečných konfigurací.

podobný $\mathfrak{A}^3$ v libovolné rovině $\varrho \supset x_1'$. Vezmeme-li za x_3' libovolnou z přímek vzniklých otáčením přímky $O'B_3'$ kolem x_1' a za A_3' její nevlastní bod, pak je $\{O', A_i', B_i'\}_1^3$ hledaná axonometrická soustava. Bod C simplexu $\{C, B_1', B_2', B_3'\}$ podobného simplexu $\{O^{\cdot}, A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, A_3^{\cdot}\}$ je středem promítání, z něhož se normalisovaná soustava $\{O, A_i, B_i\}_1^3$ shodná se soustavou $\{O^{\cdot}, A_i^{\cdot}, B_i^{\cdot}\}_1^3$ (a jejíž konstrukce je uvedena v důkazu věty 1) promítá do $\{O', A_i', B_i'\}_1^3$.

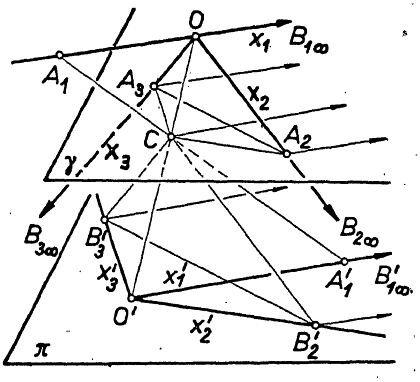
b) Podle a) sestrojíme axonometrickou soustavu $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^3$, střed promítání C a normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^3 = \{O, A_i', B_i'\}_1^3$, promítající se z C do $\mathfrak{S}^{3\prime}$. Soustavu rozšíříme na normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodnou s danou soustavou $\mathfrak{S}^n$. Pak promítneme $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do libovolné nadroviny ϱ, která obsahuje výchozí částečnou konfiguraci $\mathfrak{k}$ a neobsahuje bod C. Průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n$ z bodu C je hledaná axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n \supset \{O', A_i', B_i'\}_1^3$.

Poučku lze dokázat ještě jiným způsobem při němž provádíme konstrukce pouze v prostoru P^{n-1}. Podle a) platí poučka pro $n = 3$. Nechť platí pro $m = n - 1$. Simplex $\{B_1' B_2', \ldots, B_{n-1}'\}$ je podobný simplexu $\{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots, A_{n-1}^{\cdot}\}$. V nadrovině $\pi \supset \{O', A_i', B_i'\}_1^{n-1}$ sestrojíme způsobem, který bude dále uveden, bod B_n' tak, aby simplexy $\{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$, $\{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots, A_n^{\cdot}\}$ byly podobné. Položme $x_n' = O'B_n'$ a dále označme A_n' nevlastní bod přímky x_n'. Pak je konfigurace $\{O', A_i', B_i'\}_1^n$ axonometrickou soustavou. Otáčíme-li v π přímku $B_n'B_{n-1}'$ kolem podprostoru $\langle B_1', B_2', \ldots, B_{n-2}\rangle$, pak vznikne regulus $\mathbf{R}$ kvadratické variety. Body B_{n-1}', B_n' se otáčejí po kružnicích b_{n-1}', b_n'. Každá z povrchových přímek kuželové plochy $\langle O', b_{n-1}'\rangle$ může být vybrána za přímku x_{n-1}'. Protíná-li takto zvolená přímka x_{n-1}' kružnici b_{n-1}' v bodě B_{n-1}', pak přímka regulu $\mathbf{R}$ jdoucí bodem B_{n-1}' protíná kružnici b_n' v bodě B_n', takže $x_n' = O'B_n'$. Tím je určen simplex $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$ podobný simplexu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ a podle věty 1 je vskutku $\{O', A_i', B_i'\}_1^n$ axonometrickou soustavou, která je průmětem určité souřadnicové soustavy $\{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné s $\{O^{\cdot}, A^{\cdot}, B_i^{\cdot}\}_1^n$.

Poučka 2. *Nechť je $2 \leq m < n$. Nechť je dána částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A_i', B_i'\}_1^m$ s nevlastními body $A_1', A_2', \ldots, A_m'$ a normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^{\cdot}, A_i^{\cdot}, B_i^{\cdot}\}_1^n$ taková, že simplexy $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', \ldots, B_m'\}$, $\mathfrak{A}^{\cdot} = \{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots, A_m^{\cdot}\}$ jsou podobné. Pak existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ s nevlastními body $A_1', A_2', \ldots, A_n'$, která je průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$.*

Důkaz. Podle věty 1 existuje střed C a soustava $\mathfrak{S}^m = \{O, A_i, B_i\}_1^m$ shodná se $\mathfrak{S}^{m\cdot} = \{O^{\cdot}, A_i^{\cdot}, B^{\cdot}\}_1^m$ taková, že průmět $\mathfrak{S}^m$ z C do $(m - 1)$-roviny částečné konfigurace $\mathfrak{k}$ je právě $\mathfrak{k}$. Soustavu $\mathfrak{S}^m$ rozšíříme na soustavu $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_{i1}^n\}$ shodnou s danou soustavou $\mathfrak{S}^{n\cdot}$. Promítneme-li $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do libovolné nadroviny ϱ, která obsahuje konfiguraci $\mathfrak{k}$ a neobsahuje bod C, získáme hledanou axonometrickou soustavu $\mathfrak{S}^{n\prime}$.

Poučka 3. *Nechť je dána částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, A'_2, A'_3\}$ s nevlastními body A'_1, A'_2, A'_3, dále normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^{\cdot}, A^{\cdot}_i, B^{\cdot}_i\}_1^n$ a nechť je $\sphericalangle A'_1O'A'_3 \neq \sphericalangle A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2A^{\cdot}_3$. Pak existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ s nevlastními body $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, která je průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$.*



Obr. 1.

Důkaz. a) $n = 3$. Je-li $\sphericalangle A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2A^{\cdot}_3 \neq \sphericalangle A'_1O'A'_3$ a pohybují-li se první dva vrcholy simplexu $\{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobného simplexu $\{A^{\cdot}_1, A^{\cdot}_2, A^{\cdot}_3\}$ v rovině $\langle O', A'_1, A'_2, A'_3\rangle$ po přímkách x'_1, x'_2, pohybuje se třetí vrchol po elipse e se středem O. Průsečíky elipsy e s přímkou x'_3 stanoví dvě polohy trojúhelníka $B'_1B'_2B'_3$ podobného s $A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2A^{\cdot}_3$, majícího vrchol B'_3 na x'_3. Odtud plyne podle věty 1 důkaz.

b) Podle a) sestrojíme axonometrickou soustavu $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, střed promítání C a normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^3 = \{O, A_i, B_i\}_1^3$, která se z C promítá do $\mathfrak{S}^{3\prime}$. Soustavu $\mathfrak{S}^3$ rozšíříme na normalisovanou soustavu $\mathfrak{S}^n$ shodnou se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$. Pak promítneme $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do libovolné nadroviny ϱ, která obsahuje částečnou konfiguraci $\mathfrak{k}$ a neobsahuje bod C. Průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n$ z C je hledaná axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$.

Věta 2. *Nechť je dána d-konfigurace $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ v π s nevlastními body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_k, A'_{k+1}, A'_{k+2}, \ldots, A'_n$, $1 \leq k < n$ a normalisovaná soustava $\mathfrak{S}^{n\cdot} = \{O^{\cdot}, A^{\cdot}_i, B^{\cdot}_i\}_1^n$. Potom je konfigurace $\mathfrak{K}^n$ průmětem souřadnicové soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ právě tehdy, když simplexy $\{B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2}, \ldots, A^{\cdot}_n\}$ a $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ jsou podobné a když dále platí $O^{\cdot}A^{\cdot}_1 : O'A'_1 = O^{\cdot}A^{\cdot}_2 : O'A'_2 = \ldots = O^{\cdot}A^{\cdot}_k : O'A'_k = m$, kde m je modul podobnosti obou simplexů.*

Důkaz. (Obr. 1.) Podmínky jsou nutné. Nechť je $\mathfrak{K}^n$ průmět normalisované soustavy $\mathfrak{S}^n$ shodné se $\mathfrak{S}^{n\cdot}$ z bodu C. Pak z věty 1 plyne, že simplexy $\{B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2}, \ldots, A^{\cdot}_n\}$, $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ jsou podobné. Je-li m modul jejich podobnosti, platí dále $CO : CO' = m$. Protože nevlastním bodům $B_1, B_2, \ldots, B_k$ odpovídají nevlastní body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_k$ platí $x_1 \parallel x'_1$, $x_2 \parallel x'_2, \ldots, x_k \parallel x'_k$ a tedy $OA_1 : O'A'_1 = OA_2 : O'A'_2 = \ldots = OA_k : O'A'_k = CO : CO' = m$,

Podmínky stačí. Nechť simplexy $\{B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2} \ldots, A^{\cdot}_n\}$ a $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ jsou podobné. Pak k simplexu $\{O^{\cdot}, B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, \ldots, B^{\cdot}_k, A^{\cdot}_{k+1}, A^{\cdot}_{k+2}, \ldots, A^{\cdot}_n\}$ stanovíme simplex podobný $\{C, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$. Budiž m modul podobnosti obou simplexů. Bod C zvolme za střed promítání. Na přímce CO' najdeme dvojznačně bod O z podmínky $CO : CO' = m$. Bodem O vedeme přímky

$x_1 = OB'_1$, $x_2 = OB'_2$, ..., $x_k = OB'_k$, $x_{k+1} \parallel CB'_{k+1}$, $x_{k+2} \parallel CB'_{k+2}$, ..., $x_n \parallel CB'_n$. Pak je $x_1 \parallel x'_1$, $x_2 \parallel x'_2$, ..., $x_k \parallel x'_k$. Budiž dále $A_i = x_i \cap \gamma$, $i = k + 1, k + 2, \ldots, n$, kde γ je bodem C vedená nadrovina rovnoběžně s π, B_i budiž nevlastní bod přímky x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zvolme na přímce x_i bod A_i tak, aby $OA_i : O'A'_i = m$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Pak přímka $A_iA'_i$ prochází bodem C, $i = 1, 2, \ldots, k$, a takto určená normalisovaná soustava $\{O, A_i, B_i\}_1^n$ se z bodu C promítá právě do konfigurace $\mathfrak{K}^n$.

Poučka 4. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$ *v* π *s nevlastními body* A'_1, B'_2 *a dále normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{3\cdot} = \{O^{\cdot}, A^{\cdot}_i, B^{\cdot}_i\}_1^3$. *Pak existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$ *s nevlastním bodem* A'_3, *která je průmětem soustavy* $\mathfrak{S}^3 = \{O, A_i, B_i\}_1^3$ *shodné se* $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak určíme v π simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobný simplexu $\{A^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, A^{\cdot}_3\}$ tak, aby modul jejich podobnosti byl $m = O^{\cdot}A^{\cdot}_2 : O'A'_2$. Pak je přímka $O'B'_3$ třetím ramenem a nevlastní bod A'_3 přímky $O'B'_3$ bodem axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, která je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Poučka 5. *Nechť je dána konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$ v π *s nevlastními body a)* A'_1, A'_2, *b)* A'_1, B'_2 *a normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{3\cdot} = \{O^{\cdot}, A^{\cdot}_i, B^{\cdot}_i\}_1^3$. *Pak existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$ *s nevlastním bodem* B'_3, *která je průmětem soustavy shodné se* $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak určíme v rovině π simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobný simplexu a) $\{A^{\cdot}_1, A^{\cdot}_2, B^{\cdot}_3\}$, b) $\{B^{\cdot}_1, B^{\cdot}_2, A^{\cdot}_3\}$. Pak přímka $O'B'_3$ je třetím ramenem axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, jejíž bod A'_3 určíme z podmínky a) $O^{\cdot}A^{\cdot}_3 : O'A'_3 = A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2 : B'_1B'_2$, b) $O^{\cdot}A^{\cdot}_2 : O'A'_2 = O'A^{\cdot}_3 : O'A'_3$, a která je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Poučka 6. *Nechť je dána konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$ *v* π *s nevlastními body* A'_1, A'_2 *a normalisovaná souřadnicová soustava* $\mathfrak{S}^{4}: = \{O^{\cdot}, A^{\cdot}_i, B^{\cdot}_i\}_1^4$. *Pak v prostoru* π *existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{4\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^4$ *s nevlastními body a)* A'_3, B'_4, *b)* B'_3, B'_4, *která je průmětem soustavy shodné se soustavou* $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak určíme v π simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3, B'_4\}$ podobný simplexu a) $\{A^{\cdot}_1, A^{\cdot}_2, A^{\cdot}_3, A^{\cdot}_4\}$, b) $\{A^{\cdot}_1, A^{\cdot}_2, B^{\cdot}_3, B^{\cdot}_4\}$ tak, aby modul podobnosti těchto simplexů byl $m = A^{\cdot}_1A^{\cdot}_2 : B'_1B'_2$. Při každé poloze bodů B'_3, B'_4 vzniklé otáčením simplexu $\mathfrak{B}'$ v π kolem $B'_1B'_2$ mohou být přímky $O'B'_3$, $O'B'_4$ vzaty za ramena x'_3, x'_4 axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^4$ v níž jsou body A'_3, A'_4 určeny takto:

a) A'_3 je nevlastní bod přímky x'_3, $O^{\cdot}A^{\cdot}_4 : O'A'_4 = m$,

b) $O^{\cdot}A^{\cdot}_3 : O'A'_3 = O^{\cdot}A^{\cdot}_4 : O'A'_4 = m$.

Tato axonometrická soustava je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Poučka 7. *Nechť je dána konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2\}$ *v* π *s nevlastními body* A'_1, B'_2 *a normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{4\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^4$. *Pak existuje v prostoru* π *axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{4\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^4$ *s nevlastními body a)* A'_3, A'_4, *b)* B'_3, A'_4, *c)* B'_3, B'_4, *která je průmětem soustavy shodné se* $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. Pak v π určíme simplex $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3, B'_4\}$ podobný simplexu a) $\{A^\cdot_1, B^\cdot_2, A^\cdot_3, A^\cdot_4\}$, b) $\{A^\cdot_1, B^\cdot_2, B^\cdot_3, A^\cdot_4\}$, c) $\{A^\cdot_1, B^\cdot_2, B^\cdot_3, B^\cdot_4\}$ tak, aby modul podobnosti obou simplexů byl $m = O^\cdot A^\cdot_2 : O'A'_2$. Podle poučky 6 zvolíme ramena x'_3, x'_4 axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^4$, v níž jsme body A'_3, A'_4 určili takto:

a) A'_3, A'_4 jsou nevlastní body přímek x'_3, x'_4,

b) $O^\cdot A^\cdot_3 : O'A'_3 = m$, A'_4 je nevlastní bod přímky x'_4,

c) $O^\cdot A^\cdot_3 : O'A'_3 = O^\cdot A^\cdot_4 : O'A'_4 = m$.

Tato axonometrická soustava je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^{4\cdot}$.

Poučka 8. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, B'_1, A'_2, A'_3\}$ *v rovině* π *s nevlastními body* B'_1, A'_2, A'_3 *a normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^{3\cdot} = \{O^\cdot, A^\cdot_i, B^\cdot_i\}_1^3$. *Pak existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, *která je průmětem soustavy shodné se* $\mathfrak{S}^{3\cdot}$.

Důkaz. Nechť platí předpoklady poučky. V π sestrojíme simplex $\{B'_1, B'_2, B'_3\}$ podobný simplexu $\{B^\cdot_1, A^\cdot_2, A^\cdot_3\}$ tak, aby modul jejich podobnosti byl $m = O^\cdot A^\cdot_1 : O'A'_1$ a aby jeho body B'_2, B'_3 ležely na přímkách $O'A'_2$, $O'A'_3$. Je-li $\overline{B}$ určen z podmínek $\sphericalangle B'_1O'\overline{B} = \sphericalangle B^\cdot_1A^\cdot_2A^\cdot_3$, $A^\cdot_2A^\cdot_3 : O'\overline{B} = O^\cdot A^\cdot_1 : O'A'_1 = m$, pak přímka vedená bodem $\overline{B}$ rovnoběžně s $O'A'_2$ protne $O'A'_3$ v B'_3; tím je určena poloha simplexu $\{B'_1, B'_2, B'_3\}$ a tím i axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{3\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^3$, která je průmětem soustavy shodné se $\mathfrak{S}^3$.

Normalisovanou soustavu s navzájem kolmými rameny nazveme *orthogonální soustavou.*

Věta 3. *Axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ *v* π *s nevlastními body* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ *je průmětem orthogonální soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *tehdy, když orthogonální průmět* C^0 *středu promítání* C *do* π *je orthocentrem simplexu* $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$.

Důkaz. Nechť průmětem orthogonální soustavy $\mathfrak{S}^n$ z bodu C do π je axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime}$. Protože je $CB'_i \parallel x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, je n-hran $\langle CB'_1, CB'_2, \ldots, CB'_n\rangle$ pravoúhlý a bod C se promítá kolmo do π do orthocentra simplexu $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$.

Platí-li v normalisované soustavě $OA_i = a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nazveme ji *rovnoramennou soustavou.*

Věta 4. *Axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ *v* π *s nevlastními body* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ *je průmětem rovnoramenné soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *právě tehdy, když orthogonální průmět* C^0 *středu promítání* C *je střed hypersféry v* π, *určené body* $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$.

Důkaz. Nechť je axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime}$ průmětem rovnoramenné soustavy $\mathfrak{S}^n$, při promítání z C do π. Protože je $OA_i = a$, $x_i \parallel CB'_i$, $CA_i \parallel x'_i$ je též $CB'_i = m \,.\, a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde m je modul podobnosti simplexů $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$. Je-li tedy C střed hypersféry o poloměru $m \,.\, a$, pak její průnik, s nadrovinou π je hypersféra v π (procházející body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$), jejíž střed je orthogonální průmět bodu C do π.

Nechť je C střed promítání a $\mathfrak{S}^n$ souřadnicová soustava, promítající se z C do $\mathfrak{S}^{n\prime}$. Nechť je dále orthogonální průmět C^0 bodu C do π střed hypersféry v π, určené body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$. Pak platí $CB'_i = k$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Protože je $CA_i \parallel x'_i$, $CB'_i \parallel x_i$, je $OA_i = k \,.\, OC : O'C = k : m = a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tj. soustava $\mathfrak{S}^n$ je rovnoramenná.

Věta 5. *Axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ *v nadrovině* π *s nevlastními body* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ *je průmětem rovnoramenné orthogonální soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *z bodu* C *tehdy, když simplex* $\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ *je pravidelný a orthogonální průmět* C^0 *bodu* C *do* π *je jeho orthocentrum.*

Důkaz plyne z vět 5 a 4.

II. ORTOGONÁLNÍ ROVNORAMENNÁ SOUSTAVA

V tomto odstavci se budeme zabývat výhradně ortogonální rovnoramennou soustavou. Nazveme ji krátce *o. r. soustavou.* Dále budeme předpokládat, že body $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$ jsou lineárně nezávislé.

V d-konfiguraci $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_1, B'_2\}_1^n$ *v* π *označme* $P_{ij} = A'_iA'_j \cap B'_iB'_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Jsou-li body $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ lineárně nezávislé, leží $\binom{n}{2}$ bodů P_{ij} v nadpřímce p^{n-2} [8]) (je to osa perspektivity dvou perspektivně položených simplexů $\mathfrak{A}' = \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$, středem perspektivity je bod O'). Leží-li body $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ v nadpřímce, označme ji též p^{n-2}. Budiž P harmonický pól nadpřímky p^{n-2} vzhledem k simplexu $\mathfrak{B}'$. Pak je jednoznačně určena kvadratická varieta v π s polárním simplexem $\mathfrak{B}'$, jejíž polárně sdružená nadpřímka k pólu P je právě p^{n-2}. Tato varieta je imaginární.[9]) Involuce I_{ij} sdružených pólů na přímce $B'_iB'_j$ má páry B'_i, B'_j; $P_{ij}, Q_{ij} = \langle P, B'_1, B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B'_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B'_n\rangle \cap B'_iB'_j$.[10]) Tyto páry se rozdělují, involuce I_{ij} je eliptická a její samodružné body, tj. hledané průsečíky jsou imaginární. Z konstruktivních důvodů budeme proto dále uvažovat varietu, která předchozí varietu reálně zastupuje. Její antipolární simplex je $\mathfrak{B}'$ a její antipolárně sdružená nadpřímka s bodem P je p^{n-2}. Nazveme tuto reálnou varietu *přidruženou* k dané konfiguraci $\mathfrak{K}^n$. (Viz [5], věta 4 [6], věta 8, 4.)

---

[8]) Nadpřímka = prostor dimense $n - 2$.

[9]) Neprotíná totiž reálně žádnou přímku $B_i'B_j'$ simplexu $\mathfrak{B}'$.

[10]) $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ je symbol pro prostor vytvořený body $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

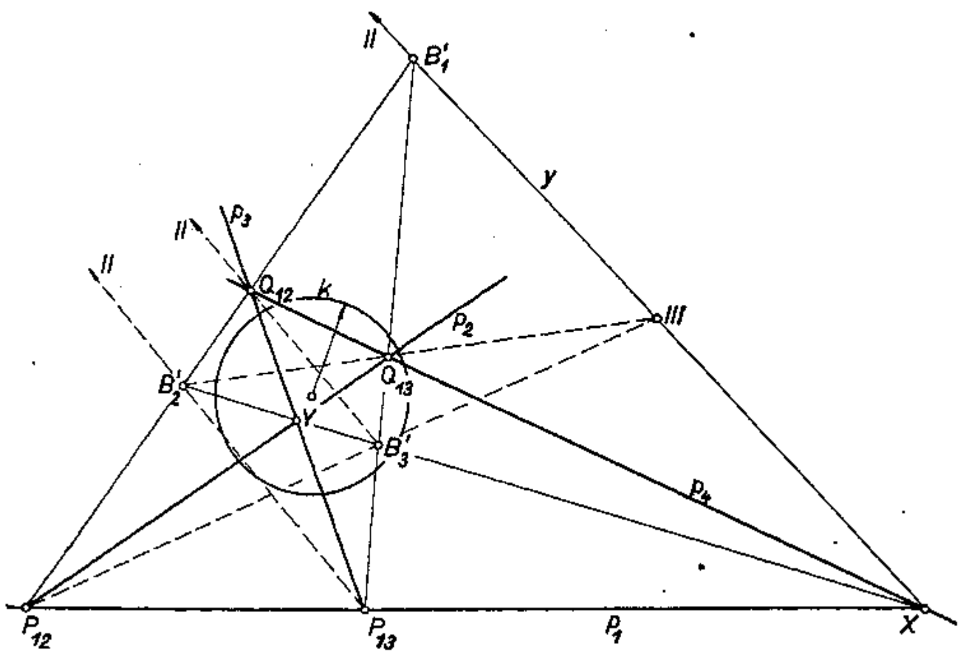
Poučka 9. *d-konfigurace* $\mathfrak{K}^n = \{O', A'_i, B'_i\}^n$ *v* π *je centrálním průmětem některé o. r. soustavy* $\mathfrak{S}^n\{O, A_i, B_i\}_1^n$ *tehdy a jen tehdy, když body* P_{ij}, Q_{ij} *jsou společným párem těchto dvou involucí:*[11])

1. *involuce* I^I_{ij}, *jejíž samodružné body jsou* B'_i, B'_j,

2. *involuce* I^{II}_{ij} *sdružených antipólů variety* v *na přímce* $B'_iB'_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. Nechť je d-konfigurace $\mathfrak{K}^n$ průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$. Pro bod P, tj. pro harmonický pól nadpřímky p^{n-2} vzhledem k simplexu $\mathfrak{B}'$ platí $(B'_i, B'_j, P_{ij}, Q_{ij}) = -1$,[12]) takže body P_{ij}, Q_{ij} jsou párem involuce I^I_{ij}. Přidruženou varietou dané konfigurace je podle věty 4 v [5] sféra v, bod P je s nadpřímkou p^{n-2} antipolárně sdružen vzhledem ke sféře v a proto body P_{ij}, Q_{ij} náleží také involuci I^{II}_{ij}. Involuce I^I_{ij} je hyperbolická, neboť má reálné samodružné body. Involuce I^{II}_{ij} je naproti tomu eliptická. Společný pár P_{ij}, Q_{ij} je tedy reálný.

Nechť body P_{ij}, Q_{ij} jsou společným párem involucí I^I_{ij}, I^{II}_{ij} na přímce $B'_iB'_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$. V rovině $\langle B'_1, B'_2, B'_1 \rangle$ leží tyto body vždy po třech na čtyřech přímkách (obr. 2). Uvažujme nejprve jen dva páry P_{12}, Q_{12}; P_{13}, Q_{13}. Určují čtyrroh o stranách $P_{12}Q_{12} = B'_1B'_2$, $P_{13}Q_{13} = B'_1B'_3$, $p_1 = P_{12}P_{13}$, $p_2 = P_{12}Q_{13}$, $p_3 = P_{13}Q_{12}$, $P_4 = Q_{12}Q_{13}$. Bod B'_1 je vrcholem diagonálního trojúhelníka tohoto čtyrrohu, body B'_2, B'_3 leží na protilehlé straně. Zbývající



Obr.2.

[11]) Dále přejímáme symboliku z předchozích úvah.
[12]) Symbol znamená dvojpoměr.

vrcholy $X = p_1 \cap p_4$, $Y = p_2 \cap p_3$ diagonálního trojúhelníka jsou jednak harmonicky sdruženy vzhledem k základním bodům B_2', B_3' (jak plyne z vlastností úplného čtyrrohu), jednak antipolárně sdružené vzhledem ke kružnici k, určené antipolárním trojúhelníkem $B_1'B_2'B_3'$, jak nyní dokážeme. Antipolára y bodu Y vzhledem ke k je spojnicí antipólů II, III přímek p_2, p_3, tj. bodů $II = Q_{13}B_3' \cap$ $\cap P_{13}B_2'$, $III = Q_{13}B_2' \cap P_{12}B_3'$. Antipolára $y = II\,III$ prochází bodem B_1'. Bod II (III) je diagonálním vrcholem čtyrrohu $P_{13}B_3'Q_{12}B_2'$ ($P_{12}B_3'Q_{13}B_2'$), jehož dalším diagonálním vrcholem je bod Y a proto antipolára y odděluje s přímkou $B_1'Y$ harmonicky přímky $B_1'B_2'$, $B_1'B_3'$, tj. prochází bodem X. Body X, Y jsou proto společnými body involucí I_{23}^I, I_{23}^{II} na přímce $B_2'B_3'$. Kdyby byl tento pár jiný, než dříve sestrojený pár P_{23}, Q_{23}, měly by obě involuce více než jeden společný pár, což není možné a proto $X = P_{23}$, $Y = Q_{23}$. Definujme rekurentně $\langle p_1, P_{14}\rangle = \mathbf{P}^2$, $\langle \mathbf{P}^2, P_{15}\rangle = \mathbf{P}^3, \ldots, \langle \mathbf{P}^{n-3}, P_{1n}\rangle = p^{n-2}$. Harmonický pól P nadpřímky p^{n-2} vzhledem k simplexu $\mathfrak{B}'$ je též antipólem této nadpřímky vzhledem ke sféře, určené antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$. Daná konfigurace má přidruženou sféru a je tedy v důsledku věty 4 v [5] axonometrickou soustavou.

Poučka 10. *d-konfigurace $\mathfrak{K}^n = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ v π je průmětem některé o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ právě tehdy, když body P_{ij}, Q_{ij} jsou samodružné body involuce I_{ij} na přímce $B_i'B_j'$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Obecný pár L^a, L^h této involuce je takto definován: s libovolným bodem $L \in B_i'B_j'$ je L^a antipolárně sdružen vzhledem ke sféře, určené antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$, a bod L^h harmonicky sdružen vzhledem k základním bodům B_i', B_j'.*

Důkaz. Poučky 9, 10 jsou ekvivalentní. Nechť platí poučka 10. Pak je $(B_i', B_j', P_{ij}, Q_{ij}) = -1$, neboť P_{ij}, Q_{ij} jsou samodružné body involuce I_{ij} a oddělují harmonicky její pár B_i', B_j'. Označíme-li totiž $B_i' = L$, je $L^a = B_i'$, $L^h = B_i'$. Body P_{ij}, Q_{ij} jsou tedy též párem involuce I_{ij}^I z poučky 9. Označíme-li $L = P_{ij}$, je $L^a = L^h = Q_{ij}$. Body P_{ij}, Q_{ij} jsou též párem involuce I_{ij}^{II} z poučky 9.

Nechť platí poučka 9. Páry L, L^a tvoří involuci I_{ij}^{II}, páry L, L^h involuci I_{ij}^I. Jejich společný pár je $P_{ij} = L$, $Q_{ij} = L^a = L^h$ ($Q_{ij} = L$, $P_{ij} = L^a = L^h$). Páry L^a, L^h, tvoří tedy involuci, jejíž samodružné body jsou P_{ij}, Q_{ij}, tj. involuci I_{ij}. Poučka 9 a proto i poučka 10 je tím dokázána.

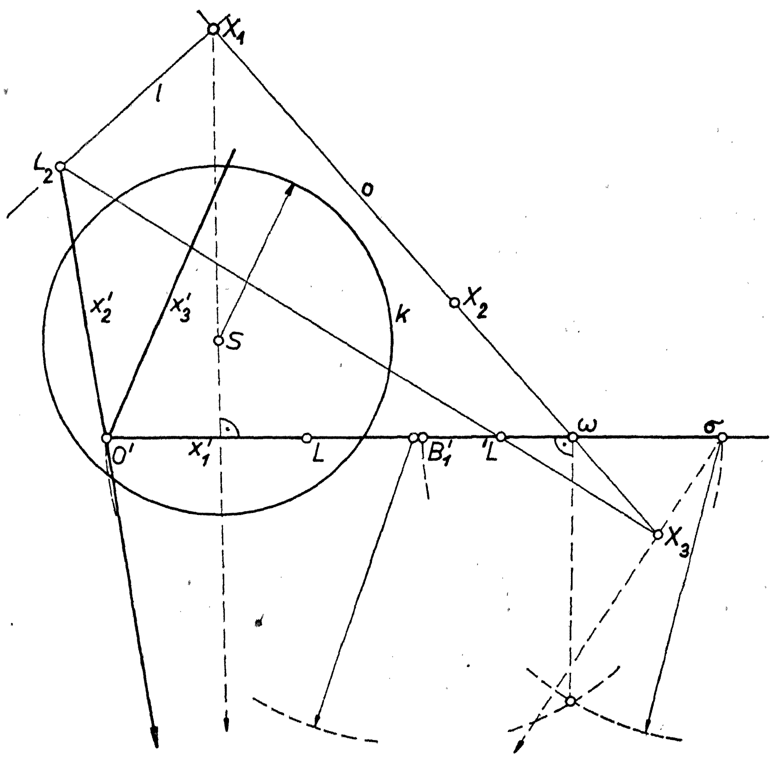
Poučky 9, 10 se hodí ke konstrukci axonometrických soustav, které jsou průměty o. r. souřadnicových soustav a lze jimi nahradit větu 4 v [5], resp. 8,4 v [6], která je pro praktické konstrukce nevhodná. Použití těchto pouček k takovým konstrukcím pro $n = 3$ je obsaženo v [2] a [3].

Úvahy další části tohoto odstavce se budou týkat konstrukcí axonometrických soustav z částečných konfigurací. Na základě axonometrické konfigurace lze pak řešit[13]) metrické úlohy centrální axonometrie nepřímo a to tím způso-

[13]) Až na podobnost, jak vyplývá z toho, že axonometrickou soustavou není určena o. r. soustava jednoznačně. Vlastní bod $O \neq C$ lze totiž volit na přímce CO' libovolně a tím získáváme o. r. soustavy navzájem podobné.

bem, že je převedeme na úlohy v Mongeově promítání, které užívá týchž souřadnicových os. Úlohy polohy lze však řešit snadno přímo, což zde nebudeme uvádět.

Poučka 11. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A_1', B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$ *v nadrovině* π. *Pak axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{n'} = \}O', A_i', B_i'\}$ *v* π, *která je průmětem některé o. r. soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$, *existuje právě tehdy, když simplex* $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$ *je antipolárním simplexem hypersféry v* π.



Obr. 3.

Důkaz. Nechť je $\mathfrak{S}^{n'}$ průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$. Pak je podle věty 4 v [5] simplex $\mathfrak{B}'$ antipolárním simplexem určité sféry.

Podmínka je dostačující: Sféru určenou antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$ označme k. Podle poučky 9 nebo 10 určíme nadpřímku p^{n-2} a dále body $A_2', A_3', \ldots, A_n'$ tak, aby simplexy $\{A_1', A_2', \ldots, A_n'\}$ a $\mathfrak{B}'$ byly perspektivně položeny, v perspektivitě s osou p^{n-2} a středem O'. Tím je určena axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n'} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$, která je průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ určené takto:

Laguerrův bod C sféry k je střed promítání, libovolný vlastní bod přímky $O'C$ různý od C je bodem O soustavy, přímka $x_i \parallel CB'_i$ jejím ramenem, na němž je bod A_i určen vztahem $A_i = x_i \cap CA'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Poučka 12. *Nechť je dána hypersféra k nadroviny π a částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n\}$ v π a nechť dále a) přímky $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ jsou různé, b) přímky x'_1, x'_2 splývají. Pak v π existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{n\prime} = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$ s přidruženou sférou k, která je průmětem některé o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ tehdy a jen tehdy, a) když involuce I definovaná v důkazu věty je hyperbolická, b) když $(n - 3)$-rozměrný prostor, antipolárně sdružený s přímkou x'_1 vzhledem ke k, leží v nadpřímce $\langle x'_3, x'_4, \ldots, x'_n\rangle$.*

Důkaz (obr. 3). a) Nechť je $\mathfrak{S}^{n\prime}$ průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$. Pak je podle poučky 11 simplex $\mathfrak{B}'$ antipolárním simplexem variety k. Prostor $(n - 3)$-rozměrný, $\mathbf{X}_i$, antipolárně sdružený s přímkou x'_i vzhledem ke k je potom obsažen v nadpřímce $\langle B'_1, B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_n\rangle$. Prostor $\mathbf{X}_i$ je též obsažen v antipolárně sdružené nadpřímce o s bodem O' vzhledem ke k, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zvolme na x'_1 bod L. Budiž l^{n-2} s ním antipolárně sdružená nadpřímka vzhledem ke k a označme dále $x'_2 \cap l^{n-2} = L_2$, $x'_3 \cap l^{n-2} = L_3, \ldots, x'_n \cap l^{n-2} = L_n$.

Budiž $'L = \langle L_2, \mathbf{X}_n\rangle \cap x'_1$. Body L, $'L$ takto definované tvoří páry involuce I (pár O', $O \cap x'_1 = \omega$, střed σ na přímce $(x'_2 \cap S\mathbf{X}_1)\mathbf{X}_n$). Když body L, $'L$ splynou, je příslušná nadpřímka $\langle L_2, \mathbf{X}_n\rangle$ právě protilehlou nadpřímkou simplexu $\mathfrak{B}'$, $L = {'L} = B'_1$, $L_2 = B'_2, \ldots, L_n = B'_n$. Samodružné body involuce I jsou tedy reálné a involuce je hyperbolická.

Nechť je naopak involuce I z předchozí úvahy hyperbolická. Budiž B'_i její samodružný bod, b^{n-2} s ním antipolárně sdružená nadpřímka vzhledem ke k, $b^{n-2} \cap x'_i = B'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Podle poučky 11 určíme dále body $A'_2, A'_3, \ldots, A'_n$ axonometrické soustavy $\{O', A'_i, B'_i\}_1^n$, která je průmětem o. r. soustavy určené podle předcházející poučky.

b) Nechť je $\mathfrak{S}^{n\prime}$ průmětem $o.$ $r.$ soustavy $\mathfrak{S}^n$. Rameno x'_1 je hranou $B'_1B'_2$ antipolárního simplexu sféry k. $(n - 3)$-rozměrný prostor $\mathbf{X}_1 = \langle B'_3, B'_4, \ldots, B'_n\rangle$ b je protilehlým prostorem simplexu $\mathfrak{B}'$ k přímce x'_1 a je proto s x'_1 antipolárně sdružen vzhledem ke k. Proto leží v antipolárně sdružené nadpřímce $\langle x'_3, x'_4, \ldots, x'_n\rangle$ s přímkou x'_1 vzhledem ke k.

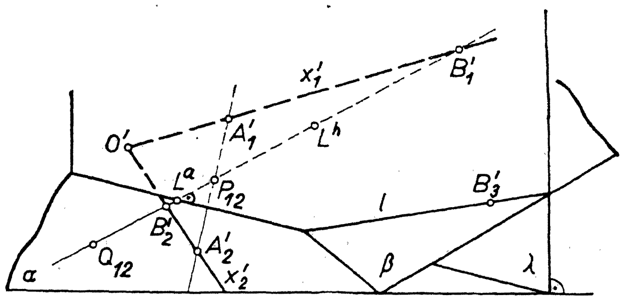
Nechť $(n - 3)$-rozměrný prostor antipolárně sdružený s přímkou $x'_1 = x'_2$ leží v nadpřímce $\langle x'_4, x'_3, \ldots, x'_n\rangle$. Označme B'_i jeho průsečík s x'_i, $i = 3, 4, \ldots, n$. Na přímce x'_1 zvolme libovolně bod $B'_1 \neq O'$, bod B'_2 určeme jako průsečík přímky x'_1 s nadpřímkou, antipolárně sdruženou s bodem B'_1 vzhledem ke k. Tím je určen simplex $\mathfrak{B}'$ axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{n\prime}$, jejíž body $A'_2, A'_3, \ldots, A'_n$ určíme podle poučky 11 a která je průmětem o. r. soustavy $\mathfrak{S}^n$ určené podle předchozí poučky. Poučka je tím dokázána.

Dále jsou uvedeny dvě poučky platné pro prostor $\mathbf{P}^4$.

Poučka 13. *Nechť je dána částečná konfigurace* $\mathfrak{k} = \{O', A_1', A_2', B_1', B_2'\}$ *v rovině* $\alpha \subset \pi$ *a rovina* $\beta \neq \alpha$, $\beta \subset \pi$. *Budiž dále a) nejvýš jeden z bodů* B_1', B_2' *nevlastní, b) body* B_1', B_2' *nevlastní,* $O'A_1' \perp O'A_2'$, $O'A_1' = O'A_2'$. *Pak v* π *existuje axonometrická soustava* $\mathfrak{S}^{4'} = \{O', A_i', B_i'\}_1^4$ *s bodem* B_3' *v* β, *která je průmětem některé o. r. soustavy* $\mathfrak{S}^4 = \{O, A_i, B_i\}_1^4$.

Důkaz (obr. 4). 1. Nechť je $O'A_1' = x_1' \neq O'A_2' = x_2'$. V rovině β sestrojíme bod B_3' axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4'}$ takto:

Je-li $P_{12} = A_1'A_2' \cap B_1'B_2'$, pak sestrojme bod Q_{12} z relace $(P_{12}, Q_{12}, B_1', B_2') = -1$. Body P_{12}, Q_{12} jsou samodružné body involuce z poučky 10. K nevlastnímu bodu L přímky $B_1'B_2'$ jsou přiřazeny body L^a, L^h (pár involuce) podle vztahů $(L, L^h, B_1', B_2') = -1$, $(L^h, L^a, P_{12}, Q_{12}) = -1$. Rovina $\lambda \subset \pi$ kolmá k $B_1'B_2'$ procházející bodem L^a nechť protne rovinu β v přímce l. Jsou-li body B_1', B_2' vlastní, zvolme $B_3' \in l$ vně koule o průměru $B_1'B_2'$. Bod L^a je uvnitř úsečky $B_1'B_2'$ a rovina λ je v souhlase s poučkou 11 uvnitř pásu, omezeného rovinami kolmými k přímce $B_1'B_2'$, jdoucími body B_1', B_2'.



Obr. 4.

Je-li bod B_1' vlastní a B_2' nevlastní, pak $L^a = B_1'$ a bod B_3' zvolme kdekoli na $l = \lambda \cap \beta$, $\lambda \perp B_1'B_2'$, $B_1' \in \lambda$.

Jsou-li body B_1', B_2' nevlastní, a jsou splněny předpoklady poučky, zvolme za B_3' libovolný vlastní bod roviny β.

Tím jsme ve všech případech sestrojili antipolární simplex určité kružnice v $\langle B_1', B_2', B_3' \rangle$. Bod B_4', vrchol antipolárního simplexu $\mathfrak{B}'$ určité kulové plochy k, obsahující tuto kružnici, určíme takto:

Nechť jsou body B_1', B_2', B_3' vlastní. Bod B_4' volíme pak na kolmici k jejich rovině orthocentrem V trojúhelníka $B_1'B_2'B_3'$ vně kulové plochy se středem V opsané nad hlavní kružnicí, která je určena body B_1', B_2', B_3'.

Nechť body B_1', B_2', jsou vlastní, bod B_3' nevlastní. Bod B_4' zvolíme pak uvnitř pásu, který je omezen kolmicemi v bodech B_1', B_2' na rovinu $\langle B_1', B_2', B_3' \rangle$ a současně vně kružnice v této kolmé rovině nad průměrem $B_1'B_2'$.

Nechť bod B_1' je vlastní, body B_2', B_3', nevlastní. Bod $B_4' \neq B_1'$ zvolíme pak na kolmici bodem B_1' k rovině $\langle B_1', B_2', B_3' \rangle$.

Tím je ve všech případech určen simplex $\mathfrak{B}'$ hledané axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4'}$, jejíž body A_3', A_4' určíme podle poučky 11 a která je průmětem o. r. soustavy, určené podle poučky 11.

2. Nechť $x_1' = x_2'$. Konstrukci bodu B_3' axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4\prime}$ provedeme takto: Její bodové trojice $A_1'A_2'A_3'$, $B_1'B_2'B_3'$ jsou perspektivní. Střed perspektivity je O', osa perspektivity je p_1. Pro bod $P_{12} = p_1 \cap x_3'$ platí proto podmínka $(O', P_{12}, A_1', B_1') = (O', P_{12}, A_2', B_2')$[14]) a určíme-li ještě bod Q_{12} z podmínky $(P_{12}, Q_{12}, B_1', B_2') = -1$, lze potom postupovat stejně, jako v důkaze části 1. Tím je poučka dokázána.

Poučka 14. *Nechť je v nadrovině π dána kulová plocha k a částečná konfigurace $\mathfrak{k} = \{O', A_1', B_1', x_2'\}$. Nechť dále body O', B_1' nejsou antipolárně sdružené vzhledem ke k. Pak existuje axonometrická soustava $\mathfrak{S}^{4\prime} = \{O', A_i', B_i'\}_1^4$, která je průmětem určité o. r. soustavy $\mathfrak{S}^4 = \{O, A_i, B_i\}_1^4$ s přidruženou kulovou plochou k.*

Důkaz. Antipolární simplex $\mathfrak{B}' = \{B_1', B_2', B_3', B_4'\}$ kulové plochy k axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4\prime}$ má vrchol B_2' na x_2' v průsečíku roviny β antipolárně sdružené s bodem B_1' vzhledem ke k. Body B_3', B_4' v β leží na antipoláře přímky $B_1'B_2'$ vzhledem ke k a zvolme je na ní tak aby byly antipolárně sdružené vzhledem ke k, jinak libovolně. Tím je určen simplex $\mathfrak{B}'$ a body A_2', A_3', A_4' hledané axonometrické soustavy $\mathfrak{S}^{4\prime}$ i o. r. soustavu $\mathfrak{S}^4$, která se do $\mathfrak{S}^{4\prime}$ promítá už určíme podle poučky 11.

III. DEGENEROVANÁ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

V tomto odstavci se budeme zabývat průmětem souřadnicové soustavy (z definice 1) při promítání z bodu C, který leží na rameni soustavy, do průmětny π.

Definice 5. *Degenerovaná konfigurace* je uspořádaná skupina $n - 1$ bodových trojic $O' \neq A_i' = B_i' \neq O'$, přičemž body O', A_i', B_i' leží na přímce x_i', rameni konfigurace, $i = 2, 3, \ldots, n$, ramena $x_2', x_3', \ldots, x_n'$ vytvářejí vlastní nadrovinu π a dále je $O' = x_1' = A_1' = B_1'$.

Definice 6. *Degenerovaná axonometrická soustava* je průmět souřadnicové soustavy z bodu $C \neq O$, který leží na rameni x_1, do nadroviny π. *Každá degenerovaná axonometrická soustava je degenerovanou konfigurací.*[15])

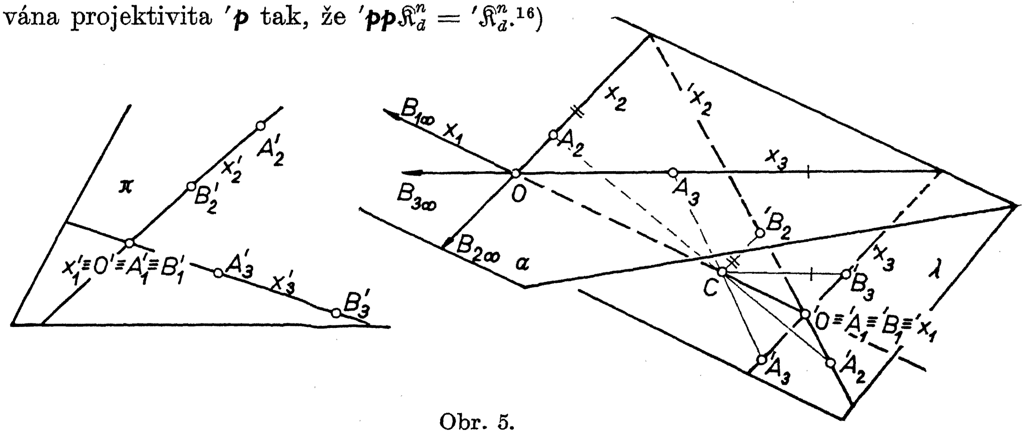
Nás bude dále zajímat úloha obrácená: kdy lze degenerovanou konfiguraci pokládat za průmět souřadnicové soustavy.

Věta 6. *Nechť je dána degenerovaná konfigurace $\mathfrak{K}_d^n = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ v nadrovině π a souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$. Pak lze určit projektivní transformaci mezi π a libovolnou vlastní nadrovinou λ tak, že konfigurace ${}'\mathfrak{K}_d^n$, která v této transformaci odpovídá konfiguraci $\mathfrak{K}_d^n$, je průmětem soustavy $\mathfrak{S}^n$ z bodu $C \in x_1$, $C \neq O$, C non $\in \lambda$.*

[14]) Konstrukci bodu P_{12} viz např. v Deskriptivní geometrii I, F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský, str. 27.

[15]) Jestliže ovšem definujeme, že i průmět bodu $X = C$ přímky x_1 je O'.

Důkaz (obr. 5). Budiž $\langle O', A_2', \ldots, A_n' \rangle = \pi$, $\langle O, A_2, \ldots, A_n \rangle = \alpha$. Existuje právě jedna projektivita $\mathfrak{p}$ mezi nadrovinami π, α pro niž platí $\mathfrak{p}\, A_i' = A_i$, $\mathfrak{p} B_i' = B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Souřadnicová soustava $\mathfrak{S}^n$ se promítá z libovolného bodu $C \in x_1$, $C \neq O$ do libovolné vlastní nadroviny λ non $\ni C$ v degenerovanou konfiguraci $'\mathfrak{K}_d^n$. Mezi nadrovinami π, λ je promítáním z centra C zprostředkována projektivita $'\mathfrak{p}$ tak, že $'\mathfrak{p}\mathfrak{p}\mathfrak{K}_d^n = {}'\mathfrak{K}_d^n$.[16])



Obr. 5.

Věta 7. *Nechť* $\{O', A_i', B_i'\}_2^n$ *je axonometrická soustava s nevlastními body* $B_2', B_3', \ldots, B_k', A_{k+1}', A_{k+2}', \ldots, A_n'$, *jejíž ramena vytvářejí vlastní nadrovinu* π *a která je průmětem normalisované soustavy* $\{O, A_i, B_i\}_2^n$ *z bodu* C. *Pak je průmětem normalisované soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$ *z bodu* C *do* π *degenerovaná konfigurace* $\mathfrak{K}_d^n = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ *právě tehdy, když* $C \in x_1$, $C \neq O$.

Důkaz. Je-li průmětem $\mathfrak{S}^n$ degenerovaná konfigurace $\mathfrak{K}_d^n$ musí být $C \in x_1$. Naopak, je-li $C \in x_1$ je $\mathfrak{S}^{n'}$ podle poučky 8 degenerovanou konfigurací.

Věta 8. *Normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$, *která se promítá do degenerované axonometrické soustavy* $\mathfrak{S}_d^{n'} = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ *v* π *s nevlastními body* A_2', $A_3', \ldots, A_n'$ *je orthogonální tehdy, když střed promítání* $C \neq O$ *leží na rameni* x_1 *a když orthogonální průmět* C^0 *bodu* C *do* π *je orthocentrum simplexu* $\{B_1', B_2', \ldots, B_n'\}$.

Věta 9. *Normalisovaná soustava* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}_1^n$, *která se promítá do degenerované axonometrické soustavy* $\mathfrak{S}_d^n = \{O', A_i', B_i'\}_1^n$ *v* π *s nevlastními body* $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ *je rovnoramenná právě tehdy, když* $C \in x_1$, $C \neq O$ *a když orthogonální průmět* C^0 *bodu* C *do* π *je střed hypersféry určené body* $B_1', B_2', \ldots, B_n'$.

Důkaz obou vět vyplývá z vět 4, 5 a 9.

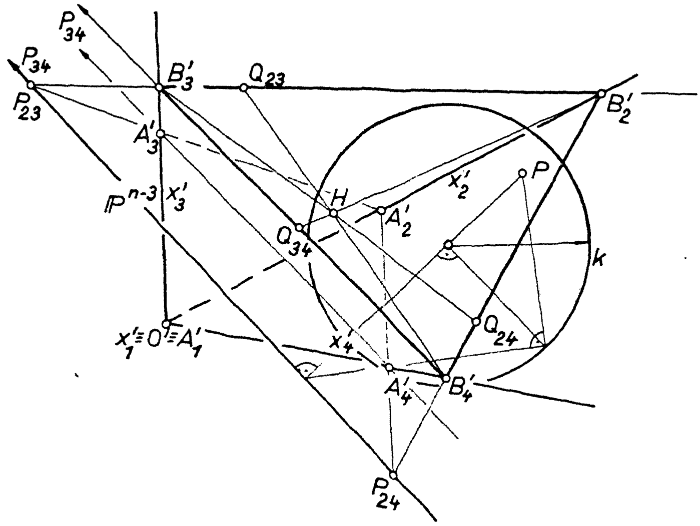
Další úvahy se budou týkat průmětu orthogonální rovnoramenné soustavy, kterou opět krátce nazveme *o. r. soustavou*.

Předpokládejme, že body $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ jsou lineárně nezávislé a označíme opět $P_{ij} = B_i'B_j' \cap A_i'A_j'$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$ (obr. 6). Body P_{ij} vytvářejí

[16]) Analogický důkaz pro nedegenerované konfigurace viz [5] věta 6.

podprostor P^{n-3}. Bod Q_{ij} určíme opět vždy ze vztahu $(Q_{ij}, P_{ij}, B'_i, B'_j) = -1$.

Budiž dále: H harmonický pól podprostoru P^{n-3} vzhledem k simplexu $\{B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\}$, k hypersféra (existuje-li) v nadrovině $\langle B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\rangle$, určená antipolárním simplexem $\mathfrak{B}'$, tzv. přidružená sféra ke konfiguraci $\mathfrak{K}^n_d$, P v podprostoru $\langle B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\rangle$ antipolárně přidružený bod k podprostoru P^{n-3} vzhledem ke k.



Obr. 6.

Věta 10. *Degenerovaná konfigurace* $\mathfrak{K}^n_d = \{O', A'_i, B'_i\}^n_1$ *v* π *je průmětem některé o. r. soustavy* $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}^n_1$, *právě tehdy, když simplex* $\mathfrak{B}' = \{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ *je antipolárním simplexem sféry* k *a když dále platí* $P = H$. *Středem promítání je pak Laguerrův bod sféry* k *a leží na* x_1.

Důkaz. Budiž $\mathfrak{S}^{n'}$ průmět soustavy $\mathfrak{S}^n$ z vlastního bodu $C \in x_1$, $C \neq O$ do π. Pak je $\mathfrak{S}^{n'}$ degenerovaná konfigurace. Simplex $\mathfrak{B}'$ je antipolárním simplexem sféry k, neboť jde o základní kvadratickou varietu polarity, která vznikne jako průnik pravoúhlé polarity P v P^n s páry $\langle C, B'_i\rangle$, $\langle C, B'_1, B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_n\rangle$ s nadrovinou π, tedy sféra k. Bod H je společný bod $(n-3)$-rozměrných podprostorů $\langle B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_{j-1}, B'_{j+1}, \ldots, B'_n, Q_{ij}\rangle$, neboť pro body P_{ij}, Q_{ij} platí $(P_{ij}, Q_{ij}, B'_i, B'_j) = -1$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Body P_{ij}, Q_{ij} jsou ale zároveň antipolárně sdružené vzhledem ke k, neboť $CP_{ij} \perp CQ_{ij}$ $(CP_{ij} \parallel A_iA_j$, $CQ_{ij} \parallel O\bar{Q}_{ij}$, kde $\bar{Q}_{ij}$ je střed úsečky A_iA_j a tedy $A_iA_j \perp O\bar{Q}_{ij})$, tj. antipolárně sdružený bod P s $n-3$ rozměrným podprostorem P^{n-3} v $\langle B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\rangle$ vzhledem ke k je též harmonickým pólem pod prostoru P^{n-3} k simplexu $\{B'_2, B'_3, \ldots, B'_n\}$.

Nechť je $\mathfrak{B}'$ antipolárním simplexem sféry k a nechť $P = H$. Dokážeme, že existuje o. r. soustava $\mathfrak{S}^n = \{O, A_i, B_i\}^n_1$, jejímž průmětem je daná konfigurace

$\mathfrak{K}_d^n = \{O', A'_i, B'_i\}_1^n$. Zvolme za střed promítání C Laguerrův bod sféry k. Promítnutím polarity $\mathbf{P}'$ v nadrovině π, určené základní varietou k z bodu C vznikne orthogonální polarita $\mathbf{P}$. Zvolme na CO' vlastní bod $O \neq C$. Přímky $x_1 = CB'_1$, $x_2 \parallel CB'_2, \ldots, x_n \parallel CB'_n$ jsou navzájem kolmé, neboť páry B'_i, $\langle B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_n \rangle$, $i = 2, \ldots, n$ jsou sdružené v $\mathbf{P}'$. Budiž $A_i = x_i \cap CA'_i$, $P_{ij} = B'_iB'_j \cap A'_iA'_j$. Pak je $CP_{ij} \parallel A_iA_j \parallel \langle x_i, x_j \rangle$. Budiž dále Q_{ij} průsečík nadpřímky $\langle O, H, B'_2, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_{j-1}, B'_{j+1}, \ldots, B'_n \rangle$ s přímkou $B'_jB'_i$, tj. nechť platí $(P_{ij}, Q_{ij}, B'_i, B'_j) = -1$. Přímka $O\bar{Q}_{ij} \parallel CQ_{ij}$ protne A_iA_j v $\bar{Q}_{ij}$. Protože se P_{ij} promítne do nevlastního bodu přímky A_iA_j, je $\bar{Q}_{ij}$ středem úsečky A_iA_j. Přímka $O'Q_{ij} = B'_iQ_{ij}$ je polárně sdružená s bodem P_{ij} v rovině $x'_ix'_j$ vzhledem ke kružnici $k \cap x'_ix'_j$, takže je $CP_{ij} \perp COQ_{ij}$ v prostoru $\langle C, B'_1, B'_i, B'_j \rangle$, tj. $A_iA_j \perp O\bar{Q}_{ij}$ a tedy v pravoúhlém trojúhelníku OA_iA_j protíná výška $O\bar{Q}_{ij}$ přeponu A_iA_j ve středu přepony, z čehož plyne $OA_i = OA_j$. Tím je dokázáno, že délky $OA_2, \ldots, OA_n$ jsou stejné. Budiž j jejich společná délka. Zvolme na x_1 bod A_1 tak, aby $OA_1 = j$; bod B_1 budiž nevlastní bod přímky x_1. Tím je určena soustava $\mathfrak{S}^n$, která se z C promítá do $\mathfrak{K}_d^n$ a věta je dokázána.

Literatura

[1] *Н. Ф. Четверухин:* Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции. Сборник статей „Методы начертательной геометрии и её приложения, Москва 1955, 105—111.

[2] *L. Drs*: O základní větě centrální axonometrie. Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 165 až 174.

[3] *L. Drs*: O centrální axonometrii. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 330—335.

[4] *V. Havel*: Základní věty centrální axonometrie. Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 175 až 180.

[5] *V. Havel*: O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie. Mat.-fyz. čas. SAV, *VII*, 2—1957, 94—107.

[6] *V. Havel*: O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie II, III. Mat.-fyz. čas. SAV, *VIII*, 2—1958, 103—114.

[7] *V. Havel*: Sdružené normalisované desarguesovské konfigurace. Spisy přír. fak. univ. v Brně, 1958, 157—160.

[8] *V. Havel*: O singulární afinitě a kolineaci. Sborník VUT v Brně, 1959, sešit 1/2.

[9] *Z. Kowalski*: Poznámka o degenerovaném průmětu souřadnicového systému v centrální axonometrii. Sborník VUT v Brně, 1958, 83—90.

[10] *Е. А. Мчедлишвили:* Построение центральной проекции точки по аксонометрическим осям. Юбилейний сборник трудов Груз. полит. инст. № *17,* 1948, 43—73.

[11] *Е. А. Мчедлишвили:* Элементарное доказательство основной теоремы центрального проектирования. Труды Тбил. гос. унив., том *56,* 1955, 141—144.

[12] *Е. А. Мчедлишвили:* Об основном предложении центральной аксонометрии. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике, 1958, 104—108.

Резюме

ЦЕНТРАЛЬНАЯ АКСОНОМЕТРИЯ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЛАДИСЛАВ ДРС (Ladislav Drs), Прага

Содержанием этой работы является изучение свойств центральной проекции системы координат (общей и ортогональной) из точки в собственную гиперплоскость, т. е. изучение свойств разных аксонометрических систем. Кроме того, в работе приводятся конструкции аксонометрических систем при различном задании некоторых из их элементов.

Zusammenfassung

DIE ZENTRALE AXONOMETRIE IM n-DIMENSIONALEN RAUME

LADISLAV DRS, Praha

In dieser Arbeit studiert man Eigenschaften der Projektion von Axenkreuzen (allgemeinen und orthogonalen) aus einem eigenen Zentrum in eine eigene Hyperebene (kurz, Eigenschaften verschiedener Axonometrien). Weiter enthält die Arbeit Konstruktionen von Axonometrien, wenn verschiedene Elemente von ihnen gegeben sind.