Jiří Sedláček

O incidenčních maticích orientovaných grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 3, 303--316

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117311`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O INCIDENČNÍCH MATICÍCH ORIENTOVANÝCH GRAFŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 15. července 1958) DT: 519.51

V tomto příspěvku se ukazuje, že mnohé vlastnosti matic je možno studovat prostřednictvím teorie orientovaných grafů. Zvláště si tu všímáme primitivních nezáporných nerozložitelných matic (jímž před časem věnovali pozornost H. WIELANDT a V. PTÁK). Nedávno ukázali L. COLLATZ a U. SINOGOWITZ, že některé vlastnosti spektra symetrické matice je možno odvodit z geometrických vlastností neorientovaného grafu, pro nějž je tato matice incidenční maticí. Ukazujeme zde zobecnění, v němž incidenční matice nemusí být symetrická (graf je pak orientovaný).

1. Základní pojmy a pomocné úvahy

Předmětem naší úvahy bude konečný orientovaný graf G (někdy stručně jen „graf"). Počet uzlů označíme vždy n, množinu uzlů grafu G pak $\Pi\{G\}$. Nemůže-li dojít k nedorozumění, píšeme místo $x \in \Pi\{G\}$ stručně jenom $x \in G$. Ke každé uspořádané dvojici uzlů x, y grafu G připouštíme nejvýše jednu hranu $\overrightarrow{xy}$. V dalších úvahách budeme potřebovat pojem *úplného orientovaného grafu*; tak nazveme graf, který s každou uspořádanou dvojicí svých uzlů x, y obsahuje hranu $\overrightarrow{xy}$.[1]) Jsou-li v, w dva uzly grafu G, potom (konečnou) posloupnost prvků

$$u_1,\ \overrightarrow{u_1u_2},\ u_2,\ \overrightarrow{u_2u_3},\ u_3,\ \ldots,\ \overrightarrow{u_{m-1}u_m},\ u_m \tag{1}$$

(existuje-li) nazveme *spojením* mezi uzly v a w, je-li $v = u_1$, $w = u_m$, $u_j \in \Pi\{G\}$ pro $1 < j < m$ a jsou-li $\overrightarrow{u_iu_{i+1}}$ hrany grafu G. Počet hran, které se vyskytují v posloupnosti (1), nazveme *délkou* uvedeného spojení.[2]) Je-li $v \neq w$ a vyskytuje-li se v (1) každý uzel grafu G nejvýše jednou, mluvíme o *dráze* vedoucí z v do w. Doplníme-li tuto dráhu ještě hranou $\overrightarrow{wv}$, dostáváme *cyklus*. V množině $\Pi\{G\}$ lze definovat binární relaci, pro níž zvolíme symbol $\xrightarrow{\sigma}$, přičemž klademe $x \xrightarrow{\sigma} y$ právě tehdy, existuje-li spojení mezi x a y. Nahradíme-li

[1]) Srovnej D. KÖNIGEM studovaný pojem *Netz* ([5], str. 93).

[2]) Je účelné mluvit též o spojení *nulové* délky, které existuje mezi každou dvojicí x a x pro $x \in \Pi\{G\}$.

v definici relace $\xrightarrow[\sigma]{}$ slovo „spojení“ slovem „dráha“, dostaneme definici další relace, pro níž jsme v práci [9] zvolili označení $\rightarrow$. Snadno nahlédneme, že platí $x \xrightarrow[\sigma]{} y \Leftrightarrow x \rightarrow y$.

V předcházejících pracech jsme si všímali *dobře orientovaných grafů* (v nichž pro každé $x, y \in \Pi\{G\}$ platí $x \rightarrow y$).[3] Abychom se mohli stručně vyjadřovat, definujme v dobře orientovaném grafu G funkci $\varrho(x, y)$ takto: Jsou-li x, y dva různé uzly z G, vyhledejme spojení mezi x, y, které má ze všech takovýchto spojení nejmenší délku; je vidět, že toto spojení je dráha; její délku označme $\varrho(x, y)$. (Pro každé $x \in \Pi\{G\}$ budeme tedy klást $\varrho(x, x) = 0$.) Snadno nahlédneme, že funkce $\varrho(x, y)$ je (ne nutně symetrická) metrika v $\Pi\{G\}$.

Jak známo, je možno k danému grafu přiřadit matici různým způsobem a dát tak geometrickým vlastnostem grafu algebraické vyjádření. V této práci budeme definovat *incidenční matici* $A_G = \|a_{ik}\|_1^n$ grafu G takto: Očíslujme uzly grafu G čísly $1, 2, 3, \ldots, n$ a pak mu přiřaďme matici A_G, kde a_{ik} značí počet hran s počátečním uzlem i a koncovým uzlem k.

2. Násobení grafů a mocnina grafu

Je-li dán graf G, pak podgraf L grafu G, pro který platí $\Pi\{L\} = \Pi\{G\}$, nazveme *hranovým podgrafem*.[4] V celém odstavci 2 volme za G úplný orientovaný graf. Jsou-li L_1, L_2 dva hranové podgrafy grafu G, pak jejich *součinem* $L_1 . L_2$ budeme rozumět hranový podgraf z G, v němž existuje hrana $\overrightarrow{vw}$ právě tehdy, existuje-li uzel $x \in G$, pro nějž $\overrightarrow{vx} \in L_1$, $\overrightarrow{xw} \in L_2$ (existence součinu $L_1 . L_2$ je zřejmá). Jsou-li $L_1, L_2, \ldots, L_r$ hranové podgrafy grafu G, pak součin $P_r = L_1 . L_2 \ldots L_r$ definujme indukcí takto: I. $P_1 = L_1$; II. je-li $r > 1$, pak $P_r = P_{r-1} . L_r$. Snadno nahlédneme, že takto definované násobení je asociativní, není však komutativní. Můžeme nyní zavést pojem *mocniny* grafu L^r (s přirozeným exponentem r), klademe-li $L_i = L$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Mocnina L^r má tento názorný význam: Je to hranový podgraf z G, přičemž $\overrightarrow{xy} \in L^r$ právě tehdy, existuje-li v L spojení mezi x, y mající délku r. Snadno najdeme incidenční matici grafu L^r, známe-li incidenční matici grafu L. Incidenční matice je tvořena pomocí prvků 0 a 1; definujeme-li pro ně sčítání a násobení vztahy[5]

$$0 + 0 = 0 . 0 = 0 . 1 = 1 . 0 = 0\,, \quad 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1 . 1 = 1\,,$$

[3] Pojem dobře orientovaného grafu najdeme u různých autorů. Tak např. Čulíkův *monotonně souvislý* graf (Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 2, 133–155) a Rosenblattův *cyclic net* (Econometrica, Vol. *25*, No 2, 1957, 325–338) se kryjí s pojmem dobře orientovaného grafu. Viz též práci G. N. Povarova [6].

[4] V ruštině se užívá názvu *реберный подграф*, v angličtině *line-subgraph*.

[5] Uvedené vztahy popisují, jaký je výsledek sčítání resp. násobení, provádíme-li je s čísly kladnými a nulou; tak např. $1 + 1 = 1$ znamená, že součet dvou kladných čísel je kladný. Je vidět že množina $\{0; 1\}$ s takto definovanými operacemi tvoří Booleovu algebru.

platí

Věta 1. *Incidenční matice grafu L^r je rovna r-té mocnině incidenční matice grafu L.*

Důkaz. Stačí uvažovat $r > 1$. Vyjdeme-li od incidenční matice $A_L = \|a_{ij}\|_1^n$ a sestrojíme-li její mocninu $(A_L)^r = \|b_{ij}\|_1^n$, platí

$$b_{ij} = \sum a_{it_1} \cdot a_{t_1t_2} \cdot a_{t_2t_3} \dots a_{t_{r-1}j} ;$$

při tom se sčítá přes všechny indexy $t_1, t_2, \dots, t_{r-1}$, jež mohou nabývat hodnot $1, 2, \dots, n$. Prvek b_{ij} je různý od nuly právě tehdy, jestliže aspoň jeden sčítanec $a_{it_1} \dots a_{t_{r-1}j}$ je různý od nuly. To nastane právě tehdy, existují-li čísla $t_1, t_2, \dots, t_{r-1}$ taková, že $a_{it_1} = a_{t_1t_2} = \dots = a_{t_{r-1}j} = 1$. Přejdeme-li ke grafu L, znamená nalezený výsledek, že existuje spojení mezi uzly i a j, které má délku r. Důkaz je podán.

3. Primitivní grafy

Buď dán graf G a nechť $x \in \Pi\{G\}$. Nechť existuje přirozené číslo d tak, že pro každý uzel $y \in G$ existuje spojení mezi x, y, které má délku d. Pak x nazveme *primitivním* uzlem grafu G a nejmenší přirozené číslo $d_{\min}$, jež je možno takto k danému grafu G nalézt, je *ukazatel* uzlu x.

Lemma 1. *Nechť primitivní uzel $x \in G$ má ukazatele $d_{\min}$; nechť $d \geqq d_{\min}$. Potom pro každý uzel $y \in G$ existuje spojení mezi x, y, které má délku d.*

Důkaz. Pro $d = d_{\min}$ je tvrzení triviální. Budiž $d > d_{\min}$ a předpokládejme, že pro každý uzel $y \in G$ existuje spojení S mezi x, y délky $d - 1$. Abychom nahlédli, že zde existuje i spojení délky d, označme z ten uzel spojení S, pro který $\overrightarrow{zy} \in S$. Podle indukčního předpokladu je možno sestrojit spojení mezi x a z délky $d - 1$; doplníme-li je hranou $\overrightarrow{zy}$ a uzlem y, dostaneme spojení mezi x a y délky d. Důkaz je podán.

Snadno se nahlédne, že graf, jehož jeden uzel je primitivní, nemusí být ještě dobře orientovaný. Dále je vidět, že dobře orientovaný graf, mající jeden uzel primitivní, má všechny uzly primitivní. Graf, jehož každý uzel je primitivní, nazveme *primitivním* grafem.[6]) Můžeme tedy také říci, že graf je primitivní právě tehdy, je-li jistá jeho mocnina úplný orientovaný graf. Je vidět, že primitivní graf je zvláštní případ grafu dobře orientovaného.

Je-li G primitivní graf, pak nejmenší přirozené číslo v_0, pro něž G^{v_0} je úplný orientovaný graf, nazveme *ukazatelem primitivnosti* grafu G. Pro každé celé

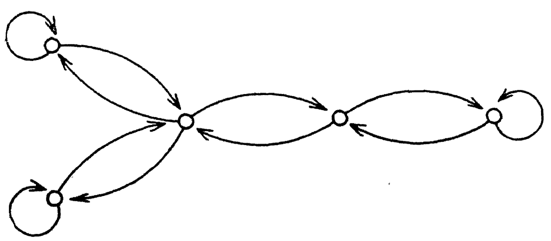
[6]) Nedojde zde zajisté k záměně s Petersenovým pojmem primitivního grafu, jehož se užívá při rozkladech (neorientovaného) pravidelného grafu na několik faktorů. Důvod, proč jsme zvolili název primitivní graf, spočívá v souvislosti s teorií nezáporných nerozložitelných matic. Jak známo, nazýváme *primitivní* tu nezápornou matici, jejíž jistá mocnina je kladná.

číslo $v \geqq v_0$ pak zřejmě G^v je úplný orientovaný graf. V primitivním grafu G vyhledejme pro každý jeho uzel příslušný ukazatel. Nechť max G (resp. min G) značí největší (resp. nejmenší) ze všech těchto ukazatelů. Potom ukazatel primitivnosti grafu G je zřejmě roven max G (viz lemma 1).

Všimněme si primitivních grafů G, u nichž platí

$$\min G = \max G = k\,. \tag{2}$$

Příkladem takového grafu G může být graf, k jehož každé dvojici uzlů x, y existuje automorfismus převádějící uzel x na uzel y. Existují však též primitivní grafy s vlastností (2), jež nejsou výše uvedeného typu (jak ukážeme v následujícím příkladě).



Obr. 1.

Příklad 1. Buďtež k, n přirozená čísla; nechť $2 \leqq k \leqq \leqq n - 1$. Potom existuje primitivní graf G_0 o n uzlech vyhovující požadavku (2).[7]

Abychom G_0 mohli popsat, připomeňme, že v případě $\overrightarrow{uv} \in G_0$, $\overrightarrow{vu} \in G_0$ mluvíme pro stručnost jen o *neorientované* hraně uv. Nechť tedy G_0 má uzly $1, 2, 3, \ldots, n$ a hrany $11, 12, 23, 34, \ldots, (k-1)\,k$ a dále hrany kw, ww (pro $w = k + 1, k + 2, \ldots, n$).[8] Důkaz, že pro G_0 platí (2), podáme ve dvou krocích:

I. Dokážeme, že mezi každými dvěma uzly i, j grafu G_0 existuje spojení S_{ij} délky k. Volíme-li za i nebo j některý uzel opatřený smyčkou, je existence spojení S_{ij} zřejmá. V každém jiném případě nejdříve dokážeme, že mezi i, j existuje spojení $\bar{S}_{ij}$ délky $\leqq k$, které prochází uzlem 1 nebo w ($w = k + 1, \ldots, n$). Vypočtěme čísla α, β definovaná takto:

$$\alpha = \varrho(i, 1) + \varrho(1, j) = i + j - 2\,,$$
$$\beta = \varrho(i, n) + \varrho(n, j) = 2k + 2 - i - j\,.$$

Nemůže být současně $\alpha > k$, $\beta > k$, takže minimum čísel α, β je $\leqq k$. Spojení $\bar{S}_{ij}$ tedy sestrojíme buď tak, že dráhu z i do 1 doplníme drahou z 1 do j nebo dráhu z i do n doplníme drahou z n do j; spojení $\bar{S}_{ij}$ má tedy buď délku k (a je to tedy S_{ij}) nebo S_{ij} dostaneme tak, že $\bar{S}_{ij}$ doplníme smyčkou (event. několikrát probíhanou).

II. Dokážeme dále, že ke každému uzlu i existuje uzel j tak, že mezi i, j neexistuje spojení S délky $k - 1$. Je-li i některý z uzlů 1, w ($w = k + 1, \ldots, n$), je tvrzení opět zřejmé. V ostatních případech položme $j = k - i + 2$. Vzhledem k implikaci $\overrightarrow{uv} \in G_0 \Rightarrow \overrightarrow{vu} \in G_0$ je možno předpokládat, že $i \leqq j$. Kdyby

[7]) Pro $k = 1$ splňuje vztah (2) úplný orientovaný graf.

[8]) Na obr. 1 je sestrojen graf G_0 pro $k = 3$, $n = 5$.

existovalo S, nemohla by to být dráha; ta by totiž měla délku $k - 2i + 2$, což je číslo jiné parity než $k - 1$. Mohli bychom tedy S složit[9]) z dráhy mezi i, j a z cyklů délek 2 nebo 1. Platilo by tedy

$$k - 1 = (k - 2i + 2) + 2\xi + \eta\,, \tag{3}$$

kde ξ (resp. η) je celé nezáporné číslo znamenající počet užitých cyklů délky 2 (resp. 1). Z (3) plyne $\eta \equiv 1 \pmod 2$, tedy $\eta > 0$. Muselo by tedy S procházet uzlem 1 nebo w (které mají smyčku). Platí však

$$\varrho(i, 1) + \varrho(1, i) + \varrho(i, j) = \varrho(i, j) + \varrho(j, n) + \varrho(n, j) = k > k - 1\,,$$

takže existenci spojení S je nutno zamítnout.

Z uvedených dvou úvah plyne vztah (2). Závěrem příkladu poznamenejme, že zůstává otevřená otázka, zda pro $k > n - 1$ je možno sestrojit primitivní graf splňující (2).

Věta 2. *Budiž G primitivní graf; nechť c je přirozené číslo splňující nerovnost*

$$\min G < c < \max G\,.$$

Potom existuje v G uzel, jehož ukazatel je c.

Důkaz. Zvolme uzel x (resp. y) mající ukazatele $\max G$ (resp. $\min G$) a sestrojme dráhu D vedoucí z x do y. Ze všech uzlů dráhy D majících ukazatele většího než c vyhledejme ten, který je na dráze D poslední; označme jej z a jeho ukazatele c_0. Platí $z \neq y$, má tedy uzel z na D následovníka z' s ukazatelem c_0'. Platí $c_0' \leqq c$. Ukážeme, že $c_0' = c$. Předpokládejme naopak, že $c_0' < c$, tedy $c_0' \leqq c - 1$. Potom ke každému uzlu $w \in G$ existuje spojení S' (délky c_0') mezi z' a w; doplníme-li každé S' na počátku uzlem z a hranou $\overrightarrow{zz'}$, dostáváme, že ukazatel uzlu z je nejvýše c (spor). Důkaz je tím podán.

Důsledkem věty 2 je, že pro každý primitivní graf G platí

$$\max G - \min G \leqq n - 1\,. \tag{4}$$

Odhad (4) už není možno zlepšit; platí totiž dokonce toto tvrzení: Ke každému celému číslu k, pro něž platí $0 \leqq k \leqq n - 1$, existuje graf G_k takový, že

$$\max G_k - \min G_k = k\,. \tag{5}$$

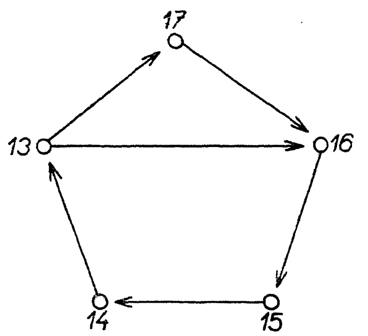
Případu $k = 0$ je věnován příklad 1. Graf G_1 dostaneme z úplného orientovaného grafu tím, že v něm vynecháme smyčku u jednoho uzlu (potom je totiž $\max G_1 = 2$, $\min G_1 = 1$). Pro $k \geqq 2$ dostaneme G_k tak, že graf G_0 z příkladu 1 zbavíme smyčky u uzlu 1. Abychom dokázali, že takto definovaný graf G_k splňuje vztah (5), dokážeme, že uzly opatřené smyčkou mají ukazatele k, uzel 1 pak ukazatele $u_1 = 2k$. První tvrzení je zřejmé a rovněž zřejmě platí $u_1 \leqq 2k$. Kdyby bylo $u_1 < 2k$, pak by podle lemmatu 1 existovalo mezi 1 a 1 spojení S délky $2k - 1$. Protože číslo $2k - 1$ je liché, muselo by S

[9]) Srovnej obdobnou větu pro neorientované grafy u Königa [5], str. 7, věta 3.

procházet některým uzlem opatřeným smyčkou. Délka spojení S by tedy byla alespoň $2k$, což je spor. Je tedy $u_1 = 2k$ a pro G_k platí (5).

Všimněme si nyní odhadů ukazatele primitivnosti primitivních grafů. Toto zkoumání lze samozřejmě přeložit též do výroků o nezáporných nerozložitelných maticích. FROBENIUS [2] se nezabýval odhadem ukazatele primitivnosti, i když — jak uvádí WIELANDT [10] — je možno z jeho úvah vyčísti odhad $\max G \leqq 2n^2 - 2n$, kde n je počet uzlů (čili stupeň matice). Wielandt sám udává lepší odhad $\max G \leqq (n - 1)^2 + 1$. Důkaz tohoto odhadu, který se už nedá zlepšit, lze najít např. v práci V. PTÁKA [7].*) V celém tomto článku budeme označovat W_n ten graf o n uzlech ($n \geqq 2$), jehož incidenční matice je

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix}.$$



Obr. 2.

To je totiž „extrémní" primitivní matice uváděná Wielandtem (pro W_n platí $\max W_n = (n - 1)^2 + 1$). V dalším ještě uvidíme, že W_n je jediný primitivní graf o n uzlech mající ukazatele primitivnosti $(n - 1)^2 + 1$. (Obr. 2 uvádí W_5, kde u každého uzlu je připsán jeho ukazatel.)

Než přistoupíme k dalším úvahám, uvedeme dvě věty o dobře orientovaných grafech, které jsou v pracích [7], [8] vyjádřeny v podstatě jako věty o nezáporných nerozložitelných maticích.

A. Je-li G dobře orientovaný graf, potom nastane právě jeden z těchto případů: a) Grafy $G^2, G^3, G^4, \dots, G^n$ jsou všechny dobře orientovány; pak G^m je dobře orientovaný graf pro každé přirozené m a pro $m \geqq 1 + (n - 1)^2$ je G^m úplný orientovaný graf. b) Některá mocnina G^m není dobře orientovaný graf; pak existuje dělitel $d > 1$ čísla m tak, že G^d je (nesouvislý) graf, jehož každá z d komponent je dobře orientována.

B. Nechť $c_1, c_2, \dots, c_r$ jsou délky všech cyklů dobře orientovaného grafu G. Pak nutná a postačující podmínka k tomu, aby G byl primitivní, je, aby čísla $c_1, c_2, \dots, c_r$ byla nesoudělná.

Lemma 2. *Nechť v je přirozené číslo. V primitivním grafu G nechť je x uzel, z něhož vychází aspoň v různých hran. Budiž l délka cyklu Z, pro nějž $x \in Z$.*[10]) *Potom ukazatel uzlu x je nejvýše $(n - v)\, l + \min(1; v - 1)$.*

*) V průběhu recensního řízení našeho příspěvku vyšla práce J. C. HOLLADAY — R. S. VARGA: *On powers of non-negative matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 9, No 4, 1958, 631—634. Její autoři dokazují Wielandtův odhad $(n - 1)^2 + 1$ a podrobněji si všímají těch primitivních matic, které mají v hlavní diagonále několik kladných prvků.

[10]) V primitivním grafu prochází totiž každým uzlem aspoň jeden cyklus.

Důkaz. Nejprve zavedeme jedno označení. Pro $v > 1$ (resp. pro $v = 1$) označme U_s množinu všech uzlů grafu G, do nichž vede z x spojení délky $1 + ls$ (resp. délky ls). Protože každé takové spojení je možno „prodloužit" tím, že na jeho začátek zařadíme cyklus Z, platí

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots . \tag{6}$$

Ukážeme, že z předpokladu $U_i = U_{i+1}$ plyne $U_i = \Pi\{G\}$. Kdyby platilo $U_i \neq \Pi\{G\}$, pak bychom (vzhledem k $U_i = U_{i+1}$) v grafu G^l nenašli žádnou hranu počínající v nějakém uzlu z množiny U_i a končící mimo tuto množinu, graf G^l by tedy nebyl dobře orientovaný; podle věty A by tedy G nebyl dobře orientovaný (spor). Protože U_0 má alespoň v prvků, dostáváme v posloupnosti (6), že $U_{n-v} = \Pi\{G\}$. Pro $v = 1$ je tedy ukazatel uzlu x nejvýše $(n - 1)\, l$, pro $v \geqq 2$ nejvýše $(n - v)\, l + 1$, což jsme měli dokázat.

V dalším příkladě si všimneme podrobněji grafu W_n.

Příklad 2. Platí $\min W_n = n^2 - 3n + 3$, $\max W_n = n^2 - 2n + 2$. V grafu W_n existuje jediný uzel s ukazatelem $\min W_n$ a jediný uzel s ukazatelem $\max W_n$.

Důkaz. Abychom dokázali, že platí $\min W_n = n^2 - 3n + 3$, očíslujme uzly grafu W_n tak, aby jeho incidenční matice měla tvar uvedený na str. 308. Existuje zřejmě jediná dráha D mezi uzly 1 a n a ta má délku $n - 1$. Nechť u_1 (resp. u_n) je ukazatel uzlu 1 (resp. n). Platí zřejmě $u_1 \leqq u_n + (n - 1)$. Kdyby bylo $u_1 < u_n + (n - 1)$, potom by podle lemmatu 1 pro každý uzel $y \in W_n$ existovalo spojení $S_{1,y}$ mezi 1 a y mající délku $u_n + n - 2 \geqq n - 1$. Každé takové $S_{1,y}$ by počínalo drahou D. Odstraníme-li z $S_{1,y}$ tuto dráhu, dostali bychom, že pro každý uzel $y \in W_n$ existuje spojení mezi n a y mající délku $u_n - 1$ (spor). Je tedy $u_1 = u_n + (n - 1)$. S přihlédnutím k větě 2 plyne už snadno zbytek tvrzení obsaženého v příkladě 2. Všimněme si též, že graf W_n je druhým příkladem grafu, pro nějž ve (4) nastane rovnost.

Věta 3. *Pro každý primitivní graf G o n uzlech ($n \geqq 2$) platí*

$$\min G \leqq n^2 - 3n + 3\,; \tag{7}$$

přitom existuje primitivní graf G, pro nějž ve vztahu (7) *nastává rovnost.*

Důkaz. Zvolme v grafu G cyklus Z, který má nejmenší délku (označme ji l). Nemůže být $l = n$; pak by totiž musela existovat ještě hrana $h \in G$ neležící v Z, to však je spor s minimalitou cyklu Z. Je tedy $l \leqq n - 1$, přičemž existuje uzel y nepatřící do Z. Vyhledejme v grafu G dvojici uzlů x, y, kde $x \in Z$, y non $\in Z$, pro niž je $\varrho(x, y)$ minimální. Zřejmě $\varrho(x, y) = 1$. Z uzlu x tedy vycházejí aspoň dvě hrany (jedna ležící v Z, druhá nikoliv). Použijme nyní pro odhad ukazatele uzlu x lemmatu 2. Klademe zde $v = 2$, $l \leqq n - 1$; pro ukazatele uzlu x máme horní odhad $(n - 2)(n - 1) + 1$ a je tedy tím spíše $\min G \leqq$ $\leqq (n - 2)(n - 1) + 1$.

Z příkladu 2 víme, že rovnost ve vztahu (7) nastane pro graf W_n.[11]) Důkaz je tím podán.

Věta 3 doplňuje odhad uváděný H. WIELANDTEM v práci [10]. Je jí totiž řešena tato úloha: Vyhledejte nejmenší přirozené číslo p takové, aby pro každou čtvercovou nezápornou primitivní matici A stupně n-tého měla matice A^p alespoň jeden řádek složený z čísel vesměs kladných.

Lemma 3. *Nechť v primitivním grafu G o n uzlech ($n \geqq 2$) existuje cyklus Z délky l; potom*

$$\max G \leqq (n-2)\, l + n \,.$$

Důkaz.[12]) Každý uzel $x \in Z$ má podle lemmatu 2 (kde klademe $v = 1$) ukazatele nejvýše $(n-1)\, l$. Zvolíme-li nyní uzel y neležící v Z, existuje uzel $x_0 \in Z$ tak, že $\varrho(y, x_0) \leqq n - l$, neboť dráha, kterou je možno sestrojit bez užití uzlů cyklu Z, má délku nejvýše $n - l - 1$. Ukazatel uzlu y je tedy nejvýše

$$\varrho(y, x_0) + (n-1)\, l \leqq (n-2)\, l + n \,.$$

Tím je důkaz podán.

Věta 4. *Jestliže pro primitivní graf G s n uzly ($n \geqq 2$) platí* $\max G = (n-1)^2 + 1$, *pak G je roven grafu W_n.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že cyklus nejmenší délky v grafu G má délku $l = n - 1$. Kdyby tomu tak nebylo, pak by vzhledem k tvrzení B nemohlo být $l = n$, tedy by platilo $l \leqq n - 2$, což pro $n = 2$ není možné a což pro $n > 2$ podle lemmatu 3 dává $\max G \leqq (n-2)^2 + n$ čili $n \leqq 2$ (spor). Graf G má tedy cykly dvou typů: o n uzlech a o $n - 1$ uzlech. Označme Z_n (resp. Z_{n-1}) jeden z cyklů délky n (resp. $n - 1$) v grafu G. Uzly a hrany cyklů Z_n, Z_{n-1} tvoří zřejmě graf W_n, tedy W_n je hranovým podgrafem v G. Ukážeme, že nemůže být podgrafem vlastním.

Nechť v G existuje hrana h nepatřící do W_n; pak h tvoří s jistými $n - 2$ hranami cyklu Z_n hrany cyklu Z'_{n-1} délky $n - 1$. Uzly a hrany cyklů Z_n, Z'_{n-1} tvoří opět graf W'_n téže struktury jako W_n. Ukazatel každého uzlu $x \in G$ (uvažovaný v grafu G) je nejvýše roven minimu ukazatelů, jež uzlu x patří v grafech W_n, W'_n. V grafu W_n (resp. W'_n) existuje (podle př. 2) jediný uzel $x_{\max}$ (resp. $x'_{\max}$) s ukazatelem $(n-1)^2 + 1$, při čemž $x_{\max} \neq x'_{\max}$. Je tedy $\max G < (n-1)^2 + 1$. Existenci takové hrany h je proto nutno zamítnout. Důkaz je podán.

Všimněme si ještě primitivních grafů H se symetrickou incidenční maticí. Je někdy zvykem nazývat ty grafy, které s každou hranou $\overrightarrow{uv}$ obsahují též hranu $\overrightarrow{vu}$, grafy *neorientovanými*. Vzhledem k tomu, že graf H (s alespoň dvěma uzly) obsahuje cykly délky 2, můžeme s přihlédnutím k tvrzení B

[11]) Pro $n = 5$ srovnej obr. 2.

[12]) Používáme zde myšlenky obsažené v práci [7].

vyjádřit nutnou a postačující podmínku primitivnosti grafu H takto: *Graf H obsahuje alespoň jeden cyklus liché délky.* V teorii neorientovaných grafů nazýváme ty grafy, jejichž každá kružnice má sudou délku, *sudými* grafy (viz [5]). Lze tedy souhrnně říci, že v množině neorientovaných grafů jsou primitivní právě ty grafy, které jsou souvislé a nejsou sudé.

Věta 5. *Budiž $n \geqq 2$. Pro každý primitivní neorientovaný graf H o n uzlech platí* $\max H \leqq 2n - 2$*; přitom existuje primitivní neorientovaný graf H_0 takový, že* $\max H_0 = 2n - 2$.**)

Důkaz. Odhad plyne z lemmatu 2, kde položíme $l = 2$, $v = 1$. Za graf H_0 stačí volit graf G_{n-1} popsaný na str. 307, jenž zřejmě je neorientovaný. Důkaz je podán.

4. Spektrum konečného orientovaného grafu

V nedávné době uveřejnili L. Collatz a U. Sinogowitz práci [1], ve které studují některé algebraické vlastnosti symetrických matic užitím neorientovaných grafů. Protože v pojetí výše popsaném je možno pokládat neorientovaný graf za speciální případ grafu orientovaného, můžeme přirozeně zobecnit tuto problematiku na grafy orientované.

Abychom mohli definovat pojem spektra konečného orientovaného grafu G, sestrojme nejprve incidenční matici A_G grafu G. Dále sestrojme determinant

$$\varphi(\lambda) = \det (A_G - \lambda E_n)\,,$$

kde E_n je jednotková matice n-tého stupně. Rovnici $\varphi(\lambda) = 0$ nazveme *rovnicí grafu G*, množina kořenů této rovnice (tj. množina charakteristických čísel matice A_G) je *spektrum* grafu G.

Incidenční matice grafu je nezáporná matice; jak známo (viz např. [3]), má každá nezáporná matice alespoň jedno charakteristické číslo nezáporné (a tedy reálné). Maximální reálné charakteristické číslo matice A_G nazveme *indexem* grafu G.

Dá se dokázat, že rovnice grafu (a tedy ani jeho spektrum) nezávisí na volbě očíslování jeho uzlů. Také je zřejmé, že při změně orientace všech hran grafu se rovnice nezmění.

V následující větě 6 potřebujeme pojem kvasikomponenty grafu. V grafu G nazveme *volnou hranou* každou hranu grafu G, která nepatří do žádného cyklu grafu G. Odstraňme z G všechny volné hrany a označme G^* takto vzniklý graf (nemá-li G žádnou volnou hranu, volme za G^* graf G). Každou komponentu grafu G^* nazveme nyní *kvasikomponentou* grafu G.

**) Odhad exponentu pro symetrickou primitivní matici je uveden též v práci z poznámky*).

Je vidět, že každá dobře orientovaná komponenta grafu je jeho kvasikomponentou.

Kvasikomponenty grafu G je možno pokládat za uzly jistého grafu $\Sigma(G)$ který G. N. Povarov [6] nazývá *каркас*; přitom mezi dvěma uzly g_1, g_2 grafu $\Sigma(G)$, které odpovídají kvasikomponentám G_1, G_2 grafu G, vede hrana $\overrightarrow{g_1g_2}$ právě tehdy, existují-li uzly x_1, x_2 ($x_i \in G_i$) tak, že $\overrightarrow{x_1x_2} \in G$. V práci [9] byl graf $\Sigma(G)$ nazván *faktorovým grafem* grafu G.

Věta 6. *Nechť daný konečný orientovaný graf G má kvasikomponenty $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ($k \geqq 1$). Nechť $\varphi_i(\lambda) = 0$ je rovnice i-té kvasikomponenty. Potom rovnice grafu G zní $\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\lambda) = 0$.*

Důkaz. Případ $k = 1$ je triviální; budiž tedy $k \geqq 2$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny grafy, které mají $k - 1$ kvasikomponent, a uvažujme graf G o kvasikomponentách $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že žádný uzel kvasikomponenty G_1 není koncovým uzlem žádné volné hrany grafu G (v grafu $\Sigma(G)$ existuje totiž — jak známo — uzel, který není koncovým uzlem žádné hrany tohoto grafu). Vynecháme-li nyní v grafu G uzly a hrany kvasikomponenty G_1 a event. ještě všechny volné hrany grafu G, které vycházejí z některých uzlů této kvasikomponenty, vznikne graf H mající $k - 1$ kvasikomponent $G_2, G_3, \ldots, G_k$. Podle indukčního předpokladu má graf H rovnici $\varphi_0(\lambda) = \prod_{i=2}^{k} \varphi_i(\lambda) = 0$. Abychom odvodili rovnici $\varphi(\lambda) = 0$ grafu G, očíslujme nejprve všechny uzly jeho kvasikomponenty G_1 po řadě čísly $1, 2, \ldots, r$ (kde r značí počet uzlů kvasikomponenty G_1) a pak ostatní uzly grafu G očíslujme libovolně čísly $r + 1$, $r + 2, \ldots, n$. Determinant $\varphi(\lambda)$ můžeme nyní rozvést podle řádků o indexech $1, 2, \ldots, r$ (věta Laplace-ova). Zřejmě platí

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\, \varphi_0(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\lambda)\,,$$

čímž je důkaz podán.

Než přistoupíme k další úvaze, uveďme jeden příklad.

Příklad 3. Je-li G cyklus o n uzlech, pak snadnou úpravou zjistíme, že jeho rovnice zní $\lambda^n - 1 = 0$. Spektrum tvoří tedy čísla $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ (pro $k = 1, 2, \ldots, n$), index grafu G je 1.

Věta 7. *Obsahuje-li graf G jako podgraf alespoň jeden cyklus, pak index grafu G je $\geqq 1$.*

Důkaz. Zvolme v G ten cyklus $Z_{\min}$, které má nejmenší délku (označme ji l). Očíslujme nyní uzly grafu G takto: Nejprve očíslujme uzly cyklu $Z_{\min}$ čísly $1, 2, \ldots, l$ a potom očíslujme libovolně i ostatní uzly grafu G. Odstraníme-li z matice A_G všechny prvky a_{ij}, u nichž $\max(i, j) > l$, dostaneme matici M.

Vzhledem k minimalitě cyklu $Z_{\min}$ je M incidenční maticí grafu $Z_{\min}$. Podle příkladu 3 má $Z_{\min}$ index $r' = 1$. Označíme-li r index grafu G, platí podle známé věty (viz např. [3], str. 336), že $r' \leqq r$, tedy $r \geqq 1$, c. b. d.

Věta 8. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby graf G byl acyklický,*[13]) *je, aby jeho spektrum bylo tvořeno vesměs nulami.*

Důkaz. Nechť G je acyklický graf. Jeho kvasikomponenty jsou pak isolované uzly, tedy podle věty 6 jeho rovnice zní $\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n = 0$.

Není-li G acyklický, pak podle věty 7 jeho index je $\geqq 1$. Tím je důkaz podán.

LITERATURA

[1] *L. Collatz — U. Sinogowitz*: Spektren endlicher Grafen, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, Band *21*, Heft 1/2, 1957, 63—77.

[2] *G. Frobenius*: Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, Sitzungsberichte der Preuss. Akad. d. Wiss., (1912), 456—477.

[3] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц, Москва, 1953.

[4] *I. N. Herstein*: A note on primitive matrices, Amer. Math. Monthly, Vol. *61* (1954), 18—20.

[5] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[6] *Г. Н. Поваров:* О матричном анализе связей в частично ориентированных графах, Успехи мат. наук *11*, 5 (71), 195—202 (1956).

[7] *V. Pták*: Об одной комбинаторной теореме и ее применении к неотрицательным матрицам, Чех. мат. ж., *8* (*83*), 1958, 487—495.

[8] *V. Pták — J. Sedláček*: Об индексе импримитивности неотрицательных матриц, Чех. мат. ж., *8* (*83*), 1958, 496—501.

[9] *J. Sedláček*: O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky, *82*, (1957), 195—215.

[10] *H. Wielandt*: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, Math. Zeitschrift, *52*. Band, 1950, 642—648.

Резюме

О МАТРИЦАХ ИНЦИДЕНТНОСТИ ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 15/VII 1958 г.)

Обозначим вершины конечного ориентированного графа G числами $1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 2$). Если существует ребро $\overrightarrow{ij} \in G$, то положим $a_{ij} = 1$, если не существует $\overrightarrow{ij} \in G$, то положим $a_{ij} = 0$; матрицу $\|a_{ij}\|$ назовем матрицей инцидентности графа G.

[13]) Graf je *acyklický*, jestliže neobsahuje jako podgraf žádný cyklus.

Конечную последовательность $u_0, \overrightarrow{u_0u_1}, u_1, \ldots, u_{m-1}, \overrightarrow{u_{m-1}u_m}, u_m$ назовем *соединением* между вершинами графа u_0 и u_m, если u_i — вершины, а $\overrightarrow{u_iu_{i+1}}$ — ребра графа G; число m является его *длиной*. Вершину $x \in G$ назовем *примитивной*, если существует натуральное число d так, что для каждой вершины $y \in G$ существует соединение между x и y, имеющее длину d (наименьшее из этих чисел d назовем *указателем* вершины x). Если каждая вершина графа G примитивна, то G примитивен; обозначим через $\max G$ (соотв. через $\min G$) наибольший (соотв. наименьший) из всех указателей в графе G. Матрица инцидентности примитивного графа является примитивной матрицей (в смысле Фробениуса [2]). Согласно [10] имеет место неравенство $\max G \leqq (n-1)^2 + 1$. Мы доказываем следующие теоремы (в них G обозначает примитивный граф с n вершинами)

Пусть дано натуральное число $c \in (\min G; \max G)$; *тогда в* G *существует вершина, указатель которой равен* c.

Выполняется неравенство $\max G - \min G \leqq n - 1$; *для каждого целого числа* $k \in \langle 0; n-1 \rangle$ *существует граф* G, *для которого* $\max G - \min G = k$.

Имеет место неравенство $\min G \leqq n^2 - 3n + 3$; *существует граф* G, *для которого здесь имеет место знак равенства.*

Существует только один граф G, *для которого* $\max G = (n-1)^2 + 1$.

Неориентированный граф (т. е. граф с симметрической матрицей инцидентности) примитивен тогда и только тогда, если он является связным и не является четным.

Коллац и Синоговиц [1] показали, что некоторые свойства спектра симметрической матрицы можно легко вывести из геометрических свойств подходящего неориентированного графа H. В заключении статьи мы займемся обобщением такой проблематики: Матрица не должна быть симметрической, и тогда H — ориентированный граф.

Пусть A — матрица инцидентности графа H; пусть E_n — единичная матрица n-го порядка. Тогда уравнение

$$\varphi(\lambda) = \det (A - \lambda E_n) = 0 \tag{I}$$

назовем *уравнением графа* H. Уравнение (I) можно упростить при помощи понятия *квазикомпоненты* графа H. Удалим из графа H каждое ребро, не лежащее ни в одном цикле графа H. Каждую компоненту полученного таким образом подграфа мы называем *квазикомпонентой* графа H. Справедлива теорема:

Пусть H *имеет квазикомпоненты* $H_1, H_2, \ldots, H_k$ $(k \geqq 1)$; *пусть* $\varphi_i(\lambda) = 0$ *есть уравнение* i*-й квазикомпоненты. Тогда уравнение графа* H *имеет вид*

$$\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\lambda) = 0 .$$

Zusammenfassung

ÜBER INZIDENZMATRIZEN GERICHTETER GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Eingelangt am 15. Juli 1958)

Die Knotenpunkte eines endlichen gerichteten Graphen G bezeichnen wir mit $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 2)$. Wenn eine Kante $\overrightarrow{ij} \in G$ existiert, dann setzen wir $a_{ij} = 1$, wenn sie nicht existiert, dann ist $a_{ij} = 0$; die Matrix $\|a_{ij}\|$ nennen wir *Inzidenzmatrix* des Graphen G. Eine endliche Folge u_0, $\overrightarrow{u_0u_1}$, $u_1, \ldots, u_{m-1}$, $\overrightarrow{u_{m-1}u_m}$, u_m nennen wir *Vereinigung* zwischen den Knotenpunkten u_0 und u_m des Graphen G, wenn u_i die Knotenpunkte und $\overrightarrow{u_iu_{i+1}}$ die Kanten des Graphen G sind; m ist die *Länge* der Vereinigung. Den Knotenpunkt $x \in G$ nennen wir *primitiv*, wenn eine natürliche Zahl d so existiert, dass für jeden Knotenpunkt $y \in G$ die Vereinigung zwischen x und y existiert, welche die Länge d hat (die kleinste der Zahlen d ist der *Zeiger* des Knotenpunktes x). Wenn jeder Knotenpunkt des Graphen G primitiv ist, dann ist G *primitiv*; wir bezeichnen $\max G$ (bezw. $\min G$) den grössten (bezw. kleinsten) aller Zeiger im Graphen G. Die Inzidenzmatrix eines primitiven Graphen ist eine primitive Matrix (im Sinne von FROBENIUS [2]). Nach [10] gilt $\max G \leqq (n-1)^2 + 1$. Wir beweisen folgende Sätze (G bedeutet einen primitiven Graphen mit n Knotenpunkten):

Es sei eine natürliche Zahl $c \in (\min G; \max G)$ *gegeben; dann existiert in G ein Knotenpunkt, dessen Zeiger gleich c ist.*

Es gilt $\max G - \min G \leqq n - 1$; *zu jeder ganzen Zahl* $k \in \langle 0; n-1 \rangle$ *existiert ein Graph G, für den gilt* $\max G - \min G = k$.

Es gilt $\min G \leqq n^2 - 3n + 3$; *es ist ein G so, dass das Gleichheitszeichen gilt.*

Es existiert ein einziger Graph G, für den $\max G = (n-1)^2 + 1$ *gilt.*

Ein nichtgerichteter Graph (d. h. mit symmetrischer Inzidenzmatrix) *ist dann und nur dann primitiv, wenn er zusammenhängend und kein paarer Graph ist.*

COLLATZ und SINOGOWITZ [1] haben gezeigt, dass einige Eigenschaften des Spektrums einer symmetrischen Matrix aus den geometrischen Eigenschaften eines nichtgerichteten Graphen H abgeleitet werden können. Zum Schluss unseres Beitrages behandlen wir die Verallgemeinerung dieser Problematik: Die Matrix muss nicht symmetrisch sein, H ist dann gerichtet.

Es sei A die Inzidenzmatrix des Graphen H; es sei E_n die Einheitsmatrix n-ten Grades. Dann nennen wir

$$\varphi(\lambda) = \det (A - \lambda E_n) = 0 \qquad \text{(I)}$$

die *Gleichung des Graphen H*. Die Gleichung (I) lässt sich mit Hilfe des Begriffes Quasikomponente des Graphen H vereinfachen. Wenn wir aus H jede Kante, die in keinem Zyklus von H liegt, entfernen, dann nennen wir jede Komponente des so entstandenen Untergraphen *Quasikomponente* des Graphen H. Es gilt folgender Satz:

Es seien $H_1, H_2, \ldots, H_k$ Quasikomponenten des Graphen H; es sei $\varphi_i(\lambda) = 0$ die Gleichung der i-ten Quasikomponente. Dann lautet die Gleichung des Graphen H

$$\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\lambda) = 0 .$$