Časopis pro pěstování matematiky

Rudolf Výborný

O zobecnění jistých vět o vnoření [Výtah z přednášky S. L. Soboleva]

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 4, 458--460

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117282`

REFERÁTY

EINIGE FRAGEN DER APPROXIMATIONSTHEORIE

(Referát o přednášce dr GÉZY FREUDA proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 6. dubna 1957.)

Přednášející předvedl důkaz následující věty:

Nechť f jest funkce spojitá na celé přímce, periodická s periodou 2π. Nechť f má spojitou derivaci v každém bodě. Existuje absolutní konstanta k s touto vlastností: Nechť P_n je posloupnost trigonometrických polynomů stupně $\leqq n$, nechť γ_n jsou čísla $\geqq 1$ a nechť platí

$$|f - P_n| \leqq \gamma_n E_n(f)\,.$$

Potom platí

$$|f' - P'_n| \leqq k\gamma_n\, E_n(f')\,.$$

Důkaz. Jestliže s_n znamená n-tý parciální součet Fourierovy řady pro f, označíme $V_n(f)$ průměr $\frac{s_n + \dots + s_{2n-1}}{n}$. Platí potom podle věty de la Vallée-Poussinovy odhad $|f - V_n(f)| \leqq 4E_n(f)$. Dále se dá za uvedených předpokladů dokázati, že $V_n(f') = V'_n(f)$. Je potom

$$f' - P'_n = f' - V_n(f') + [V_n(f) - P_n]'\,.$$

Rozdíl $f' - V_n(f')$ je odhadnut číslem $4E_n(f')$. Podle Bernsteinovy věty bude druhý rozdíl odhadnut $2n$-násobkem normy polynomu $V_n(f) - P_n$. Je však

$$|V_n(f) - P_n| \leqq |V_n(f) - f| + |f - P_n| \leqq (4 + \gamma_n)\, E_n(f)\,.$$

Je tedy

$$|f' - P'_n| \leqq 4E_n(f') + 2n(4 + \gamma_n)\, E_n(f)\,.$$

Podle nerovnosti, dokázané nedávno STEČKINEM, platí $E_n(f) \leqq \frac{A}{n} E_n(f')$, odkud ihned plyne uvedený odhad.

Přednášející se zmínil ještě o některých podobných větách týkajících se lokalisace aproximace a v diskusi podal důkaz věty Stečkinovy a zodpověděl řadu dotazů.

Vlastimil Pták, Praha.

O ZOBECNĚNÍ JISTÝCH VĚT O VNOŘENÍ

(Referát o přednášce S. L. SOBOLEVA, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 15. dubna 1957, o dosud neuveřejněných výsledcích z funkcionální analysy.)

Přednášející nejdříve připomněl, že problematika, kterou se zabýval, přirozeně vznikla při studiu existence zobecněných řešení kvasilineární hyperbolické rovnice

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

$\left(A_{ij}\right.$ a F jsou funkce proměnných $\left.x_1, \ldots, x_n, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Vyslovil definici zobecněných derivací a prostorů W_p^l.

Vlastním obsahem přednášky bylo pak zobecnění těchto dvou vět.

I. *Buď φ reálná funkce n proměnných definovaná v oblasti Ω, $\varphi \in W_p^l$, $lp > n$. Potom je $\varphi \in C$ a existuje konstanta (nezávislá na φ) tak, že $\|\varphi\|_C \leqq M\|\varphi\|_{W_p^l}$.*

II. *Má-li φ týž význam jako ve větě* I *a je-li $lp \leqq n$, potom $\varphi \in L_q$ na každé s-rozměrné nadrovině, kde $s > n - lp$ a $q = \dfrac{sp}{n - lp}$.*

Tyto dvě věty hrají důležitou roli nejenom v theorii hyperbolických rovnic, nýbrž v celé matematické fysice, při řešení eliptických rovnic variační metodou, při formulaci okrajových úloh pro polyharmonickou rovnici atd.

Přednášející ukázal několik jednoduchých objasňujících příkladů na věty I a II a zabýval se potom případem, kdy hodnoty funkce φ leží v Banachově prostoru X. Zavedl definici integrálu pro „abstraktní“ funkce (na příkladě ukázal, že definice Bochnerova je pro jeho účely příliš úzká). Pro schodovitou funkci φ je přirozené definovat integrál

$$\int_\Omega \varphi(P)\,\mathrm{d}\Omega = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, m(E_i)\,; \quad \varphi(P) = \alpha_i \text{ na } E_i\,, \quad \bigcup_1^k E_i = \Omega\,.$$

Je-li $\|\varphi\|_\Phi$ norma zobrazení φ taková, že pro $\varepsilon > 0$ existuje δ tak, že pro $\|\varphi\|_\Phi < \delta$ je $\|\int \varphi(P)\,\mathrm{d}\Omega\|_X < \varepsilon$ pro každou schodovitou funkci φ, lze rozšířit operátor integrace na funkce, které v normě prostoru Φ jsou limitou funkcí schodovitých. Pro tyto funkce lze definovat normu $\|\varphi\|_{\Phi_p} = \sup\limits_\omega \dfrac{\|\int \omega(P)\,\varphi(P)\,\mathrm{d}\Omega\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}}$, při čemž ω je schodovitá funkce, jejíž hodnoty jsou reálná čísla a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ pro $p > 1$; pro případ $p = 1$ je analogicky $\|\varphi\|_{\Phi_p} = \sup \dfrac{\|\int \omega(P)\,\varphi(P)\,\mathrm{d}\Omega\|_X}{\operatorname{Max}|\omega(P)|}$. Je-li X reálná osa, je $\|\varphi\|_{\Phi_p} = [\int_\Omega |\varphi|^p\,\mathrm{d}\Omega]^{\frac{1}{p}}$. Snadno se lze přesvědčit, že $\|\varphi\|_{\Phi_p}$ je skutečně norma. Funkce, pro něž $\|\varphi\|_{\Phi_p} < +\infty$, tvoří lineární prostor Φ_p, který je analogií prostoru L_p.

Přednášející na příkladě ukázal, že prostor Φ_p nemusí být úplný. Φ_p lze doplnit, je však lépe zavedení ideálních elementů obejít tímto způsobem:

Je-li $\varphi(P)$ bodová funkce, jejíž hodnoty leží v prostoru X, potom jí lze předpisem $\varphi(E) = \int_\Omega \xi_E\, \varphi(P)\,\mathrm{d}\Omega$ (ξ_E je charakteristická funkce množiny E) přiřadit množinovou funkci $\varphi(E)$. Je-li $\omega(P)$ schodovitá funkce nabývající reálných hodnot, lze definovat integrál $\int \omega(P)\,\mathrm{d}\varphi(E)$ a s jeho pomocí pak v prostoru Φ_p všech funkcí $\varphi(E)$ normu

$$\|\varphi(E)\|_{\Phi_p} = \sup_\omega \frac{\|\int \omega(P)\,\mathrm{d}\varphi(E)\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}}\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Znakem Ψ_p označme množinu těch $\psi(E)$, pro něž je $\psi(E) = \lim \psi_k(E)$, kde $\psi_k(E)$ je množinová funkce přiřazená funkci schodovité. Přednášející dokázal, že $\Psi_p \subset \Phi_p$ a $\Psi_p \neq \Phi_p$.

Akademiku Sobolevovi se podařilo objevit nutnou a postačující podmínku pro to, aby $\psi \in \Psi_p$; to nastane tehdy a jen tehdy, když

a) $\psi(E)$ je absolutně spojitá,

b) $\psi(E)$ je spojitá při posunutí, t. zn. že k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $\|Q\|_{E_n} < \delta$, potom $\|\psi(E+Q) - \psi(E)\|_X < \varepsilon$, při čemž $E + Q$ značí množinu, která vznikne posunutím množiny E o vektor Q.

Akademik Sobolev ukázal na příkladě, že existují funkce, které jsou absolutně spojité, ale nejsou spojité při posunutí, t. j. ukázal, že neplatí a)$\Rightarrow$ b) a vyslovil domněnku, že z b) plyne a).

Funkci $\psi(E)$ nazveme zobecněnou derivací $\dfrac{\partial\varphi(E)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, jestliže pro každou funkci v, α-kráte spojitě diferencovatelnou a rovnou nule v blízkosti hranice oblasti Ω, platí

$$\int_\Omega \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\, \mathrm{d}\varphi(E) = (-1)^\alpha \int_\Omega v\, \mathrm{d}\psi(E).$$

Hlavní výsledek, ke kterému přednášející dospěl, je ten, že věty o vnoření I a II platí i pro množinové funkce, které náleží do prostoru Ψ_p. Přitom je ovšem nutné zachovat jistou opatrnost při formulaci vět. Přesné znění věty analogické I je toto:

I′. *Je-li* $\psi \in \Psi_p$ *množinová funkce definovaná na měřitelných podmnožinách oblasti* Ω *taková, že* $\left\|\dfrac{\partial^l\psi(E)}{\partial x_1^{l_1}\dots\partial x_n^{l_n}}\right\|_{\Phi_p} < K$ *a je-li* $lp > n$, *potom* $\psi(E)$ *je integrál ze spojité funkce.*

Podobně lze formulovat i větu analogickou II; přednášející se při tom omezil jen na případ $s = n$.

*

S. L. Sobolev přednášel ještě v matematické obci pražské dne 18. dubna 1957 na théma „Nová formulace okrajových úloh u eliptických diferenciálních rovnic“.

V této přednášce podrobně rozvedl výsledky, kterých dosáhl společně s M. I. Višikem a které uveřejnil v článku „Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных“, ДАН СССР, Т. 111, № 3, 1956, 521—523.

Rudolf Výborný, Praha.

O HOMOMORFISMECH ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN A SVAZŮ

(Vlastní referát o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků“ dne 8. dubna 1957 v Brně.)

Částečně uspořádanou množinou M rozumíme neprázdnou množinu M, na níž je definována asymetrická a transitivní binární relace $<$ (srv. B. Dushnik — E. W. Miller: Partially ordered sets, Amer. Jour. of Math. *63* (1941), 600—610). Je-li $x < y$ nebo $x = y$, píšeme $x \leqq y$ a neplatí-li ani $x \leqq y$ ani $y \leqq x$, píšeme $x \parallel y$.

O částečně uspořádané podmnožině $P \subset M$ říkáme, že je *vložená* (v částečně uspořádané množině M), jestliže platí

$$z \in M - P \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \quad \text{a} \quad \{z < x \Leftrightarrow z < y\} \quad \text{pro každé } x, y \in P\,. \tag{1}$$

Vzhledem k (1) lze na každém rozkladu $\overline{M}$ na částečně uspořádané množině M, který je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny v M, definovat t. zv. *faktorovou částečně uspořádanou množinu* $\overline{M}$ takto

$$P < Q\,;\quad P, Q \in \overline{M} \Leftrightarrow x < y\,;\quad x \in P\,,\ y \in Q\,. \tag{2}$$

Zobrazení φ částečně uspořádané množiny M na částečně uspořádanou množinu N, které splňuje podmínky

$$x < y\,;\quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)\,, \tag{3}$$

$$x \parallel y\,;\quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y)\,, \tag{4}$$