Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

REFERÁTY

SOUVISLOST SPEKTER DVOU KRAJOVÝCH ÚLOH

(Vlastní referát o přednášce L. JANOŠE konané v matematické obci pražské dne 16. 3. 1959)

Při vyšetřování spektra vlastních čísel α_i krajové úlohy

$$\left.\begin{aligned} \alpha z''(x) + y(x)\,\mu(x) = 0\,, \quad y(0) = y(1) = 0\,, \\ \alpha y''(x) + z(x)\,p(x) = 0\,, \quad z(0) = z(1) = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kde $\mu(x)$ a $p(x)$ jsou dané nezáporné spojité funkce na $\langle 0, 1\rangle$, se naskýtá otázka, v jakém vztahu je spektrum vlastních čísel α_i ke spektru vlastních čísel β_i resp. γ_i krajových úloh

$$\beta\varphi''(x) + \varphi(x)\,\mu(x) = 0\,, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \tag{2}$$

resp.

$$\gamma\psi''(x) + \psi(x)\,p(x) = 0\,, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0\,. \tag{3}$$

Obsahem přednášky bylo odvození jistých nerovností mezi maximálními vlastními čísly úloh (1) (2) a (3).

Integrací rovnic (1) resp. (2) resp. (3) s ohledem na příslušné okrajové podmínky se převedou krajové úlohy (1) resp. (2) resp. (3) na jim ekvivalentní integrální rovnice:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 K(x, t)\,y(t)\,\mathrm{d}m(t) = \alpha z(x)\,, \\ \int_0^1 K(x, t)\,z(t)\,\mathrm{d}P(t) = \alpha y(x) \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

resp.

$$\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}m(t) = \beta\varphi(x) \tag{2a}$$

resp.

$$\int_0^1 K(x, t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}P(t) = \gamma\psi(x)\,, \tag{3a}$$

kde jádro $K(x, t)$ je definováno vztahy

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1 - t) & \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq t \leqq 1\,, \\ t(1 - x) & \text{pro} \quad 0 \leqq t \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

a kde funkce $m(x)$ a $P(x)$ jsou primitivními funkcemi k funkcím $\mu(x)$ a $p(x)$; tedy

$$m'(x) = \mu(x)\,; \quad P'(x) = p(x)\,.$$

Chápeme-li však integrace na levých stranách (1a), (2a) a (3a) ve smyslu Stieltjesova integrálu, naskytá se možnost důležitého zobecnění tím, že za funkce $m(x)$ a $P(x)$ připustíme libovolnou funkci nerostoucí na $\langle 0, 1\rangle$. Množinu všech takových funkcí označíme $\mathfrak{S}$. Tím se každé vlastní číslo α stává funkcionálem na $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, a můžeme psát: $\alpha\,(m, P)$, $m, P \in \mathfrak{S}$.

Podobně vlastní čísla β a γ jsou funkcionály na $\mathfrak{S}$ a je $\beta_i(m)$, $\gamma_i = \beta_i(P)$.

V dalším se přednášející zabýval jen maximálními vlastními čísly rovnic (1a) resp.

(2a) resp. (3a), tedy čísly α_1, β_1, γ_1, které již psal bez indexu. Z rovnic (1a), (2a) a (3a) okamžitě plynou funkcionální vztahy

$$\alpha(m, m) = \beta(m) . \tag{4}$$

$$\alpha(m, P) = \alpha(P, m) , \tag{5}$$

$$m, P \in \mathfrak{S} .$$

Jako první pomocný výsledek byl odvozen extremální princip:

$$\alpha(m, P) = \sup_{y, z \in C} \frac{\int_0^1 \int_0^1 K(x, t)\, y(x)\, z(t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}m \int_0^1 z^2\, \mathrm{d}P}} , \tag{6}$$

kde C je prostor spojitých funkcí na $\langle 0, 1\rangle$. Na základě tohoto principu byly odvozeny nerovnosti:

$$\alpha^2 \leqq \beta\gamma , \tag{7}$$

$$\alpha^2 \geqq \beta\gamma \frac{\int_0^1 \varphi'\psi'\, \mathrm{d}x}{\int_0^1 \varphi'^2\, \mathrm{d}x \int_0^1 \psi'^2\, \mathrm{d}x} , \tag{8}$$

kde funkce $\varphi(x)$ resp. $\psi(x)$ jsou řešením úloh (2) resp. (3).

Nerovnosti (7) a (8) vyplývají z extremálního principu (6) a jemu analogických principů pro čísla β a γ při užití rovnic (1), (2), (3) a příslušných krajových podmínek. Bylo proto při odvozování těchto nerovností nutno předpokládat, že funkce $m(x)$, $P(x) \in \mathfrak{S}$ mají spojité derivace $\mu(x) = m'(x)$, $p(x) = P'(x)$ a leží tedy v jisté podmnožině $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ všech funkcí neklesajících na $\langle 0, 1,\rangle$ majících spojitou derivaci.

Pro případ, že je tedy $m, P \in \mathfrak{S}'$, platí nerovnost:

$$\alpha^2(m, P) \leqq \beta(m)\, \beta(P) \tag{9}$$

a jde nyní o to, rozšířit platnost této nerovnosti na celé $\mathfrak{S}$.

Za tím účelem byla zavedena do $\mathfrak{S}$ takové topologie, aby byly splněny požadavky

1. $\mathfrak{S}'$ je hustá v $\mathfrak{S}$.
2. Funkcionál $\alpha(m, P)$ je spojitý na $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$.

Bylo ukázáno, že oběma těmto podmínkám vyhovuje na příklad topologie zavedená pomocí slabé konvergence definované:

$\lim m_i = m$ tedhy a jen tehdy, když pro libovolné $\varphi \in C$ platí:

$$\lim \int_0^1 \varphi\, \mathrm{d}m_i = \int_0^1 \varphi\, \mathrm{d}m .$$

Z toho pak jednoduše plyne obecná platnost obou nerovností.

Použitím vztahu (4) lze výsledek přepsat ve tvaru

$$\alpha^2(m, P) \leqq \alpha(m, m)\, \alpha(P, P) ,$$

$$\alpha^2(m, P) \geqq \alpha(m, m)\, \alpha(P, P) \frac{\int_0^1 \varphi'\psi'\, \mathrm{d}x}{\int_0^1 \varphi'^2\, \mathrm{d}x \int_0^1 \psi'^2\, \mathrm{d}x} .$$

Poměrně snadno lze ještě odvodit analogickou nerovnost pro „stopy“ integrálních rovnic (1a), (2a), (3a). Eliminací $z(x)$ ze soustavy (1a) dostane se totiž rovnice

$$\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}m(t) = \alpha^2\, y(x) ,$$

kde jádro $\Gamma(x, t)$ je dáno vztahem

$$\Gamma(x, t) = \int_0^1 K(x, s)\, K(t, s)\, \mathrm{d}P(s)\,.$$

Pro $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ tedy platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}P(t)$$

a pro

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \text{ platí zřejmě}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_1 = \int_0^1 K(x, x)\, \mathrm{d}m(x) = \int_0^1 x(1 - x)\, \mathrm{d}m(x)$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \int_0^1 K(x, x)\, \mathrm{d}P(x) = \int_0^1 x(1 - x)\, \mathrm{d}P(x)\,.$$

Z vlastnosti funkce $K(x, t)$ lze snadno dokázat, že

$$K^2(x, t) \leqq xt(1 - x)(1 - t)\,, \quad x, t \in \langle 0, 1 \rangle\,,$$

z čehož pro libovolné $m, P \in \mathfrak{S}$ plyne nerovnost

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i\,.$$

Hlavním výsledkem tedy jsou dvě analogické nerovnosti pro první vlastní čísla a pro stopy úloh (1), (2), (3):

$$\alpha_1^2 \leqq \beta_1 \gamma_1\,, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i\,.$$

Ludvík Janoš, Praha

DVOJNÉ LOXODROMY

(Referát o přednášce prof. dr. WALTERA WUNDERLICHA, děkana přírodovědecké fakulty Vysoké školy technické ve Vídni, konané v matematické obci pražské dne 23. března 1959.)

Loxodromou na rotační ploše se nazývá křivka, protínající všechny poledníky pod konstantním úhlem. Tento pojem je možno zobecniti: Loxodroma je křivka, protínající roviny některého svazku pod konstantním úhlem; dvojná loxodroma je pak loxodromou vzhledem ke dvěma svazkům rovin. Diferenciální rovnice dvojných loxondrom jsou velmi složité a jejich obecné řešení není známo. Přednášející nalezl částečné výsledky ve dvou směrech:

1. Existující kružnice, jež jsou dvojnými loxodromami. Kružnice je právě tehdy loxodromou svazku, jestliže její Laguerrovy body (body na ose kružnice ve vzdálenosti ri od středu) leží v isotropických rovinách svazku. Kombinací předchozího výsledku pro dva svazky rovin s mimoběžnými osami dostáváme celkem existenci osmi dvojných loxodrom, jež jsou kružnicemi.

Uvažují-li se místo svazků rovin svazky ploch kulových a ponechá se uvedená definice loxodromy, existuje ke dvěma svazkům kulových ploch 32 dvojných loxodrom, jež jsou kružnicemi.

2. V případě protínajících se os obou svazků rovin se diferenciální rovnice dvojných loxodrom značně zjednoduší a je možno řešit je kvadraturami, i když ne explicitně. Přednášející se konečně zabýval některými vlastnostmi dvojných loxodrom ve speciálních případech.

Alois Švec, Praha