Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Mikulík

Poznámky ke svazům s metrikou

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 1, 1--6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117286`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 84 * PRAHA, 19. II. 1959 * ČÍSLO 1

POZNÁMKY KE SVAZŮM S METRIKOU

MILOSLAV MIKULÍK, Brno

(Došlo dne 20. února 1957) DT: 519.5:519.53

V této práci se zabývám vztahy mezi metrickou konvergencí a o-konvergencí ve svazech s metrikou. Navazuji v ní na svou práci [2]. Vznikla z podnětu akademika J. NOVÁKA, který vyslovil názor, že některé výsledky obsažené v [2] lze dokázat za obecnějších předpokladů. To se mi podařilo ve větě 2.

1

V dalším bude S značit neprázdnou množinu s následujícími vlastnostmi:

(V1) *S je svaz.*

(V2) *Na množině S je zavedena taková metrika ϱ, že z každé neklesající [nerostoucí] posloupnosti prvků z S,*[1]) *ohraničené vzhledem k metrice ϱ, lze vybrat posloupnost, která je v S metricky konvergentní.*

(V3) *Jestliže $A \subset S$ je spočetná nebo konečná, potom, má-li infimum a supremum, je jejich vzdálenost rovna průměru množiny A (značím jej $d(A)$).*

Tím je na množině S definován svaz s metrikou, který budu značit $\mathfrak{S}$.[2]) Z (V3) vyplývá, že ve svazu s metrikou $\mathfrak{S}$ platí: Jestliže $x, y, z \in S$, $x < y < z$, potom je $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z)$, $\varrho(y, z) \leqq \varrho(x, z)$. Je tedy svaz s metrikou $\mathfrak{S}$ zvláštním případem svazu s metrikou, o němž jsem pojednával ve své práci [3]. Podle výsledků tam uvedených platí tato lemmata:

[1]) Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající [nerostoucí], jestliže je $u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_n \leqq \ldots$ $[u_1 \geqq u_2 \geqq \ldots \geqq u_n \geqq \ldots]$.

[2]) Příkladem svazu s metrikou s vlastnostmi (V1), (V2), (V3) je svaz definovaný na množině M všech řešení diferenciální rovnice $x' = f(t, x)$, kde $f(t, x)$ je spojitá a ohraničená funkce v dvojrozměrném intervalu Δ: $|t - \xi| \leqq a$, $|x - \eta| < \infty$. Částečné uspořádání množiny M a metrika ϱ v M je zavedena stejně jako v příkladě mé práce [2] na str. 364.

Lemma 1. *Budiž* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající [nerostoucí] posloupnost prvků z* S, *ohraničená vzhledem k metrice* ϱ. *Potom existuje* $u = \bigvee_{n=1}^{\infty} u_n$ $[u = \bigwedge_{n=1}^{\infty} u_n]$ *a platí* $u_n \underset{\varrho}{\to} u$.

Lemma 2. *Nechť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je taková posloupnost prvků z* S, *že* $x_n \underset{0}{\to} x$. *Potom též* $x_n \underset{\varrho}{\to} x$.

Dokažme nyní tuto větu:

Věta 1. *Ve svazu s metrikou* $\mathfrak{S}$ *jsou metrická konvergence a o-konvergence identické.*

Důkaz. Vzhledem k lemmatu 2 stačí dokázat, že metrická konvergence implikuje o-konvergenci. Nechť tedy $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, x_n, $x \in S$. Označme $z_{nm} = \bigwedge_{k=n}^{n+m} x_k$, $Z_{nm} = \bigvee_{k=n}^{n+m} x_k$ pro $n = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$. Při každém pevném n existují podle lemmatu 1 prvky $l_n = \bigwedge_{m=1}^{\infty} z_{nm} = \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$, $L_n = \bigvee_{m=1}^{\infty} Z_{nm} = \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$. Podle (V3) je $\sup_{r,s \geqq n} \varrho(x_r, x_s) = \varrho(l_n, L_n)$. Je tedy $\lim_{n \to \infty} \varrho(l_n, L_n) = 0$. Vzhledem k lemmatu 1 $l_n \underset{\varrho}{\to} \bigvee_{n=1}^{\infty} l_n$, $L_n \underset{\varrho}{\to} \bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n$. Je tedy $\lim_{n \to \infty} \varrho(l_n, L_n) = \varrho(\bigvee_{n=1}^{\infty} l_n, \bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n) = 0$, takže $\bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} l_n$. Označme $y = \bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} l_n$. Platí tedy $x_n \underset{0}{\to} y$. Podle lemmatu 2 platí: $x_n \underset{\varrho}{\to} y$. Poněvadž podle předpokladu $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, je $y = x$. Platí tedy $x_n \underset{0}{\to} x$.

2

Budiž nyní G svaz, na němž je definována reálná funkce $v(x)$, která má tyto vlastnosti:

1° Jestliže $x, y \in G$, potom je $v(x) + v(y) = v(x \wedge y) + v(x \vee y)$.

2° Jestliže $x, y \in G$, $x < y$, potom je $v(x) < v(y)$.

Položíme-li nyní

$$\varrho(x, y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y) \quad \text{pro} \quad x, y \in G\,, \tag{1}$$

je ϱ metrikou na G. Tento svaz s metrikou budu dále značit $\mathfrak{G}$. Je-li svaz s metrikou $\mathfrak{G}$ metricky úplný, jsou v něm metrická konvergence a *-konvergence identické.[3]) Dokažme nyní toto lemma.

Lemma 3. *Svaz s metrikou* $\mathfrak{G}$ *má vlastnost* (V2) *když a jen když je metricky úplný.*

Důkaz. I. Jestliže svaz s metrikou $\mathfrak{G}$ má vlastnost (V2), je metricky úplný podle lemmatu 7 mé práce [2].

[3]) Viz [1], hlava V, věta 15.

II. Nechť $\mathfrak{S}$ je metricky úplný a nechť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná neklesající posloupnost prvků z $\mathfrak{S}$, ohraničená vzhledem k metrice ϱ. Položme $\sup_n \varrho(u_1, u_n) = a$. Je-li $a = 0$, je $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \ldots$, takže posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Nechť tedy $a > 0$. Vzhledem k (1) platí pro $s > r$ vztah $\varrho(u_r, u_s) = \varrho(u_1, u_s) - \varrho(u_1, u_r)$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy určit takový index n_0, že pro všechna $r, s > n_0$ je $\varrho(u_r, u_s) < \varepsilon$. Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy i v tomto případě cauchyovská. Poněvadž $\mathfrak{S}$ je metricky úplný, je v něm posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ metricky konvergentní. Podobně se dokáže vlastnost (V2) pro nerostoucí posloupnosti.

Označme nyní 3° tuto vlastnost funkce $v(x)$:

3°. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z G. Existuje-li $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$, potom nechť platí

$$v(\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n) - v(\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n) = \sup_{n,m} [v(x_n \vee x_m) - v(x_n \wedge x_m)] .$$

Je-li na svazu G definována reálná funkce $v(x)$ s vlastnostmi 1°, 2°, 3°, potom metrika ϱ definovaná na G vztahem (1) má vlastnost (V3). Z věty 2 a z lemmatu 3 vyplývá:

D ů s l e d e k 1. Nechť na svazu G je definována reálná funkce $v(x)$ s vlastnostmi 1°, 2°, 3° a nechť je na něm zavedena metrika ϱ vztahem (1). Je-li takto definovaný svaz s metrikou metricky úplný, jsou v něm identické metrická konvergence a o-konvergence.

P o z n á m k a 1. Nechť na svazu G je definována reálná funkce $v(x)$ s vlastnostmi 1°, 2°, 3° a nechť je na něm definována metrika ϱ vztahem (1). Takto definovaný svaz s metrikou nemusí být metricky úplný ani v případě, že jsou v něm metrická konvergence a o-konvergence identické.

Uvedu příklad: Nechť G je množina čísel tvaru $\frac{n-1}{n}$ nebo $\frac{2n-1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Vzhledem k přirozenému uspořádání je G svazem. Definujme nyní na G funkci $v(x)$ takto: $v(x) = x$ pro $x \in G$. Takto definovaná funkce $v(x)$ má vlastnosti 1°, 2°, 3°. Metriku ϱ definujme na G vztahem (1). Takto definovaný svaz s metrikou na G není metricky úplný, i když jsou v něm metrická konvergence a o-konvergence identické.

3

Nechť na množině $M \neq \emptyset$ je definován σ-úplný svaz a zároveň metrika ϱ, vzhledem k níž je M kompaktní. Tím je na množině M definován svaz s metrikou, který budu značit $\mathfrak{M}$.

Lemma 4. *Nechť svaz s metrikou $\mathfrak{M}$ má vlastnost:*

(β) *Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom je* $\lim_{n\to\infty} \varrho(\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k, \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k) = 0$.

Potom svaz s metrikou $\mathfrak{M}$ má vlastnost:

(δ) *Jestliže $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající [nerostoucí] posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom je metricky konvergentní a platí $u_n \underset{\varrho}{\to} u$, kde $u = \bigvee_{n=1}^{\infty} u_n$ [$u = \bigwedge_{n=1}^{\infty} u_n$].*

Důkaz. Nechť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$. Poněvadž $\mathfrak{M}$ je kompaktní, lze z každé posloupnosti $\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, vybrat posloupnost $\{u_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ metricky konvergentní v $\mathfrak{M}$. Položme nyní $u = \bigvee_{j=1}^{\infty} u_{n_{i_j}} = \bigvee_{n=1}^{\infty} u_n$. Vzhledem k ($\beta$) je $\lim_{j\to 0} \varrho(\bigwedge_{k=j}^{\infty} u_{n_{i_k}}, \bigvee_{k=j}^{\infty} u_{n_{i_k}}) = \lim_{j\to\infty} \varrho(u_{n_{i_j}}, u) = 0$, takže $u_{n_{i_j}} \underset{\varrho}{\to} u$. Poněvadž z každé posloupnosti $\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, lze vybrat posloupnost $\{u_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že $u_{n_{i_j}} \underset{\varrho}{\to} u = \bigvee_{n=1}^{\infty} u_n$, platí $u_n \underset{\varrho}{\to} u$.

Podobně se věta dokáže pro nerostoucí posloupnosti.

Věta 2. *Ve svazu s metrikou $\mathfrak{M}$ jsou ekvivalentní tato tvrzení:*

(α) *Metrická konvergence a o-konvergence jsou identické.*

(β) *Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom platí* $\lim_{n\to\infty} \varrho(\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k, \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k) = 0$.

(γ) *Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$, potom platí $\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$.*

Důkaz. I. Nechť platí (α). Nechť $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, kde $x_n, x \in \mathfrak{M}$. Podle (α) $x_n \underset{0}{\to} x$. Tedy $\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k \underset{0}{\to} x$, $\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k \underset{0}{\to} x$. Vzhledem k ($\alpha$) je $\lim_{n\to\infty} \varrho(\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k, \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k) = 0$. Platí tedy ($\beta$).

II. Nechť platí (β) a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je metricky konvergentní posloupnost prvků z $\mathfrak{M}$. Podle lemmatu 4 platí $\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k \underset{\varrho}{\to} \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$, $\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k \underset{\varrho}{\to} \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$. Poněvadž podle ($\beta$) je $\lim_{n\to\infty} \varrho(\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k, \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k) = 0$, je $\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$. Platí tedy ($\gamma$).

III. Nechť platí (γ). a) Nechť $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, kde $x_n, x \in \mathfrak{M}$. Položme $y_{2n} = x_n$, $y_{2n-1} = x$. Zřejmě $y_n \underset{\varrho}{\to} x$. Podle ($\gamma$) platí $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} y_k = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} y_k$. Poněvadž dále $\bigwedge_{k=n}^{\infty} y_k \leqq x \leqq \bigvee_{k=n}^{\infty} y_k$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, je $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} y_k = x = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} y_k$. Tedy $y_n \underset{0}{\to} x$, takže též $y_{2n} \underset{0}{\to} x$. To znamená, že $x_n \underset{0}{\to} x$.

b) Nechť $x_n \underset{0}{\rightarrow} x$, kde $x_n, x \in \mathfrak{M}$. Poněvadž $\mathfrak{M}$ je kompaktní, lze z libovolné posloupnosti $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, vybrat posloupnost $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n_{i_j}} \underset{\varrho}{\rightarrow} y$, kde $y \in \mathfrak{M}$. Podle části a) $x_{n_{i_j}} \underset{0}{\rightarrow} y$. Podle předpokladu $x_n \underset{0}{\rightarrow} x$, takže též $x_{n_{i_j}} \underset{0}{\rightarrow} x$. Je tedy $y = x$. Poněvadž tedy z každé posloupnosti $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, vybrané z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, lze vybrat částečnou posloupnost $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n_{i_j}} \underset{\varrho}{\rightarrow} x$, platí $x_n \underset{\varrho}{\rightarrow} x$. Platí tedy ($\alpha$).

Poznámka 2. Věta 2 nemusí platit v σ-úplných svazech s metrikou. Uvedu příklad: Nechť M je množina $\left\{1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 0\right\}$. Vzhledem k přirozenému uspořádání je množina M σ-úplným svazem. Metriku ϱ definujme na M takto: $\varrho(x, y) = |y - x|$ pro $x, y \in M$. Tím je na množině M definován σ-úplný svaz s metrikou. Zřejmě $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{0}{\rightarrow} 0$, avšak posloupnost $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ není v M konvergentní vzhledem k metrice ϱ.

Důsledek 2. Nechť na množině $N \neq \emptyset$ je definován σ-úplný svaz a nechť je na N zavedena zároveň metrika ϱ, vzhledem k níž je N kompaktní. Nechť dále pro každou konečnou nebo spočetnou $A \subset N$ platí $d(A) = \varrho(\bigwedge_{t \in A} t, \bigvee_{t \in A} t)$. Potom v tomto svazu s metrikou jsou metrická konvergence a o-konvergence identické. Skutečně, uvažovaný svaz s metrikou má vlastnost (β), takže tvrzení vyplývá okamžitě z věty 2.

LITERATURA

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, 1948, New York.
[2] *M. Mikulík:* Метрические структуры, Чех. мат. журнал, *4 (79)*, 1954, 364—371.
[3] *M. Mikulík:* Примечание к *-сходимости, Spisy vydávané přírod. fak. MU v Brně, č. *68*, 1955, 1—10.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ К СТРУКТУРАМ С МЕТРИКОЙ

МИЛОСЛАВ МИКУЛИК (Miloslav Mikulík), Брно

(Поступило в редакцию 20/II 1957 г.)

Настоящая работа примыкает к работе автора [2]; в ней показано, что в структурах с метрикой, обладающих свойствами (V1), (V2), (V3), метрическая сходимость совпадает с o-сходимостью. Эти результаты применяются к метрической структуре, которую рассматривает Г. Биркгофф в [1].

Далее, в теореме 2 даются некоторые необходимые и достаточные условия того, чтобы метрическая сходимость и o-сходимость были тождественны в σ-полных структурах, в которых введена метрика, по отношению к которой они компактны.

Summary

A NOTE ON LATTICES WITH DISTANCE FUNCTIONS

MILOSLAV MIKULÍK, Brno

(Received February 2, 1957)

This paper is a free continuation of the author's paper [2]. It is proved that in lattices in which there is defined a distance function satisfying conditions (V1), (V2), (V3), metric convergence and o-convergence are identical; this result is applied to the metric lattice of G. Birkhoff [1].

In theorem 2 necessary and sufficient conditions are stated for the equivalence of metric and o-convergence in σ-complete lattices which are simultaneously compact metric spaces.