Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Novák

Užití kombinatoriky ke studiu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 3, 257--282

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117304`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 84 * PRAHA, 20. VIII. 1959 * ČÍSLO 3

UŽITÍ KOMBINATORIKY KE STUDIU ROVINNÝCH KONFIGURACÍ $(12_4, 16_3)$

JIŘÍ NOVÁK, Liberec

(Došlo dne 28. února 1958)

DT:513.712.1

V tomto článku jsou schemata konfigurací $(12_4, 16_3)$ rozdělena do pěti skupin, jež jsou v úzké souvislosti s počtem tzv. cizích přímek konfigurací. Toto rozdělení je umožněno zavedením kombinatorického pojmu kombinátu. Podrobněji jsou probrány ty skupiny schemat, jež dosud nebyly zkoumány, a nakonec jsou uvedeny příklady dosud neznámých konfigurací.

Úvod

V poslední době bylo u nás dosaženo značných úspěchů při studiu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$. Bylo shledáno, že body konfigurace jsou různých typů, jež byly označeny A, B, C, D, E. Prof. J. METELKA soustavně prozkoumal všechny konfigurace, jež obsahují aspoň jeden bod typu A v práci [1]. Jeho bratr V. METELKA vyšetřil v práci [2] všechny konfigurace, jež obsahují aspoň jeden bod typu D. Kromě konfigurací s body typu A a D jsou známy některé, jež obsahují pouze body typu B, C, E. Takové konfigurace nalezli prof. M. ZACHARIAS v [3] a prof. B. BYDŽOVSKÝ v [4]. Úkolem této práce jest klasifikace schemat konfigurací, jež obsahují pouze body typu B, C, E. Při studiu schemat jsem použil kombinatorického pojmu kombinátu, který umožňuje rovněž klasifikaci všech schemat vůbec.

1. Pojem kombinátu

Rovinná konfigurace $(12_4, 16_3)$ obsahuje 16 konfiguračních přímek, z nichž každá prochází třemi z 12 konfiguračních bodů, jež označíme *1*, *2*, ..., *12*. Každé konfigurační přímce je tedy přiřazena určitá kombinace třetí třídy z 12 prvků. Libovolné dvě přímky konfigurace mají nejvýše jeden společný konfigurační bod, proto příslušné kombinace třetí třídy mají nejvýše jeden společný prvek, a tvoří tedy určitou skupinu, jež je částí množiny všech kombinací třetí třídy z 12 prvků. Tím jsme vedeni k této definici:

Definice 1. *Nechť jsou $n \geqq k > r$ přirozená čísla. Skupina kombinací k-té třídy z daných n prvků se nazývá kombinátem k-té třídy, r-tého stupně, má-ti tyto vlastnosti:* 1. *libovolné dvě kombinace mají nejvýše r společných prvků.* 2. *ke skupině nemůžeme připojit žádnou další kombinaci, jež by vyhovovala vlastnosti 1, tj. skupina je úplná.*

Kombinát budeme označovati $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(r)}$, kde q udává počet kombinací, obsažených v kombinátu. Např.: $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}_2^{(1)} \equiv (1\,2\,3, 4\,5\,6)$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}_4^{(1)} \equiv (1\,2\,3,\ 1\,4\,5,\ 3\,5\,6,\ 2\,4\,6)$. Tento kombinát je vlastně schematem konfigurace $(6_2, 4_3)$.

V kombinátech pro tatáž n, k, r může býti různý počet kombinací. Je třeba určiti meze omezující tento počet. Horní mez tohoto počtu udává

věta 1. *Počet kombinací v kombinátu* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(r)}$ *nemůže být větší než číslo M, pro něž platí*

$$M = \left[\frac{\left[\dfrac{n-r}{k-r}\right] \dbinom{n}{r}}{\dbinom{k}{r}} \right]. \tag{1}$$

V tomto vzorci je užito známého označení: Je-li a reálné číslo, potom $[a]$ je nejvyšší celé číslo $\leqq a$.

Důkaz. Vybereme pevnou kombinaci r-té třídy a ptejme se, v kolika kombinacích k-té třídy se může nejvýše vyskytnout. Jejich počet budiž m. Těchto m kombinací k-té třídy má tedy společných r prvků a mimo ně má každá ještě $k - r$ prvků, z nichž žádný nesmí být obsažen v některé jiné kombinaci z uvažovaných m kombinací. Zřejmě musí platit vztah $m(k - r) \leqq n - r$. Odtud $m \leqq \dfrac{n-r}{k-r}$. Zvolená kombinace r-té třídy se tedy může vyskytnout nejvýše v $\left[\dfrac{n-r}{k-r}\right]$ kombinacích k-té třídy. Kombinací r-té třídy je $\dbinom{n}{r}$, v celém kombinátu jich může být nejvýše $\dbinom{n}{r}\left[\dfrac{n-r}{k-r}\right]$. Jedna kombinace k-té třídy zahrnuje v sobě $\dbinom{k}{r}$ kombinací r-té třídy, nemůže tedy počet kombinací k-té třídy být větší než číslo M udané vzorcem (1).

Poznámka. V některých kombinátech je počet kombinací roven horní mezi M, v jiných nikoliv, jak ukazuje tento příklad: Pro $\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}^{(1)}$ máme $M = \left[\dfrac{\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\end{bmatrix}\binom{6}{1}}{\binom{3}{1}}\right] = 4$, příslušný kombinát existuje, jak výše uvedeno. Pro $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}^{(1)}$ máme $M = \left[\dfrac{\begin{bmatrix}\frac{4}{2}\end{bmatrix}\binom{5}{1}}{\binom{3}{1}}\right] = 3$, avšak kombinát $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}_3$ neexistuje, jak lze snadno nahlédnout.

2. Kombináty, jež mají význam pro konfigurace $(12_4, 16_3)$

Pro uvedené konfigurace mají význam ty kombináty $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}$, v nichž je počet kombinací $q \geqq 16$. Podle vzorce (1) je v tomto případě $q \leqq \left[\dfrac{\begin{bmatrix}\frac{11}{2}\end{bmatrix} \cdot 12}{3}\right] = 20$. Jak bude v dalším uvedeno, existují kombináty $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{20}$. V konfiguraci $(12_4, 16_3)$ procházejí každým konfiguračním bodem čtyři konfigurační přímky, proto musí v kombinátu každý z 12 prvků být obsažen aspoň ve 4 kombinacích, což vyjádříme slovy, že četnost každého prvku v kombinátu musí být aspoň čtyři. Tato četnost však nemůže být větší než 5 podle vzorce $m \leqq \left[\dfrac{n-r}{k-r}\right]$. Pod slovem kombinát $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}$ budeme v dalším rozumět jenom takový, který má význam pro zkoumání našich konfigurací, tj. obsahující nejméně 16 kombinací s minimální četností prvků rovnou čtyřem. Kombinát $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{16}$ má 16 kombinací s 48 prvky. Každý z prvků $1, 2, \ldots, 12$ má právě četnost 4. Kombinát $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{17}$ má 17 kombinací s 51 prvky. Značí-li x počet prvků s četností 4, potom $12 - x$ je počet prvků s četností 5, a platí rovnice $4x + 5(12 - x) = 51$; odtud $x = 9$. Jsou tedy 3 prvky s četností 5 a 9 prvků s četností 4. Podobně vypočítáme, že v kombinátu $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{18}$ musí býti 6 prvků s četností 5, v kombinátu $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{19}$ 9 prvků s četností 5 a v kombinátu $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{20}$ všech 12 prvků s četností 5.

Chceme-li z kombinátů $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_q^{(1)}$, kde $q = 17, 18, 19, 20$, sestavit incidenční schemata konfigurace $(12_4, 16_3)$, musí být možno vynechat z nich 1, 2, 3, 4 kombinace tak, aby ve zbývajících 16 kombinacích byla četnost každého prvku 4. Můžeme tedy vynechávat pouze kombinace z prvků o četnosti 5. V případě $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_{17}^{(1)}$ musí vynechaná kombinace obsahovat všechny tři prvky s četností 5, v případě $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_{18}^{(1)}$ musí být všech 6 prvků s četností 5 obsaženo ve dvou kombinacích, v dalších případech ve třech a čtyřech kombinacích musí být obsaženo všech 9 resp. 12 prvků s četností 5. Označíme-li v případě $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_{19}^{(1)}$ prvky s četností 5 číslicemi *1, 2, ..., 9*, budou vynechané kombinace např. *1 2 3, 4 5 6, 7 8 9*. Vidíme tedy, že tento kombinát musí obsahovat tři kombinace, jež mezi sebou nemají společný prvek a obsahují všechny prvky s četností 5. Podobně kombinát $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_{20}^{(1)}$ musí obsahovat čtyři kombinace, jež nemají společný prvek, tj. disjunktní.

Mějme obráceně schema konfigurace. Vzniká otázka, zda počet přidávaných kombinací, jimiž doplňujeme schema na kombinát, je pro určité schema vždy týž. Přidávané trojice prvků musí být disjunktní, jinak bychom překročili nejvyšší možnou četnost prvku. Předpokládejme, že bychom ke schematu mohli připojit jednou více, podruhé méně kombinací, takže bychom dostali kombináty o různém počtu kombinací. Je zřejmé, že není možný případ, aby schema bylo současně kombinátem $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_{16}$ a $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_{17, 18, 19, 20}$. Uvažujme proto o případu, že bychom nejprve připojili aspoň dvě kombinace, potom menší počet. To znamená, že aspoň dvě trojice musí být nahrazeny jinou trojicí. Dvě disjunktní trojice nechť jsou 1 2 3, 4 5 6. Trojice je nahrazující musí obsahovat z každé trojice buď právě jeden prvek, nebo z jedné trojice 2 prvky a z druhé jeden; např. a) 1 4 x, nebo b) 1 2 4. Kdyby náhradní trojice neobsahovala ani jeden prvek z některé původní trojice, nemohl by se počet trojic zmenšit. Avšak oba příklady náhradní trojice nejsou možné, neboť by byly ve schematu prvky 1 nebo 4 odděleny od čtyř prvků 1: 2, 3, 4, x; 4: 1, 2, 5, 6 (viz o. 3). Učiněný předpoklad není tedy správný. Odtud plyne, že schematem je jednoznačně určen počet kombinací v kombinátu. Odtud vyplývá

Věta 2. *Schemata konfigurací* $(12_4, 16_3)$ *lze rozdělit do skupin* I, II, III, IV, V *podle toho, zda k nim musíme připojit* 4, 3, 2, 1, 0 *kombinace, abychom dostali kombinát* $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_q^{(1)}$, *kde* $q = 20, 19, 18, 17, 16$.

Definice 2. *Jestliže v konfiguraci, jež je geometrickou interpretací některého* *schematu skupin* I—IV, *leží body určené přidávanou kombinací (podle věty* 2) *v jedné přímce, potom tato přímka se nazývá cizí přímkou konfigurace.*

Mohou tedy schemata skupin I—IV vésti ke konfiguracím se 4, 3, 2, 1 cizí přímkou.

Přidávané kombinace ke schematu jsou určeny jednoznačně pokud jde o schemata s prvky vesměs typu B a C, jde-li o schemata s prvky A nebo D není tomu tak, jak si lze snadno ověřit na schematech v práci [2] V. Metelky.

V dalším užijeme pojmu ekvivalence kombinátů a schemat.

Definice 3. *Říkáme, že dva kombináty jsou ekvivalentní, jestliže existuje taková permutace* n *prvků, která převádí jeden kombinát v druhý. Stejná je definice ekvivalence schemat.*

3. Souvislost klasifikace schemat podle kombinátů s klasifikací podle typu prvků

V incidenčním schematu konfigurace $(12_4, 16_3)$ se každý prvek vyskytuje ve čtyřech kombinacích, jež obsahují celkem 9 různých prvků. Prvky, jež jsou v jedné kombinaci, budeme nazývat *spojené*, jinak *oddělené*. Je tedy každý prvek oddělen od tří jiných prvků, jež mohou být mezi sebou různě spojeny.

Definice 4. *Říkáme, že prvek schematu konfigurace* $(12_4, 16_3)$ *je typu* B (C, D, A) *jestliže tři prvky od něho oddělené mají mezi sebou* 3 (2, 1, 0) *spojení.*

Poznámka. V tomto článku považujeme za zvláštní případ prvku typu B prvek typu E, kdy tři prvky od něho oddělené jsou v téže kombinaci.

Všechna schemata uvedených konfigurací můžeme rozdělit do skupin podle typu prvků, jež obsahují. Takovéto rozdělení do hlavních skupin podává J. Metelka v práci [1]. Schemata prvních dvou skupin, tj. 1. obsahující aspoň jeden prvek typu A a 2. obsahující aspoň jeden prvek typu D, byla nalezena. V těchto schematech se vyskytují rovněž prvky typu B, C v různém počtu. Vzniká otázka, zda souvisí tyto typy prvků s kombinátem, který odpovídá příslušnému schematu. Ještě dříve dokažme jednu větu o schematech bez prvků typu A a D.

Věta 3. *Ve schematu, jež obsahuje pouze prvky typu* B *a* C, *vystupují prvky typu* C *v trojicích prvků navzájem oddělených.*

Důkaz. Mějme uvedené schema, jež má aspoň jeden bod typu C. Nechť je to prvek 1 a platí $1: 2, 3, h$; $2 : 3$; $\overline{2\,h}$; $\overline{3\,h}$; ($\overline{2\,h}$ značí, že prvky 2, h jsou mezi sebou spojeny, $2 : 3$ značí, že prvky 2, 3 jsou odděleny). Potom platí, že prvky 2, 3 jsou rovněž typu C, neboť $2 : 1, 3, g$; $1 : 3$; $3 : 1, 2, f$; $1 : 2$. Tyto tři C-prvky tvoří trojici navzájem oddělených prvků. Mějme další C-prvek k. Ten tvoří trojici s jinými dvěma prvky různými od $1, 2, 3$. Kdyby totiž $k: 1, r, q$, při čemž $1 : r$, $\overline{rq}$, měli bychom $1 : 2, 3, r, k$. Musilo by tedy $k \equiv h$, $r \equiv 2$ (nebo 3).

Poněvadž $k : r$, máme $h : 2$ (3), což je spor s $2\,h$. Vede tedy prvek k vskutku ke dvěma dalším prvkům typu C. Získáváme tak disjunktní trojice C-prvků. Jedním prvkem trojice jsou zbylé dva jednoznačně určeny. Může tedy konfigurace s prvky typu B a C obsahovat 3, 6, 9 nebo 12 prvků typu C.

Věta 4. *Všechny prvky schemat ze skupiny* I, *tj. vzniklých z kombinátů* $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{20}^{(1)}$, *jsou typu C. Máme-li obráceně schema s prvky vesměs typu C, pak schema patří do skupiny* I.

Důkaz. Z kombinátu $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{20}^{(1)}$ dostaneme schema konfigurace, jestliže z něho vynecháme 4 kombinace obsahující všech 12 prvků. Nechť to jsou kombinace *1 2 3, 4 5 6, 7, 8, 9, 10 11 12*. Ve schematu konfigurace se nemůže vyskytnout spojení libovolných dvôu prvků z některé z těchto čtyř kombinací. Tedy např. je oddělen prvek *1* od prvků *2* a *3*. Platí, že každý prvek je oddělen od dvou prvků své „*základní*" kombinace. Kromě toho je každý prvek oddělen ještě od třetího prvku, který však je s předchozími dvěma již spojen. Nechť je např. *1 : 2, 3, 4*. Kdyby platilo *2 : 4*, byl by prvek *4 : 1, 2, 5, 6*, což však není možné, neboť každý prvek je oddělen právě od tří jiných prvků. Jsou tedy všechny prvky typu C.

Máme-li obráceně schema s 12 prvky typu C, potom k němu můžeme připojit čtyři trojice navzájem oddělených prvků, což jsou kombinace, jež schema doplňují na kombinát $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{20}^{(1)}$.

Věta 5. *Schemata skupin* II, III, IV, *jež neobsahují prvky typu A a D, jsou postupně těchto typů: $9C + 3B$, $6C + 6B$, $3C + 9B$. Obráceně schemata těchto typů patří vždy do uvedených skupin.*

Důkaz. Podle věty 3 jsou schemata obsahující pouze prvky typů B a C vždy některého ze tří typů $3C + 9B$, $6C + 6B$, $9C + 3B$. Máme-li kombináty $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{q}^{(1)}$, kde $q = 17, 18, 19$, potom z nich vytvoříme schema konfigurace vynecháním jedné, dvou, tří kombinací. Vynechávané kombinace nechť jsou *1 2 3, 4 5 6, 7 8 9*. Prvky z těchto kombinací jsou nutně ve schematu konfigurace typu C. V případě $q = 17$ máme tedy jistě tři prvky typu C a to *1, 2, 3*. Více však jich být nemůže, neboť by byla potom ještě další trojice vzájemně oddělených prvků, již bychom mohli připojit jako 18. kombinaci. To však není možné vzhledem k předpokladu $q = 17$. Podobně ve zbývajících dvou případech máme právě 6 resp. 9 prvků typu C. Zbývající prvky jsou typu B podle předpokladu.

Tvrzení věty obrácené vyplývá bezprostředně z věty 3. Abychom dostali kombinát, připojíme vždy kombinaci vytvořenou trojicí navzájem oddělených C-prvků.

Věta 6. *Schemata skupiny V, jež jsou vlastně kombináty* $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{16}$, *mají všechny prvky typu B. Máme-li obráceně schema tohoto typu, patří do skupiny V.*

Důkaz. Kdyby některý prvek nebyl typu B, mohli bychom ke schematu připojit vždy aspoň jednu kombinaci utvořenou z tohoto prvku a ze dvou prvků, od kterých je oddělen a jež jsou zase odděleny od sebe. To však je spor s předpokladem.

Mějte obráceně schema s prvky vesměs typu B a předpokládejme, že lze k němu připojit nějakou další kombinaci. Potom by každý prvek této kombinace byl ve schematu konfigurace oddělen od zbývajících dvou prvků přidávané kombinace, jež by byly od sebe odděleny, a nebyl by tedy typu B. Nelze tedy žádnou další kombinaci k takovémuto schematu připojit.

Shrneme-li tyto výsledky, vidíme, že platí

Věta 7. *Schemata bez prvků typu A a D jsou těchto typů:* $12C$, $9C + 3B$, $6C + 6B$, $3C + 9B$, $12B$. *Tyto typy odpovídají kombinátům* $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{20}$, $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{19}$, $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{18}$, $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{17}$, $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{16}$.

4. Sestavování schemat

Schemata budeme sestavovat pomocí tzv. tabulek oddělování prvků, jež ukazují, od kterých prvků je každý prvek oddělen. Nejprve najdeme všechny možné tabulky oddělování prvků, jež nejsou ekvivalentní (ve smyslu definice 3), potom ke každé tabulce vyhledáme schemata postupem, který objasním na příkladě. Mějme např. tuto tabulku oddělování prvků:

1 : 2, 3, 4	*4 : 5, 6, 1*	*7 : 2, 5, 10*	*10 : 7, 11, 12*
2 : 1, 3, 7	*5 : 4, 6, 7*	*8 : 3, 11, 12*	*11 : 9, 8, 10*
3 : 1, 2, 8	*6 : 4, 5, 9*	*9 : 6, 11, 12*	*12 : 8, 9, 10*

Z této tabulky je patrné, že prvky *1, 2, …, 6* jsou typu C, kdežto *7, 8, …, 12* jsou typu B. Nejprve si napíšeme všechny čtveřiny kombinací s prvkem *1*, které sestavujeme se zřetelem k předepsanému oddělování prvků:

1	*2*	*3*	*4*	5	
1 5 8	*1 5 8*	*1 5 8*	*1 5 8*	*1 5 9*	
1 6 7	*1 6 10*	*1 6 11*	*1 6 12*	*1 6 7*	
1 9 10	*1 7 9*	*1 7 12*	*1 7 11*	*1 8 10*	
1 11 12	*1 11 12*	*1 9 10*	*1 9 10*	*1 11 12*	atd.

Potom si sestavíme čtveřiny kombinací, jež neobsahují prvky *1, 2, 3*, jež jsou v našem případě od sebe odděleny. Pro tyto čtyři kombinace máme k disposici prvky, jež uvádím tolikrát, v kolika kombinacích se musí ještě vyskytnout. Např. prvek *4* se vyskytne ve spojení s prvky *2* a *3*, tedy musí vystupovat ještě dvakrát. Podobně pro ostatní prvky. Máme tedy k disposici: *4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12*. Poněvadž prvky *4, 5, 6* nejsou spolu spojeny, musí být každý z nich v jedné kombinaci. Vzhledem k tomu sestavujeme opět čtveřiny těchto „posledních" čtyř kombinací:

I	II	III	IV	V	VI	VII
4 7 9	*4 7 10*	*4 7 11*	*4 7 9*	*4 7 11*	*4 7 12*	*4 7 12*
4 8 10	*4 11 12*	*4 8 9*	*4 11 12*	*4 8 10*	*4 8 9*	*4 8 10*
5 11 12	*5 8 9*	*5 8 10*	*5 8 10*	*5 8 9*	*5 8 10*	*5 8 9*
6 7 8	*6 7 8*	*6 7 12*	*6 7 8*	*6 7 12*	*6 7 11*	*6 7 11*

Dále zjišťujeme, které čtveřiny by spolu mohly být v témž schematu, tj. které neobsahují stejná spojení prvků. Např. čtveřiny 1 a I nemohou být spolu ve schematu, neboť v obou je spojení $\overline{67}$. Najdeme-li čtveřiny hodící se k sobě, hledáme potom čtyři kombinace s prvkem *3*, což není tak složité, neboť volba prvků je již značně omezena. Např. čtveřiny 4 a I mohou být ve schematu

1 5 8	*4 7 9*	*2 4 .*	*3 4 .*
1 6 12	*4 8 10*	*2 5 .*	*3 5 .*
1 7 11	*5 11 12*	*2 6 .*	*3 6 .*
1 9 10	*6 7 8*	*2 . .*	*3 . .*

Prvek *4* musí být ještě spojen s prvky *11* a *12*, prvek *5* s prvky *9, 10* a prvek *6* s prvky *10, 11*. Z toho již dostaneme výsledné schema

1 5 8	*4 7 9*	*2 4 12*	*3 4 11*
1 6 12	*4 8 10*	*2 5 10*	*3 5 9*
1 7 11	*5 11 12*	*2 6 11*	*3 6 10*
1 9 10	*6 7 8*	*2 8 9*	*3 7 12*

Této metody sestavování schemat lze v podstatě použít, ať je dána jakákoliv tabulka oddělování prvků.

5. Kombináty $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{20}^{(1)}$ a příslušná schemata typu $12C$

Prvky označme *1, 2, …, 12*, čtyři kombinace, jež nemají vzájemně žádný společný prvek, nechť jsou: *1 2 3, 4 5 6, 7 8 9, 10 11 12*. Každý prvek se vyskytuje v 5 kombinacích, a proto je oddělen pouze od jednoho prvku. Jsou myslitelné tyto způsoby vzájemného oddělování prvků:

(1) *1 : 12, 2 : 11, 3 : 10*. (Místo prvků *1, 2, 3* a *10, 11, 12* bylo by ovšem možno vzít tři prvky jiných základních kombinací v libovolném pořadí. Podstatné je, aby prvky jedné základní kombinace byly odděleny od prvků

druhé základní kombinace.) Z předpokladu o oddělování plyne, že prvky *4, 5, 6* musí být odděleny od prvků *7, 8, 9*. Tedy např. *4 : 7, 5 : 8, 6 : 9*. Připojíme-li ke 4 předpokládaným kombinacím *1 2 3, 4 5 6, 7 8 9, 10 11 12* 12 kombinací s prvky *1, 2, 3*, musí zbývající 4 kombinace obsahovat tyto prvky: *4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12*. Z těchto 12 prvků však nemůžeme sestavit 4 kombinace vyhovující daným předpokladům, neboť každá kombinace musí obsahovat po jednom prvku z trojic *4 5 6, 7 8 9, 10 11 12*. Tak můžeme sestavit pouze tři kombinace; uvedený způsob oddělování není tedy možný.

Poznámka. Pro snazší přehlednost jsou prvky schematu označovány přímo číslicemi. Je jasné, že tyto číslice mohou být zaměněny jinými, jestliže na schema provedeme nějakou permutaci 12 prvků.

(2) *1 : 12, 2 :* 11, *3 : 7*. Odtud plyne, že prvky *4, 5, 6* musí být odděleny od prvků *8, 9, 10*, tedy např. *4 : 8, 5 : 9, 6 : 10*. Analogicky jako v případě (1) usoudíme, že pro 4 kombinace neobsahující prvky *1, 2, 3* máme k disposici prvky *4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12*. Z nich opět nelze sestavit 4 kombinace vyhovující daným předpokladům.

(3) *1 : 12, 2 : 9, 3 : 6*. Odtud *4 : 7, 5: 10, 8 : 11*. Nemůže být *5 : 8*, neboť potom by bylo *10 : 11*. Pro poslední 4 kombinace dostáváme tyto prvky: *4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 12*. Z nich můžeme sestavit 4 kombinace, např. *4 9 10, 5 8 12, 6 7 11, 6 9 12*. Nalezl jsem takto 10 různých schemat, jež lze doplnit na kombináty připojením kombinací *1 2 3, 4 5 6, 7 8 9, 10 11 12*. Z nich uvádím jako příklad toto schema:

1 4 8	*2 4 12*	*3 4 11*	*4 9 10*	
1 5 7	*2 5 11*	*3 5 9*	*5 8 12*	(2)
1 6 10	*2 6 8*	*3 7 12*	*6 7 11*	
1 9 11	*2 7 10*	*3 8 10*	*6 9 12*	

Poznámka. Existují kombináty $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{20}$, jež nemají 4 kombinace obsahující všech 12 prvků. Tyto ovšem nemají pro naše konfigurace význam. Uveďme příklad:

1 2 3	*2 4 6*	*3 4 7*	*4 8 10*	*6 9 10*
1 4 5	*2 5 7*	*3 5 9*	*4 11 12*	*7 8 11*
1 6 8	*2 8 9*	*3 6 11*	*5 6 12*	*7 9 12*
1 7 10	*2 10 11*	*3 8 12*	*5 10 11*	
1 9 11				

6. Schemata typu $9C + 3B$

Základní kombinace, jejichž vynecháním dostaneme schema z kombinátu $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{19}$, označme *1 2 3, 4 5 6, 7 8 9*. Prvky *1, 2, …, 9* jsou typu C, kdežto prvky *10, 11, 12* typu B. Abychom dostali schemata, v nichž se nevyskytují prvky typu A a D, nemůže být žádný z prvků *10, 11, 12* oddělen od dvou prvků z téže základní kombinace. Kdyby např. prvek *10 : 1, 2*, potom by ve schematu bylo *1 : 2, 3, 10, 2 : 10, 2 : 3*. Tedy prvek *1* by nemohl být ani typu B, ani C. Schemata typu $9C + 3B$ rozdělíme do skupin A, B, C, D, podle toho, jak jsou spolu spojeny prvky *10, 11, 12*.

A. Prvky *10, 11, 12* jsou spojeny v kombinaci. Z tohoto požadavku vyplývá jediný možný způsob oddělování uvedených prvků, totiž

10 : 1, 4, 7
11 : 2, 5, 8
12 : 3, 6, 9

Tomu odpovídá tato tabulka oddělování prvků ve schematu

1 : 2, 3, 10	*4 : 5, 6, 10*	*7 : 8, 9, 10*	*10 : 1, 4, 7*
2 : 1, 3, 11	*5 : 4, 6, 11*	*8 : 7, 8, 11*	*11 : 2, 5, 8*
3 : 1, 2, 12	*6 : 4, 5, 12*	*9 : 7, 8, 12*	*12 : 3, 6, 9*

Existuje jediné schema odpovídající této tabulce oddělování:

1 4 7	*2 4 12*	*3 4 8*	*4 9 11*
1 5 9	*2 5 8*	*3 5 10*	*5 7 12*
1 6 11	*2 6 7*	*3 6 9*	*6 8 10*
1 8 12	*2 9 10*	*3 7 11*	*10 11 12*

(3)

Prof. B. Bydžovský[1]) uvádí schema konfigurace, již nalezl prof. M. Zacharias a jež má rovněž 9 bodů typu C a 3 body typu E. Označíme-li body Zachariasovy konfigurace *1, 2, ..., 12*, dostaneme toto schema

1 2 3	*1 7 10*	*2 5 8*	*3 6 12*
4 5 6	*1 8 11*	*2 6 9*	*4 8 12*
7 8 9	*1 9 12*	*3 4 10*	*5 9 10*
10 11 12	*2 4 7*	*3 5 11*	*6 7 11*

(Z)

Připojíme-li kombinace *5 7 12, 6 8 10, 4 9 11*, máme kombinát $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}^{(1)}_{19}$.

Poněvadž obě schemata mají stejný počet prvků týchž typů, zkoumal jsem jejich ekvivalenci. Protože permutací

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 12 & 4 & 9 & 11 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

přejde (3) ve schema (Z), je Zachariasova konfigurace právě tohoto typu.

[1]) [4], str. 220.

B. Prvky *10, 11, 12* mají mezi sebou tři spojení, avšak nejsou v kombinaci. Tabulka oddělování je táž jako v případě A. Uvádím jako příklad jedno schema této skupiny:

1 4 7	*2 4 9*	*3 4 11*	*4 8 12*
1 5 9	*2 5 8*	*3 5 7*	*5 10 12*
1 6 8	*2 6 10*	*3 6 9*	*6 7 11*
1 11 12	*2 7 12*	*3 8 10*	*9 10 11*

C. Prvky *10, 11, 12* mají mezi sebou dvě spojení. Nechť je *10 : 12,* tedy existují spojení *10 11* a *11 12.* Jediný možný způsob oddělování prvků v kombinátu je:

10 : 12, 1, 4	*12 : 10, 6, 8*
11 : 2, 5, 7	*3 : 9*

Tabulka oddělování ve schematu je:

1 : 2, 3, 10	*4 : 5, 6, 10*	*7 : 8, 9, 11*	*10 : 12, 1, 4*
2 : 1, 3, 11	*5 : 4, 6, 11*	*8 : 7, 9, 12*	*11 : 2, 5, 7*
3 : 1, 2, 9	*6 : 4, 5, 12*	*9 : 7, 8, 3*	*12 : 10, 6, 8*

Jako příklad schemat tohoto typu uvádím:

1 4 7	*2 4 8*	*3 4 12*	*4 9 10*
1 5 12	*2 5 9*	*3 5 7*	*5 8 11*
1 6 9	*2 6 11*	*3 6 8*	*6 7 10*
1 8 10	*2 7 12*	*3 10 11*	*9 11 12*

D. Mezi prvky *10, 11, 12* existuje jediné spojení. Nechť je *10 : 11, 12,* zatím co *11* je spojen s *12.* Jsou myslitelné tyto způsoby oddělování prvků v kombinátu:

a)	b)	c)
10 : 11, 12, 1	*10 : 11, 12, 1*	*10 : 11, 12, 1*
11 : 10, 2, 4	*11 : 10, 2, 4*	*11 : 10, 4, 7*
12 : 10, 3, 7	*12 : 10, 5, 7*	*12 : 10, 5, 8*
5 : 8	*3 : 8*	*2 : 9*
6 : 9	*6 : 9*	*3 : 6*

V případě a) máme pro 4 kombinace schematu neobsahující prvky *1, 2, 3* k disposici tyto prvky: *4, 5. 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12.* Z těchto 12 prvků nemůžememe sestavit 4 kombinace, neboť ve dvou by se musily vyskytnout vždy dva prvky z *10 11 12.* Mezi nimi však je pouze jedno spojení. Způsob a) není tedy možný.

Způsoby b) a c) jsou možné. Jako příklad uvádím dvě schemata schopná geometrické interpretace, v nichž je oddělování podle c), a jedno schema s oddělováním podle b).

1 4 9	*2 4 8*	*3 4 10*	*4 7 12*	
1 5 8	*2 5 11*	*3 5 7*	*5 9 10*	(4)
1 6 7	*2 6 12*	*3 8 11*	*6 8 10*	
1 11 12	*2 7 10*	*3 9 12*	*6 9 11*	

1 4 8	*2 4 12*	*3 4 7*	*4 9 10*	
1 5 7	*2 5 8*	*3 5 10*	*5 9 11*	(5)
1 6 9	*2 6 11*	*3 8 11*	*6 7 12*	
1 11 12	*2 7 10*	*3 9 12*	*6 8 10*	

1 4 7	*2 4 12*	*3 4 9*	*4 8 10*
1 5 8	*2 5 7*	*3 5 10*	*5 9 11*
1 6 11	*2 6 8*	*3 6 12*	*6 7 10*
1 9 12	*2 9 10*	*3 7 11*	*8 11 12*

Tím jsou vyčerpány možnosti spojení prvků typu B. Není totiž možné, aby v kombinátu $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{19}$ byly tyto prvky navzájem odděleny. Kdyby tomu tak bylo, mohli bychom kombinaci z nich utvořenou připojit jako 20. a měli bychom kombinát $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{20}$ proti předpokladu.

7. Schemata typu $6C + 6B$

Základní kombinace, jejichž vynecháním dostaneme z kombinátu $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^{(1)}_{18}$ schema, označme *1 2 3, 4 5 6*. Prvky *1, 2, …, 6* jsou typu C, ostatní typu B. Schemata uvedeného typu můžeme rozdělit do hlavních skupin podle toho, jak jsou oddělovány prvky typu C. Jsou myslitelné tyto způsoby oddělování:

A. Žádný z prvků *1, 2, 3* není oddělen od některého z prvků *4, 5, 6*. Potom jsou myslitelné tyto další způsoby oddělování:

a)	*1 : 2, 3, 7*	*4 : 5, 6, 7*	b)	*1 : 2, 3, 7*	*4 : 5, 6, 7*
	2 : 1, 3, 8	*5 : 4, 6, 8*		*2 : 1, 3, 8*	*5 : 4, 6, 8*
	3 : 1, 2, 9	*6 : 4, 5, 9*		*3 : 1, 2, 9*	*6 : 4, 5, 10*
c)	*1 : 2, 3, 7*	*4 : 5, 6, 7*	d)	*1 : 2, 3, 7*	*4 : 5, 6, 10*
	2 : 1, 3, 8	*5 : 4, 6, 10*		*2 : 1, 3, 8*	*5 : 4, 6, 11*
	3 : 1, 2, 9	*6 : 4, 5, 11*		*3 : 1, 2, 9*	*6 : 4, 5, 12*

Případ a) není možný, neboť máme

7 : 1, 4, .	*10 : . . .*
8 : 2, 5, .	*11 : . . .*
9 : 4, 6, .	*12 : . . .*

Za dvojtečkou na místech označených tečkami se musí ještě vyskytnout třikrát *10*, třikrát *11* a třikrát *12*. To však vede vždy ke sporu, např. *10 11* a *10 : 11*, jak lze snadno zjistit. Případ b) je možný, jak ukazuje toto schema:

1 4 8	*2 4 10*	*3 4 12*	*4 9 11*
1 5 9	*2 5 12*	*3 5 11*	*5 7 10*
1 6 11	*2 6 9*	*3 6 7*	*6 8 12*
1 10 12	*2 7 11*	*3 8 10*	*7 8 9*

Případ c) je možný, jak ukazuje schema:

1 4 9	*2 4 10*	*3 4 11*	*4 8 12*
1 5 8	*2 5 12*	*3 5 7*	*5 9 11*
1 6 12	*2 6 9*	*3 6 8*	*6 7 10*
1 10 11	*2 7 11*	*3 10 12*	*7 8 9*

Rovněž případ d) je možný, jako příklad uvádím schema:

1 4 9	*2 4 12*	*3 4 11*	*4 7 8*
1 5 8	*2 5 7*	*3 5 10*	*5 9 12*
1 6 11	*2 6 10*	*3 6 8*	*6 7 9*
1 10 12	*2 9 11*	*3 7 12*	*8 10 11*

B. Některý z prvků *1*, *2*, *3* je oddělen od některého z prvků *4*, *5*, *6*. Jsou myslitelné tyto případy:

a)	*1 : 2, 3, 4*	*4 : 5, 6, 1*	b)	*1 : 2, 3, 4*	*4 : 5, 6, 1*
	2 : 1, 3, 5	*5, 4, 6, 2*		*2 : 1, 3, 5*	*5 : 4, 6, 2*
	3 : 1, 2, 6	*6 : 4, 5, 3*		*3 : 1, 2, 7*	*6 : 4, 5, 7(8)*
c)	*1 : 2, 3, 4*	*4 : 5, 6, 1*	d)	*1 : 2, 3, 4*	*4 : 5, 6, 1*
	2 : 1, 3, 7	*5 : 4, 6, 7*		*2 : 1, 3, 7*	*5 : 4, 6, 7*
	3 : 1, 2, 8	*6 : 4, 5, 8*		*3 : 1, 2, 8*	*6 : 4, 5, 9*
e)	*1 : 2, 3, 4*	*4 : 5, 6, 1*			
	2 : 1, 3, 7	*5 : 4, 6, 9*			
	3 : 1, 2, 8	*6 : 4, 5, 10*			

V případě a) máme pro 4 kombinace, jež neobsahují prvky *1*, *2*, *3*, k disposici tyto prvky: *4*, *4*, *5*, *5*, *6*, *6*, *7*, *8*, *9*, *10*, *11*, *12*. Poněvadž nemůže být žádné spojení mezi prvky *4*, *5*, *6*, není tento případ možný.

V případě b) máme pro tytéž 4 kombinace k disposici tyto prvky: *4*, *4*, *5*, *5*, *6*, *7*, *7*, *8*, *9*, *10*, *11*, *12*. Z téhož důvodu jako v případě a) není tento případ možný.

V případě c) máme

$$\begin{array}{ll} 7 : 2, 5, . & 10 : \dots \\ 8 : 3, 6, . & 11 : \dots \\ 9 : \dots & 12 : \dots \end{array}$$

Předpokládejme, že $7 : 9$, $8 : 10(9)$, potom je

$$\begin{array}{ll} 7 : 2, 5, \ 9 & 10 : 8, ., ., \\ 8 : 3, 6, 10(9) & 11 : \dots \\ 9 : 7, (8) \, .. & 12 : \dots \end{array}$$

Dále dostaneme spor $\overline{11\,12}$ a $11 : 12$. Případ c) není tedy možný.

Případ d) je možný, jak ukazuje toto schema:

1 5 8	*2 4 12*	*3 4 11*	*4 7 9*
1 6 12	*2 5 10*	*3 5 9*	*4 8 10*
1 7 11	*2 6 11*	*3 6 10*	*5 11 12*
1 9 10	*2 8 9*	*3 7 12*	*6 7 8*

Případ e) je rovněž možný, jak ukazuje schema

1 5 8	*2 4 12*	*3 4 11*	*4 7 10*
1 6 7	*2 5 11*	*3 5 10*	*4 8 9*
1 9 12	*2 6 9*	*3 6 12*	*5 7 12*
1 10 11	*2 8 10*	*3 7 9*	*6 8 11*

Poznámka. Některé případy obsahují ještě několik podpřípadů podle toho, jak jsou od sebe oddělovány další prvky *7, 8, ..., 12*. Toto jemnější třídění není v práci uvedeno.

8. Schemata typu $3C + 9B$

Prvky typu C nechť jsou *1, 2, 3*. Nechť dále platí $1 : 2, 3, 4$; $2 : 1, 3, 5$; $3 : 1, 2, 6$. Podle toho, jak jsou mezi sebou spojeny prvky *4, 5, 6*, rozeznáváme čtyři případy:

A. Existuje mezi nimi jediné spojení. B. Existují mezi nimi dvě spojení.

C. Existují tři spojení, avšak prvky nejsou v kombinaci. D. Prvky *4, 5, 6* jsou v kombinaci.

A. V kombinacích neobsahujících prvky *1, 2, 3* se musí vyskytnout prvky *4, 4, 5, 5, 6, 6* a další *7, 8, 9, 10, 11, 12*. Poněvadž mezi prvky *4, 5, 6* existuje jen jediné spojení, např. *45*, nemůžeme další čtyři prvky *4, 5, 6, 6* umístit do tří kombinací. Tedy tento případ není možný.

B. Nechť je $4:5$, avšak $\overline{4\ 6}$, $\overline{5\ 6}$. Potom jsou myslitelné tyto případy oddělování prvků $4, 5, 6$:

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} 4:1,5,7 \\ 5:2,4,8 \\ 6:3,7,8 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{l} 4:1,5,7 \\ 5:2,4,8 \\ 6:3,7,9 \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{l} 4:1,5,\ 7 \\ 5:2,4,\ 8 \\ 6:3,9,10 \end{array}$$

V případě a) máme

$$\begin{array}{ll} 7:4,6,\,. & 10:\dots \\ 8:5,6,\,. & 11:\dots \\ 9:\dots & 12:\dots \end{array}$$

Ať obsadíme zbývající místa u 7 a 8 kterýmikoliv prvky z $9, 10, 11, 12$, dospíváme vždy ke sporu. Tento případ není tedy možný.

b) Tento případ je možný, jak ukazuje schema

$$\begin{array}{llll} 1\ 5\ 9 & 2\ 4\ 11 & 3\ 4\ 12 & 4\ 6\ 8 \\ 1\ 6\ 10 & 2\ 6\ 12 & 3\ 5\ 10 & 5\ 6\ 11 \\ 1\ 7\ 8 & 2\ 7\ 9 & 3\ 7\ 11 & 4\ 9\ 10 \\ 1\ 11\ 12 & 2\ 8\ 10 & 3\ 8\ 9 & 5\ 7\ 12 \end{array}$$

c) Rovněž tento případ je možný, jak ukazuje schema

$$\begin{array}{llll} 1\ 5\ 9 & 2\ 4\ 11 & 3\ 4\ 12 & 4\ 6\ 8 \\ 1\ 6\ 7 & 2\ 6\ 12 & 3\ 5\ 10 & 5\ 6\ 11 \\ 1\ 8\ 10 & 2\ 7\ 10 & 3\ 7\ 9 & 4\ 9\ 10 \\ 1\ 11\ 12 & 2\ 8\ 9 & 3\ 8\ 11 & 5\ 7\ 12 \end{array}$$

C. Prvky $4, 5, 6$ jsou spojeny do „trojúhelníka“. Myslitelné případy oddělování jsou:

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} 4:1,7,8 \\ 5:2,7,8 \\ 6:3,7,8 \end{array} \quad \text{b)}\ \begin{array}{l} 4:1,7,8 \\ 5:2,7,8 \\ 6:3,7,9 \end{array} \quad \text{c)}\ \begin{array}{l} 4:1,7,\ 8 \\ 5:2,7,\ 8 \\ 6:3,9,10 \end{array} \quad \text{d)}\ \begin{array}{l} 4:1,7,\ 8 \\ 5:2,7,\ 9 \\ 6:3,7,10 \end{array}$$

$$\text{e)}\ \begin{array}{l} 4:1,7,\ 8 \\ 5:2,7,\ 9 \\ 6:3,8,10 \end{array} \quad \text{f)}\ \begin{array}{l} 4:1,\ 7,\ 8 \\ 5:2,\ 7,\ 9 \\ 6:3,10,11 \end{array} \quad \text{g)}\ \begin{array}{l} 4:1,\ 7,\ 8 \\ 5:2,\ 9,10 \\ 6:3,11,12 \end{array}$$

Ad a): Máme

$$\begin{array}{llll} 1:2,3,4 & 4:1,7,8 & 7:\ 4,\ 5,\ 6 & 10:9,11,12 \\ 2:1,3,5 & 5:2,7,8 & 8:\ 4,\ 5,\ 6 & 11:9,10,12 \\ 3:1,2,6 & 6:3,7,8 & 9:10,11,12 & 12:9,10,11 \end{array}$$

Zde vzniká spor $9:10$, $\overline{9\ 10}$, $11:12$, $\overline{11\ 12}$. Způsob není možný.

Ad b): Rovněž v tomto případě nelze sestavit tabulku oddělování, což zjistíme analogicky jako v a).

Ad c): Tento způsob je možný, jak ukazuje schema

1 5 6	*2 4 10*	*3 4 9*	*4 5 11*
1 7 9	*2 6 11*	*3 5 12*	*4 6 12*
1 8 10	*2 7 12*	*3 7 10*	*5 9 10*
1 11 12	*2 8 9*	*3 8 11*	*6 7 8*

Ad d): Tento způsob je rovněž možný, jak ukazuje schema

1 5 8	*2 4 12*	*3 4 9*	*4 5 10*
1 6 9	*2 6 8*	*3 5 11*	*4 6 11*
1 7 10	*2 7 11*	*3 7 12*	*5 6 12*
1 11 12	*2 9 10*	*3 8 10*	*7 8 9*

Ad e): V tomto případě nemůžeme sestavit tabulku oddělování, neboť máme

1 : 2, 3, 4	*4 : 1, 7, 8*	*7 : 4, 5,* .	*10 : 6,* . .
2 : 1, 3, 5	*5 : 2, 7, 9*	*8 : 4, 6,* .	*11 :* . . .
3 : 1, 2, 6	*6 : 3, 8, 10*	*9 : 5,* . . .	*12 :* . . .

Ať na prázdné místo u prvku *7* dosadíme kterýkoli prvek z *8*, *9*, *10*, *11*, *12*, vždy dospíváme ke sporu.

Ad f): Existuje schema odpovídající danému předpisu oddělovaní:

1 5 10	*2 4 10*	*3 4 12*	*4 5 11*
1 6 7	*2 6 8*	*3 5 8*	*4 6 9*
1 8 12	*2 7 11*	*3 7 9*	*5 6 12*
1 9 11	*2 9 12*	*3 10 11*	*7 8 10*

Ad g): Rovněž v tomto případě existuje příslušné schema:

1 5 7	*2 4 12*	*3 4 10*	*4 5 11*	
1 6 10	*2 6 7*	*3 5 12*	*4 6 9*	
1 8 9	*2 8 11*	*3 7 8*	*5 6 8*	(6)
1 11 12	*2 9 10*	*3 9 11*	*7 10 12*	

D. Myslitelné případy oddělování prvků jsou tytéž jako ve skupině C.

Případ a) není možný z téhož důvodu jako ve skupině C.

Případ b) není možný, poněvadž pro poslední čtyři kombinace neobsahující prvky *1*, *2*, *3* máme jednak kombinaci *4 5 6*, jednak ještě prvky *4*; *5*, *6*, *7*, *8*, *9*, *10*, *11*, *12*. Prvek *7* nemůže být ve spojení se žádným z prvků *4*, *5*, *6*. Tedy nelze uvedené 4 kombinace sestavit.

Případ c) je možný, jak ukazuje schema

1 5 9	*2 4 12*	*3 4 11*	*4 5 6*
1 6 12	*2 6 11*	*3 5 10*	*4 9 10*
1 7 10	*2 7 9*	*3 7 12*	*5 11 12*
1 8 11	*2 8 10*	*3 8 9*	*6 7 8*

Případ d): Pro poslední 4 kombinace máme *4 5 6*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8*, *9*, *10*, *11*, *12*. Prvek *7* nemůže být ve spojení se žádným z prvků *4*, *5*, *6*, tedy případ není možný.

V případě e) nelze sestavit tabulku oddělování podobně jako v případě e) skupiny C.

Případ f) je možný, jak ukazuje schema

1 5 8	*2 4 10*	*3 4 11*	*4 5 6*
1 6 12	*2 6 9*	*3 5 12*	*4 9 12*
1 7 10	*2 7 11*	*3 7 9*	*5 10 11*
1 9 11	*2 8 12*	*3 8 10*	*6 7 8*

Rovněž případ g) je možný:

1 5 8	*2 4 12*	*3 4 11*	*4 5 6*
1 6 10	*2 6 9*	*3 5 7*	*4 9 10*
1 7 12	*2 7 10*	*3 8 9*	*5 11 12*
1 9 11	*2 8 11*	*3 10 12*	*6 7 8*

9. Schemata s 12 prvky typu B

Tato schemata rozdělíme do šesti hlavních skupin, jež možno ještě dále dělit do podskupin. Toto jemnější rozdělení zde sledovat nebudeme. Nechť prvek *1* : *2*, *3*, *4*, při čemž *2*, *3*, *4* jsou spojeny. Podle toho, jak jsou odděleny prvky *2*, *3*, *4* od ostatních prvků, jsou myslitelné tyto případy oddělování:

a) *1 : 2, 3, 4*	b) *1 : 2, 3, 4*	c) *1 : 2, 3, 4*	d) *1 : 2, 3, 4*
2 : 1, 5, 6	*2 : 1, 5, 6*	*2 : 1, 5, 6*	*2 : 1, 5, 6*
3 : 1, 5, 6	*3 : 1, 5, 6*	*3 : 1, 5, 7*	*3 : 1, 5, 6*
4 : 1, 5, 6	*4 : 1, 5, 7*	*4 : 1, 6, 7*	*4 : 1, 7, 8*
e) *1 : 2, 3, 4*	f) *1 : 2, 3, 4*	g) *1 : 2, 3, 4*	h) *1 : 2, 3, 4*
2 : 1, 5, 6	*2 : 1, 5, 6*	*2 : 1, 5, 6*	*2 : 1, 5, 6*
3 : 1, 5, 7	*3 : 1, 5, 7*	*3 : 1, 5, 7*	*3 : 1, 7, 8*
4 : 1, 6, 8	*4 : 1, 5, 8*	*4 : 1, 8, 9*	*4 : 1, 9, 10*

Ad a): Mysleme si 4 kombinace s prvkem *1*, 4 kombinace s prvkem *2* a 3 kombinace s prvkem *3*. (Jednou je prvek *3* ve spojení s prvkem *2*.) Ve zbývajících 5 kombinacích se musí vyskytnout kromě jiných tyto prvky: *4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6*. Při tom platí *4 : 5, 4 : 6*. Ježto mezi těmito prvky může být pouze spojení $\overline{5\ 6}$, nemůžeme těchto 8 prvků umístit do pěti kombinací. Případ a) není tedy možný.

Ad b): Rovněž tento případ není možný, neboť v uvedených pěti kombinacích se musí vyskytnout prvky *4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6*, při čemž platí *4 : 5*. Spojení $\overline{5\ 6}$ a $\overline{4\ 6}$ jsou ve dvou kombinacích, zbývaly by tedy pro tři kombinace čtyři prvky z uvedených, což není možné.

Ad c): Případ je možný, jak ukazuje schema

1 5 10	*2 3 8*	*3 4 9*	*5 6 11*
1 6 12	*2 4 11*	*3 6 10*	*4 8 10*
1 7 11	*2 7 12*	*3 11 12*	*5 7 9*
1 8 9	*2 9 10*	*4 5 12*	*5 7 8*

Tabulka oddělování je:

1 : 2, 3, 4	*5 : 2, 3, 8*	*9 : 6, 11, 12*
2 : 1, 5, 6	*6 : 2, 4, 9*	*10 : 7, 11, 12*
3 : 1, 5, 7	*7 : 3, 4, 10*	*11 : 8, 9, 10*
4 : 1, 6, 7	*8 : 5, 11, 12*	*12 : 8, 9, 10*

Prvek *5* je typu *E*, ostatní typu *B*. V tomto případě nemůže být prvek *1* typu *E*, tj. *2, 3, 4* nesmí být v kombinaci. Kdyby tomu tak bylo, měli bychom pro kombinace neobsahující prvky *1, 2, 3* k disposici kromě jiných tyto prvky: *4, 4, 4* (poněvadž prvek *4* se vyskytne ve spojení s *1, 2, 3* pouze jednou), *5, 5, 5, 6, 6, 6*. Těchto 9 prvků bychom nemohli umístit do pěti kombinací, poněvadž podle předpokladu jsou mezi nimi jen dvě spojení $\overline{4\ 5}$ a $\overline{5\ 6}$.

Ad d), e): Případy jsou možné, avšak schemata opět nesmějí obsahovat kombinaci *2 3 4*. Jako příklad uvádím tato schemata:

1 5 8	*2 3 7*	*3 4 10*	*3 6 9*	*1 5 7*	*2 3 8*	*3 4 10*	*5 6 12*
1 6 11	*2 4 12*	*3 8 12*	*5 6 12*	*1 6 11*	*2 4 12*	*3 6 9*	*4 7 9*
1 7 12	*2 8 9*	*3 9 11*	*5 7 10*	*1 8 9*	*2 7 10*	*3 11 12*	*5 8 10*
1 9 10	*2 10 11*	*4 5 11*	*6 7 8*,	*1 10 12*	*2 9 11*	*4 5 11*	*6 7 8*

Ad f): Případ je možný, avšak opět nemůže být prvek *1* typu *E*. Jako příklad uvádím schema

1 5 12	*2 3 9*	*3 4 10*	*5 6 11*
1 6 10	*2 4 11*	*3 6 8*	*4 9 12*
1 7 9	*2 7 10*	*3 11 12*	*5 7 8*
1 8 11	*2 8 12*	*4 6 7*	*5 9 10*

Ad g): Případ je možný, což ukazuje schema

1 7 8	2 7 12	3 9 8	5 7 9
1 5 11	2 8 10	3 6 12	5 6 8
1 6 9	2 9 11	3 10 11	4 5 10
1 10 12	2 3 4	4 6 7	4 11 12

Tabulka oddělování je:

1 : 2, 3, 4	5 : 2, 3, 12	9 : 4, 10, 12
2 : 1, 5, 6	6 : 2, 10, 11	10 : 6, 7, 9
3 : 1, 5, 7	7 : 3, 10, 11	11 : 6, 7, 8
4 : 1, 8, 9	8 : 4, 11, 12	12 : 5, 8, 9

Toto schema má tři prvky typu *E*, a to *1, 3, 8*. Prof. B. Bydžovský[2]) nalezl schema tohoto typu i příslušnou konfiguraci k němu. Obě schemata jsou ekvivalentní, příslušná permutace je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 8 & 9 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ad h): Případ je možný, jak ukazuje schema

1 5 6	2 3 4	3 5 9	4 6 7
1 7 8	2 7 9	3 6 12	4 8 12
1 11 12	2 8 11	3 10 11	5 7 10
1 9 10	2 10 12	4 5 11	6 8 9

Tabulka oddělování je:

1 : 2, 3, 4	5 : 2, 8, 12	9 : 4, 11, 12
2 : 1, 5, 6	6 : 2, 10, 11	10 : 4, 6, 8
3 : 1, 7, 8	7 : 3, 11, 12	11 : 6, 7, 9
4 : 1, 9, 10	8 : 3, 5, 10	12 : 5, 7, 9

Schema má čtyři prvky typu *E*: *1, 2, 3, 4*.

Poznámka. V případech c), d), e), f) je prvek *1* vždy typu *B*. Jedině v případech g) a h) má smysl otázka, zda mohou existovat schemata s prvky vesměs typu *E*.

10. Příklady konfigurací

a) Konfigurace, odpovídající schematu (2), jež obsahuje 12 bodů typu *C*. Zvolme souřadnicový systém takto: *1* (1, 0, 0), *9* (0, 1, 0), *8* (1, 1, 1), *10* (0, 0, 1).

[2]) [4], str. 223.

Potom *4* (0, 1, 1), *11* (a, 1, 0), *3* (a, a, a — 1), *6* (b, 0, 1), *12* (b, c, 1). Vypočteme souřadnice bodů *2*, *5*, *7* a podmínky incidence *1 5 7*, *2 5 11*, *2 7 10* dají soustavu tří rovnic pro neznámé a, b, c.

$$\text{I: } a^2bc - 3abc + ab^2c - b^2c - a^2b - ab^2 + 2ab + b^2 - a^2c + ac^2 + a^2 = \\ = 0 \text{ (po krácení } a - 1\text{).}$$

$$\text{II: } - ab^2c - a^2bc + abc^2 + 2abc + ab^2 - 3ab + a^2b + a^2c - ac^2 - a^2 - \\ - b^2 + a + b = 0.$$

$$\text{III: } - a^2b - ab^2 + a^2c + b^2 + 2ab - a - b = 0.$$

Řešení soustavy je toto: a je kořenem rovnice

$$3a^8 - 9a^7 + 4a^6 + 9a^5 - 10a^4 + a^3 + 7a^2 - 2a - 2 = 0\,,$$

$$b = \frac{8a^5 - 7a^4 - 12a^3 + 6a^2 + 3a - 2}{6a^5 - 11a^4 - 4a^3 + 14a^2 + a - 4}\,,$$

$$c = \frac{6a^7 - 15a^6 + 3a^5 + 17a^4 - 9a^3 - 9a^2 + 3a + 2}{2a^5 + 4a^4 - 8a^3 - 8a^2 + 2a + 2}\,.$$

Jeden kořen rovnice pro a je přibližně 0,816. Této hodnotě a odpovídají hodnoty $b = -1{,}816$; $c = 0{,}228$. Konfigurace je nakreslena na obr. 1 pro uvedené hodnoty a, b, c. Je to první známá konfigurace, jejíž všechny body jsou typu C. Je vidět, že není splněna ani jedna z podmínek *1 2 3*, *4 5 6*, *7 8 9*, *10 11 12*, jež by mohly vésti k cizím přímkám.

b) Schema (4) vede ke konfiguraci, jež má body těchto typů: $9C + 3B$. Jeden z bodů typu B je E-bodem. Tato konfigurace nemá všechny body reálné. Souřadnicový systém zvolme takto: *4* (1, 0, 0), *7* (0, 1, 0), *10* (0, 0, 1), *8* (1, 1, 1). Potom *2* (0, 1, 1), *12* (a, 1, 0), *6* (a, a, a — 1), *3* (b, 0, 1), *5* (b, c, 1), kde a, b, c jsou neznámá komplexní čísla různá od nuly a jedné. Pomocí těchto bodů určíme souřadnice zbývajících bodů *1*, *9*, *11*. Čísla a, b, c určíme ze tří rovnic daných podmínkami incidence *1 4 9*, *1 11 12*, *6 9 11*:

$$\text{I. } ab^2 - ac^2 - ab^2c + b^2c - a^2bc + a^2c - ab - b^2 + 2abc = 0.$$

$$\text{II. } -a^2bc + abc^2 + a^2b + a^2c + 2abc - ac^2 - ab^2c + ab^2 - a^2 - 3ab - \\ b^2 + a + b = 0.$$

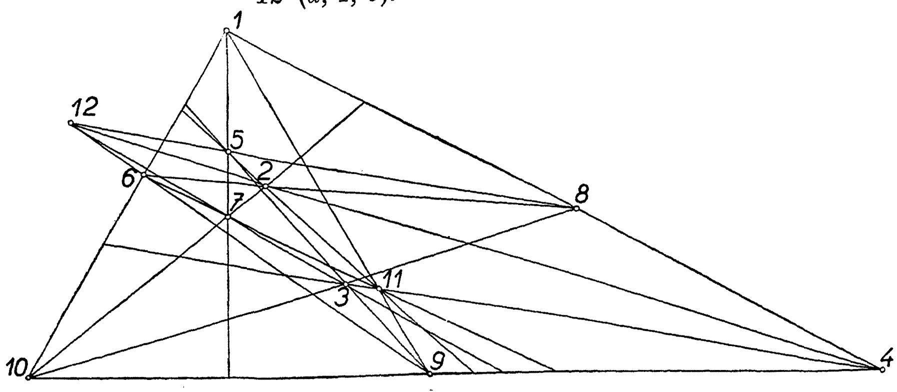
$$\text{III. } a^2c + abc - a^2 - b^2 - ac - ab + a + b = 0.$$

Řešení soustavy je: $b = a$, $c = \dfrac{3a - 2}{2a - 1}$, a je kořenem rovnice

$$4x^2 - 5x + 2 = 0\,.$$

Konfigurační body potom mají tyto souřadnice:

$1\ (5a - 2, -7a + 6, a - 2)$, $5\ (3a - 2, 6a - 4, 4a - 2)$,
$2\ (0, 1, 1)$, $6\ (a, a, a - 1)$,
$3\ (a, 0, 1)$, $7\ (0, 1, 0)$,
$4\ (1, 0, 0)$, $8\ (1, 1, 1)$,
$9\ (3a - 2, 6a - 4, -2a + 2)$,
$10\ (0, 0, 1)$,
$11\ (6a - 4, 7a - 6, 3a - 2)$,
$12\ (a, 1, 0)$.



Obr. 1.

c) Schema (5) vede ke konfiguraci, jež má body těchto typů: $9C + 2B + 1E$. Souřadnicový systém zvolme takto: *1* (1, 0, 0), *7* (0, 1, 0), *12* (0, 0, 1), *9* (1, 1, 1). Potom *6* (0, 1, 1), *11* (a, 0, 1), *5* ($1 - a$, 1, 0), *3* (1, 1, b), *4* (1, c, b). Souřadnice dalších bodů vypočteme jako souřadnice průsečíků vždy dvou přímek, jež procházejí body dříve uvedenými. Pro neznámé a, b, c dostaneme tři rovnice, jež vyplývají z podmínek incidence *2 5 8*, *2 7 10* a *6 8 10*.

I. $-abc + ac + 1 = 0$,

II. $-3abc + 3a^2bc - a^2b^2 + abc^2 - a^2bc^2 - a^2c + 3ab + bc - a - b = 0$,

III. $-a^2b^2c + a^2bc + a^2b^2 + 2abc - a^2b - ac - 2ab - bc + a + b = 0$
(po dělení výrazem $b - c$).

Řešení soustavy je toto: $b = \dfrac{ac + 1}{ac}$; pro a, c platí rovnice

$$- a^2c^2 + a^2c + ac^2 - 2ac + a + c = 0 \,. \tag{r}$$

Existuje tedy jednoparametrický svazek konfigurací tohoto typu. Hledejme konfiguraci, jež by obsahovala tři cizí přímky, tj. u níž by byly splněny navíc incidence *1 2 3*, *4 5 6*, *7 8 9*. Podmínka *1 2 3* vede na rovnici I, tedy pro každé řešení soustavy existuje cizí přímka *1 2 3*. Podmínka *4 5 6* vede na rovnici

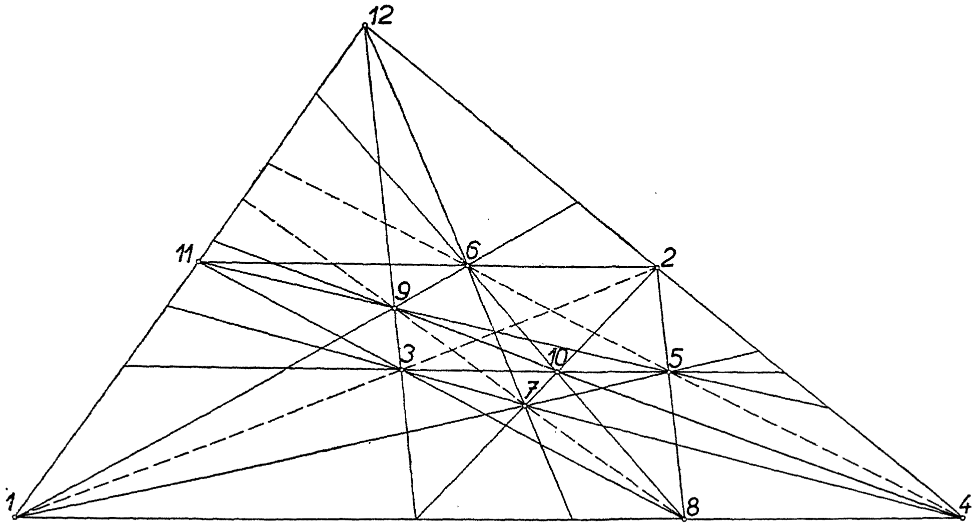
$$1 + b - c - ab + ac = 0 \,.$$

Podmínka *7 8 9* dává rovnici

$$b - c - ab + abc = 0 .$$

Vyloučíme-li z rovnic b, dostaneme podmínku

$$a^2c^2 - ac^2 - a^2c + 2ac - a + 1 = 0 . \qquad \text{(q)}$$



Obr. 2.

Poněvadž pro a, c platí vztah (r) dostáváme z (q) $c = -1$. Zvolíme-li tedy $c = -1$, dostaneme konfiguraci se třemi cizími přímkami. Pro $c = -1$ máme $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \sqrt{2} - 1$. Body konfigurace mají při této volbě tyto souřadnice:

1 $(1, 0, 0)$, *5* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0\right)$, *9* $(1, 1, 1)$,

2 $(1, -1, 1 - \sqrt{2})$, *6* $(0, 1, 1)$, *10* $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 3, 2\sqrt{2} - 3)$,

3 $(1, 1, \sqrt{2} - 1)$, *7* $(0, 1, 0)$, *11* $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1\right)$,

4 $(1, -1, \sqrt{2} - 1)$, *8* $(1, -\sqrt{2} - 1, 1)$, *12* $(0, 0, 1)$.

Tato konfigurace obsahuje tři cizí přímky *1 2 3*, *4 5 6*, *7 8 9*. Všech 19 přímek je tedy geometrickou interpretací kombinátu $\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}_{19}^{(1)}$ (obr. 2).

d) Hledejme geometrickou interpretaci schematu typu $6C + 6B$:

1 4 12	*2 4 9*	*3 4 11*	*4 7 8*
1 5 8	*2 5 7*	*3 5 10*	*5 9 12*
1 6 10	*2 6 11*	*3 6 8*	*6 7 9*
1 9 11	*2 10 12*	*3 7 12*	*8 10 11*

Souřadnicový systém zvolme takto: 10 (0, 0, 1), *3* (0, 1, 0), *6* (1, 0, 0), *11* (1, 1, 1) Potom *5* $(0, a, 1)$, *8* (1, 1, 0), *4* $(1, b, 1)$, *2* $(c, 1, 1)$, *1* $(-a, 0, 1)$. Souřadnice bodů *7, 9, 12* vypočítáme opět jakožto souřadnice průsečíků přímek, a to (*4 7 8* $\times$ *2 5 7*), (*1 9 11* $\times$ *2 4 9*), (*1 4 12* $\times$ *2 10 12*). Podmínky incidence *3 7 12, 6 7 9, 5 9 12* dávají pro neznámé a, b, c tři rovnice:

I. $b^2c - a^2b - 2abc + a^2 + 2a - 2c - b + 1 = 0$ (po krácení c),

II. $-a^2b^2 - a^2bc + 3a^2b + a^2c + bc^2 - ac^2 - 2a^2 + b^2 + 2ac - a -$
$- 3b - 2c + 3 = 0\,,$

III. $a^2b^2c + ab^2c^2 + ab^2c - 2a^2bc - 4abc + a^2c + b^2c + ac - bc + a -$
$- b + 1 = 0.$

Řešení soustavy: a je kořenem rovnice

$$3x^6 - 6x^5 - 12x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = 0\,,$$

jejíž jeden kořen leží v intervalu (3, 4).

$$b = \frac{2a^3 + 5a^2 + 4a + 1}{a^3 + a^2 + 2a + 1}\,, \qquad c = \frac{a^3 + a^2 + 2a + 1}{-4a^2 - 4a - 1}\,.$$

Body konfigurace mají tyto souřadnice:

1 $(-a, 0, 1)$, *5* $(0, a, 1)$,

2 $(a^3 + a^2 + 2a + 1, -4a^2 - 4a - 1, -4a^2 - 4a - 1)$,

3 (0, 1, 0), *6* (1, 0, 0),

4 $(a^3 + a^2 + 2a + 1, 2a^3 + 5a^2 + 4a + 1, a^3 + a^2 + 2a + 1)$, *8* (1, 1, 0),

7 $(a^7 + a^6 - 2a^4 - 5a^3 - 4a^2 - a, a^7 - 2a^6 - 11a^5 + a^4 + 19a^3 + 14a^2 + 3a,$
$-3a^6 - 2a^5 + 6a^3 + 13a^2 + 9a + 2)$,

9 $(-a^7 - 7a^6 - 19a^5 - 32a^4 - 38a^3 - 29a^2 - 12a - 2,$
$2a^6 + 9a^5 + 4a^4 - 18a^3 - 25a^2 - 12a - 2,$
$3a^6 + 18a^5 + 32a^4 + 18a^3 - 5a^2 - 8a - 2)$,

10 (0, 0, 1), *11* (1, 1, 1),

$$
\begin{aligned}
12\ (&2a^7 + 7a^6 + 13a^5 + 17a^4 + 14a^3 + 6a^2 + a,\\
&-8a^6 - 28a^5 - 38a^4 - 25a^3 - 8a^2 - a,\\
&-6a^6 - 19a^5 - 34a^4 - 43a^3 - 33a^2 - 13a - 2).
\end{aligned}
$$

e) Konfigurace typu $3C + 9B$, jejíž schema je (6). Souřadnicový systém volme takto: *2* (1, 0, 0), *12* (0, 1, 0), *10* (0, 0, 1), *6* (1, 1, 1). Ostatní body mají v tomto souřadnicovém systému tyto souřadnice:

$$
\begin{aligned}
&1\ (1, 1, b + 1),\\
&3\ (a^2c - ac, ac - c, ab - ac + a - b),\\
&4\ (a, 1, 0),\\
&5\ (-ac + ab + a + 1, abc + 1, ab^2 + ab + b + 1),\\
&7\ (0, 1, 1),\\
&8\ (abc - ab - bc + ac - a + b + 1, c, b + 1),\\
&9\ (1 - a, 0, 1),\\
&11\ (1, c, b + 1).
\end{aligned}
$$

Pro neznámé a, b, c dostaneme tři rovnice, jež vyjadřují, že trojice bodů *3 5 12*, *3 7 8*, *5 6 8* leží v jedné přímce.

$$
\begin{aligned}
\text{I.}\ \ & a^2c^2 + c(-a^3b^2 - a^3b + a^2b^2 - 2a^2b - 3a^2 + 2ab) + a^2b^2 + 2a^2b -\\
& - ab^2 + a^2 + a - b = 0,\\
\text{II.}\ \ & c^2(-2a^2b - a^2 + 3ab - b) + c(a^2b^2 + 3a^2b + 2a^2 - 2ab^2 + b^2 -\\
& - 4ab - 2a + b + 1) - a^2b^2 - 2a^2b - a^2 + 2ab^2 + 3ab - b^2 +\\
& + a - b = 0,\\
\text{III.}\ \ & c^2(-a^2b + ab - a) + c(a^2b^2 + 2a^2b - ab^2 + 2a - b) - a^2b^2 - a^2b +\\
& + ab^2 - ab - a + b = 0.
\end{aligned}
$$

Řešení soustavy je toto: Pro a platí rovnice $a^2 - a + 1 = 0$, b) je kořenem rovnice $x^4 + 3x^3(1 - a) - 4ax^2 - 2x + a - 1 = 0$,

$$
c = \frac{-b^2 + b(2a - 2) + a}{a - b}.
$$

Poznámka. Příkladem konfigurace typu $12B$ je zmíněná již konfigurace prof. B. Bydžovského.

LITERATURA

[1] *J. Metelka*: O rovinných konfiguracích (12_4, 16_3). Časopis pro pěstování matematiky *80*, 1955, 133—145.

[2] *V. Metelka:* Rovinné konfigurace (12_4, 16_3), které obsahují D-body, Časopis pro pěstování matematiky *82*, 1957, 385—439.

[3] *M. Zacharias:* Math. Nachrichten, 1952.

[4] *B. Bydžovský:* O dvou nových konfiguracích (12_4, 16_3), Časopis pro pěstování matematiky *79*, 1954, 219—228.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНАТОРИКИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ $(12_4, 16_3)$

ИРЖИ НОВАК (Jiří Novák) Либерец

(Поступило в редакцию 28/II 1958 г.)

Схемы конфигураций $(12_4, 16_3)$ можно разделить на пять групп, если воспользоваться комбинаторным понятием комбината. Под комбинатом $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(r)}$ понимают группу всех тех комбинаций объема k из данных n элементов, любые две из которых содержат самое больше r общих элементов. Через индекс q обозначается число комбинаций в комбинате. Для q справедливо соотношение

$$q \leqq \left[\frac{\left[\frac{n-r}{k-r}\right]\binom{n}{r}}{\binom{k}{r}} \right].$$

С точки зрения конфигурационных схем значение имеют комбинаты $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_q^{(1)}$, где $q = 16, \ldots, 20$. Любая схема или является комбинатом $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{16}^{(1)}$, или ее можно путем добавления 1, 2, 3, 4 комбинаций дополнить в комбинат $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{16}^{(1)}$, где $q = 17, 18, 19, 20$. Из этого вытекает классификация схем в пять групп. Конфигурация, соответствующая схеме, имеет „чужую" прямую тогда и только тогда, если точки, определенные добавленной комбинацией, лежат на прямой.

До сих пор были исследованы систематически конфигурации, содержащие хотя бы одну точку типа A или D. Автор уделяет большее внимание схемам, имеющим только элементы типа C и B. (Элементы типа E он рассматривает как особый случай элементов типа B.) Он доказывает, что существуют только схемы следующих типов: $12C$, $9C + 3B$, $6C + 6B$, $3C + 9B$ и $12B$. Указанные типы опираются на конфигурации, большей частью не опубликованные.

Zusammenfassung

ANWENDUNG DER KOMBINATORIK AUF DAS STUDIUM EBENER KONFIGURATIONEN (12_4, 16_3)

JIŘÍ NOVÁK, Liberec

(Eingelangt am 28. Feber 1958)

Die Inzidenzschemas der Konfigurationen (12_4, 16_3) können wir in fünf Gruppen einteilen, wenn wir den kombinatorischen Begriff des Kombinats benützen. Unter dem Kombinat $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(r)}$ versteht man die Gruppe aller Kombinationen k-ter Klasse derart, dass beliebige zwei Kombinationen höchstens r-Elemente gemeinsam haben. Der Index q bezeichnet die Anzahl der Kombinationen im Kombinat. Für q gilt die Relation

$$q \leqq \left[\frac{\left[\frac{n-r}{k-r} \right] \binom{n}{r}}{\binom{k}{r}} \right].$$

Für Inzidenzschemas der Konfigurationen (12_4, 16_3) sind nur die Kombinate $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_q^{(1)}$ wo $q = 16, \ldots, 20$ von Bedeutung. Ein beliebiges Schema ist entweder ein Kombinat $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_{16}^{(1)}$, oder wir können es durch Zufügung von 1, 2, 3, 4 Kombinationen zum Kombinat $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}_q^{(1)}$ ergänzen, wo $q = 17, \ldots, 20$ ist. Hieraus folgt die Einteilung der Schemas in fünf Gruppen. Die Konfiguration, die einem Inzidenzschema entspricht, hat eine sogenannte fremde Gerade dann und nur dann, wenn die durch die zugefügte Kombination bestimmten Punkte in einer Geraden liegen.

Bisher sind systematisch diejenige Konfigurationen, die A- und D-Punkte enthalten, studiert worden. Der Autor betrachtet näher solche Inzidenzschemas, die nur Elemente vom Typus C und B enthalten. (Die Elemente vom Typus E betrachtet er als Sonderfall der B-Elemente.) Er beweist den Satz, dass diese Schemas zu folgenden Typen gehören: $12C$, $9C + 3B$, $6C + 6B$, $12B$. Beispiele von Konfigurationen dieser Typen, die zumeist neu sind, werden zum Schluss angeführt.