Časopis pro pěstování matematiky

Václav Metelka

Rovinné konfigurace $(12_4, 16_3)$, které obsahují D-body

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 4, 385--439

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117278`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 82 * PRAHA, 20. XI. 1957 * ČÍSLO 4

ROVINNÉ KONFIGURACE (12_4, 16_3), KTERÉ OBSAHUJÍ D-BODY

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Došlo dne 18. dubna 1956.) DT:513.48

V této práci jsou uvedeny všechny rovinné realisovatelné konfigurace (12_4, 16_3), které obsahují aspoň jeden bod typu D, a s jemnějším tříděním je zároveň provedena jejich klasifikace. Všechny tyto nové konfigurace (v počtu 57) jsou původní a (kromě dvou z nich, o kterých jsem informoval čtenáře již dříve [15]) dosud nebyly uveřejněny.

Úvod

V článku mého bratra [13] je naznačen program, který jsme stanovili pro sestavení tabulky všech možných konfigurací (12_4, 16_3), jež se dají realisovat body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel. Touto prací je splněn druhý bod programu, totiž sestavení tabulky všech realisovatelných konfigurací (12_4, 16_3), které obsahují D-body.

Konfigurace (12_4, 16_3) jsou — jak známo — skupiny dvanácti bodů a šestnácti přímek v rovině, jejichž vzájemný vztah je ten, že každým z bodů procházejí 4 přímky a na každé přímce leží 3 body.

Leží-li dva body na konfigurační přímce, říkáme — jak je zvykem — že tyto dva body jsou spojeny. V opačném případě říkáme, že jsou odděleny.

Body konfigurace označujeme *1, 2, 3, …, 12*. Okolnost, že dva body (třeba *10, 11*) jsou spojeny, značme stručně *10—11*. Dle definice konfigurace musí na každé konfigurační přímce ležet právě tři body. Jsou-li to ku příkladu body *10, 11, 12*, značme tuto konfigurační přímku stručně *10—11—12*.

Každý konfigurační bod je spojen s dalšími osmi body, od tří bodů je tedy oddělen. Je-li ku příkladu bod *1* oddělen od bodů *2, 3, 4*, zapíšeme tuto okolnost stručně takto: *1* : *2*, *1* : *3*, *1* : *4* (nebo prostě *1* : *2, 3, 4*), což ovšem znamená také obráceně, že body *2, 3, 4* jsou odděleny od bodu *1*.

Nechť *1* : *2, 3, 4*. Dle toho, jaký je vzájemný vztah bodů *2, 3, 4*, můžeme bod *1* zařadit do jednoho z těchto pěti typů:

1. Bod *1* je typu A (stručně A-bod), jestliže body *2, 3, 4* jsou navzájem odděleny, t. j. jestliže platí $2:3$, $2:4$, $3:4$. V tomto případě ovšem také body *2, 3, 4* jsou A-body. Platí tedy věta:

A-body *vystupují v konfiguracích ve čtveřicích.*

2. Bod *1* je typu B (stručně B-bod), jestliže body *2, 3, 4* jsou navzájem spojeny, neleží však na konfigurační přímce, t. j. jestliže platí $2—3$, $2—4$, $3—4$, ne však $2—3—4$.

3. Bod *1* je typu C (stručně C-bod), jestliže jeden z bodů *2, 3, 4* je spojen s ostatními dvěma, tyto dva však jsou odděleny (t. j. jestliže platí ku příkladu $2—3$, $2—4$, $3:4$).

4. Bod *1* je typu D (stručně D-bod), jestliže jen dva z bodů *2, 3, 4* jsou spojeny (t. j. jestliže platí ku příkladu $2—3$, $2:4$, $3:4$. V tomto případě ovšem také *4* jest D-bod). Platí tedy věta:

D-body *vystupují v konfiguracích ve dvojicích.*

5. Bod *1* je typu E (stručně E-bod), jestliže body *2, 3, 4* leží na konfigurační přímce, t. j. jestliže platí $2—3—4$.

Podle typu bodů lze třídit konfigurace tím, že udáme, kolik bodů kterého typu konfigurace obsahuje; tak ku příkladu do třídy $B_4C_5D_2E_1$ patří všechny konfigurace, které obsahují čtyři B-body, pět C-bodů, dva D-body, jeden E-bod a žádný A-bod. Pro nejbližší úkoly toto třídění zatím postačí. V pozdějším průběhu bude třeba provést třídění jemnější.

I. Incidenční schemata

Naším úkolem v této kapitole jest najít všechna navzájem různá incidenční schemata konfigurací $(12_4, 16_3)$, která obsahují aspoň jeden bod typu D. Incidenční schema dané konfigurace, viz [14], je schema udávající, jakým způsobem jsou body této konfigurace mezi sebou spojovány. Abychom se vyhnuli otázkám, zda mohou dvě různá incidenční schemata představovat touž konfiguraci, nebo zda dvě různé konfigurace mohou mít totéž incidenční schema, použijeme definice:

Definice. Dvě incidenční schemata jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jestliže existuje permutace čísel 1, 2, 3, ..., 12, kterou jedno schema přechází v druhé. Dvě konfigurace pak jsou ekvivalentní právě tehdy, jestliže jejich incidenční schemata jsou ekvivalentní.

Nyní již můžeme přistoupit ke konstrukci těchto schemat. Vycházíme z předpokladu existence aspoň jednoho D-bodu.

Nechť *9* je D-bodem a nechť je oddělen od bodů *10, 11, 12,* při čemž body *10, 11* jsou spojeny. Pak ovšem (dle definice D-bodu) musí být $12:9, 10, 11$

a je tedy *12* také *D*-bod. Třetí bod na spojnici *10—11* (kterým nemůže být *9* ani *12*) označme *1*. Tyto výsledky stručně zapíšeme:

$$9 : 10, 11, 12\,; \quad 12 : 9, 10, 11\,; \quad 1—10—11\,. \tag{1}$$

Z těchto výsledků především plyne, že bod *10* musí být oddělen ještě od jednoho bodu (různého od bodů *1*, *11*, *9*, *12*) a označme ho tedy *2*. Je tudíž

$$10 : 2\,. \tag{2}$$

Dokažme nyní, že za těchto předpokladů musí platit:

$$11—2\,, \tag{3}$$

neboť:

Ze 4 přímek incidentních s bodem *9* prochází jedna bodem *2* ;
ze 4 přímek incidentních s bodem *12* prochází jedna bodem *2* ;
ze 4 přímek incidentních s bodem *10* neprochází žádná bodem *2* ;

(neboť bod *10* jest od bodu *2* oddělen), tedy ze 4 přímek incidentních s bodem *11* prochází jedna bodem *2*, což plyne takto:

Z uvedených 16 konfiguračních přímek je 15 navzájem různých (přímku *1—10—11* jsme počítali dvakrát) a z nich tedy musí (aspoň) tři být incidentní s bodem *2*. Tím je proveden důkaz tvrzení (3).

Prozatím víme, že bod *11* je oddělen od bodů *9*, *12* a musí být tudíž oddělen ještě od jednoho bodu (různého od bodů *1*, *2*, *10*, *9*, *12*). Nazveme tento bod *3*. Je tedy:

$$11 : 3\,. \tag{4}$$

Z nahoře uvedených patnácti různých konfiguračních přímek procházejí právě tři bodem *2* (totiž *9—2*, *12—2*, *11—2*) a musí jím tedy také procházet přímka šestnáctá, kterou si zatím označme *p*. Bodem *3* procházejí (z nahoře uvedených patnácti přímek — různých od *p*) jen tři, totiž *3—9*, *3—10* a *3—12* (neboť *11* : *3*), z čehož plyne, že bod *3* je incidentní také s přímkou *p*. Právě tak bodem *1* procházejí jen tři z konfiguračních přímek různých od *p* (totiž *1—9*, *1—12*, *1—10—11*) a musí být také bod *1* incidentní s přímkou *p*. Jest tudíž:

$$p \equiv 1—2—3\,. \tag{5}$$

Čtyři přímky procházejí bodem *9*. Jsou to přímky *9—1—a*, *9—2—b*, *9—3—c*, *9—d—e*. O číslech *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ovšem platí, že jsou navzájem různá a také různá od čísel 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12. Je tedy možno je nahradit dosud neobsazenými číslicemi 4, 5, 6, 7, 8, což učiníme a všechny dosavadní výsledky zapíšeme takto:

$$\frac{9}{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 7\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{matrix}}\,, \quad \frac{1}{\begin{matrix}2 & 10\\ 3 & 11\end{matrix}}\,; \quad \begin{matrix}10 : 2, & 9, 12\,,\\ 11 : 3, & 9, 12\,,\\ 12 : 9, & 10, 11\,.\end{matrix} \tag{I}$$

Tento zápis čteme tak, že bodem *9* procházejí přímky *9—1—4*, *9—2—5*, *9—3—6*, *9—7—8*. Podobně bodem *1* procházejí přímky *1—2—3*, *1—10—11*. Čtenář si jistě uvědomil, že v tomto zápisu jest obsažen i zápis *9* : *10, 11, 12* a že celé částečné schema (I) se nemění permutacemi T_1, T_2, kde

$$(2\ 3)\ (5\ 6)\ (10\ 11)\,, \tag{T_1}$$

$$(7\ 8)\,. \tag{T_2}$$

V částečném schematu (I) máme již pevně určeno 6 konfiguračních přímek, z nichž žádná není incidentní s bodem *12*, jen jedna prochází bodem *10* a jen jedna bodem *11* (totiž *1—10—11*). Nalezneme-li tedy ještě čtyři přímky bodem *12*, tři přímky bodem *10* a tři přímky bodem *11*, budeme mít všech šestnáct konfiguračních přímek. Pokusme se tedy nejprve nalézt přímky bodem *12*. Těmito přímkami pak schema (I) rozšíříme.

Přímky bodem *12* můžeme zřejmě zapsat takto: $\dfrac{12}{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & f\\ h & i & j & g\end{matrix}}$.

Snadno totiž zjistíme, že žádné dvě číslice 1, 2, 3 nemohou v tomto schematu stát v jednom sloupci vzhledem k tomu, že již dle schematu (I) existuje přímka *1—2—3*. Vidíme především, že můžeme položit za h číslice *5*, *6*, *7*, *8* (a za h již nemáme jiné volby). Permutací T_1 — kterou se schema (I) nemění — přechází však přímka *12—1—5* na přímku *12—1—6* (a naopak) a můžeme tedy případ $h = 5$ z našich dalších úvah vyloučit[1]).

Právě tak permutací T_2 přechází přímka *12—1—7* na přímku *12—1—8* a můžeme vyloučit i případ $h = 7$. Pro volbu čísla h zbývají tudíž již jen dvě možnosti, které označím:

$$A_{ij} \equiv \frac{12}{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & f\\ 6 & i & j & g\end{matrix}}\,,\quad B_{ij} \equiv \frac{12}{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & f\\ 8 & i & j & g\end{matrix}}\,. \tag{II}$$

Zabývejme se nejprve možností A_{ij}. Za i můžeme zřejmě dosadit jen *4*, *7*, *8*. Protože ale permutací T_2 přechází případ $i = 7$ na případ $i = 8$, můžeme případ $i = 8$ vyloučit. Zbývají nám již jen dvě možnosti volby čísla i, totiž A_{4j} a A_{7j}.

Případ A_{4j}: Na první pohled je patrné, že j může nabývat jen hodnot *5*, *7*, *8*. Kdyby však bylo $j = 5$, pak za g, f bychom ve schematu A_{45} mohli dosadit jen hodnoty *7*, *8*. V tom je však spor, neboť na přímce *7—8—12* by — dle schematu (I) — ležel také bod *9* a je tedy $j \neq 5$. Zbývající dvě možnosti pro j (totiž $j = 7, 8$) se redukují permutací T_2 na jedinou. Zvolme třeba $j = 7$ a máme výsledek:

V případě A_{4j} nastává jediná možnost, totiž A_{47}.

[1]) Takovéto vylučování budeme provádět v této kapitole častěji a upozorňuji při tom, že se tak děje zcela ve smyslu definice ekvivalentních schemat, uvedené na začátku této kapitoly.

Případ A_{7j}: Zde lze dosadit za j zřejmě jen *5, 4, 8*. Čtenář se již sám přesvědčí, že žádná z těchto hodnot nevede ke sporu. Tedy:

V případě A_{7j} jsou možnosti A_{74}, A_{75}, A_{78}.

Tím je případ A_{ij} (ve výsledku (II)) zcela rozřešen.

Zcela obdobně (nyní však již jen stručně) provedeme řešení případu B_{ij}. Ve schematu B_{ij} možno za i dosadit zřejmě jen hodnoty *4, 6, 7* a máme tedy celkem možnosti B_{4j}, B_{6j}, B_{7j}. Po kratším výpočtu zjistíme, že:

V případě B_{4j} jsou možnosti B_{45}, B_{47}. V případě B_{6j} jsou možnosti B_{64}, B_{65}, B_{67} a v případě B_{7j} jsou možnosti B_{74}, B_{75}.

Shrneme-li konečně všechny tyto výsledky, máme pro přímky bodem *12* celkem tyto možnosti (viz označení (II)):

$$A_{47},\ A_{74},\ A_{75},\ A_{78},\ B_{45},\ B_{47},\ B_{64},\ B_{65},\ B_{67},\ B_{74},\ B_{75}\,. \qquad \text{(III)}$$

Kdybychom schema (I) doplnili těmito případy, dostali bychom tak rozšířená schemata (o přímky bodem *12*). Existují však permutace čísel 1, 2, 3, ..., 12, převádějící některá z těchto (rozšířených) schemat navzájem na sebe. Najděme takové permutace.

Uvažme především, že schema (I) rozšířené o případ A_{47} se nemění permutací T_3, právě tak jako schema (I) rozšířené o případ A_{74} se nemění permutací T_4, kde

$$(2\ 3)\ (4\ 6)\ (5\ 7)\ (9\ 12)\ (10\ 11)\,, \qquad (T_3),$$

$$(4\ 6)\ (5\ 7)\ (9\ 12)\,. \qquad (T_4)$$

Toho za chvíli s výhodou použijeme. Napišme si ještě další permutace:

$$(2\ 3)\ (10\ 11)\ (9\ 12)\ (4\ 6\ 7\ 8)\,, \qquad (T_5)$$

$$(2\ 3)\ (10\ 11)\ (9\ 12)\ (4\ 6\ 7\ 5\ 8)\,, \qquad (T_6)$$

$$(9\ 12)\ (4\ 6\ 5\ 7\ 8)\,, \qquad (T_7)$$

$$(2\ 3)\ (10\ 11)\ (9\ 12)\ (4\ 8)\ (5\ 7)\,. \qquad (T_8)$$

Snadno zjistíme, že schema (I) rozšířené o případ B_{67} se nemění permutací T_8.

Pro stručnější vyjadřování budu nadále místo „schema (I) rozšířené o případ A_{ij} přechází permutací T_k na schema (I) rozšířené o případ A_{mn}" psát stručně: „$A_{ij} \equiv A_{mn}(T_k)$". Tak snadno zjistíme, že platí:

$$B_{75} \equiv B_{67}(T_1)\,;\quad B_{74} \equiv B_{47}(T_1)\,;\quad B_{45} \equiv A_{75}(T_5)\,;$$
$$B_{47} \equiv A_{78}(T_6)\,;\quad B_{64} \equiv A_{75}(T_7)\,.$$

Můžeme tudíž ve výsledku (III) vyloučit z dalších úvah schemata B_{75}, B_{74}, B_{45}, B_{47}, B_{64}. Zapišme pro lepší přehled tento výsledek:

(I_1): *Rozšíříme-li schema* (I) *o přímky bodem 12, můžeme to učinit celkem těmito šesti způsoby:*

$$\begin{array}{cccccc}
\dfrac{12}{\begin{array}{c}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8\end{array}}, & \dfrac{12}{\begin{array}{c}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 7\ 4\ 8\end{array}}, & \dfrac{12}{\begin{array}{c}1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 5\ 8\end{array}}, & \dfrac{12}{\begin{array}{c}1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 8\ 5\end{array}}, & \dfrac{12}{\begin{array}{c}1\ 2\ 3\ 4\\ 8\ 6\ 5\ 7\end{array}}, & \dfrac{12}{\begin{array}{c}1\ 2\ 3\ 4\\ 8\ 6\ 7\ 5\end{array}}. \\
1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6.
\end{array}$$

Pokusme se nyní zcela obdobně doplnit schema (I) o přímky bodem *10*, t. j. o přímky

$$\dfrac{10}{\begin{array}{c}3\ n\ q\\ m\ p\ r\end{array}}$$ (čtvrtá přímka, totiž *1—10—11*, je již zapsána ve schematu (I)).

Na první pohled je vidět, že za m můžeme dosadit jen číslice *4, 5, 7, 8* (neboť ve schematu (I) jsou již přímky *1—2—3*, *3—6—9*, dále jest *3* : *11* a kromě toho ze schematu (I_1) již nemůže být $m = 12$). Zcela obdobně zjistíme, že n, p, q, r mohou nabývat hodnot *4, 5, 6, 7, 8*. Nebudu zde podrobně provádět výpočet, nebot čtenář si již snadno dokáže větu:

(I_2): *Rozšíříme-li schema* (I) *o zbývající tři přímky bodem 10, můžeme tak učinit celkem těmito deseti způsoby:*

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dfrac{10}{\begin{array}{c}356\\478\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}356\\487\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}346\\578\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}346\\587\end{array}}; & \dfrac{10}{\begin{array}{c}346\\758\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}345\\768\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}345\\786\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}346\\857\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}345\\867\end{array}}, & \dfrac{10}{\begin{array}{c}345\\876\end{array}}. \\
0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9.
\end{array}$$

Zcela obdobně doplníme schema (I) přímkami bodem *11*. Následující větu rovněž uvádím bez důkazu:

(I_3): *Rozšíříme-li schema* (I) *o zbývající tři přímky bodem 11, můžeme tak učinit celkem těmito deseti způsoby:*

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dfrac{11}{\begin{array}{c}256\\478\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}256\\487\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}245\\678\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}245\\687\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}246\\758\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}245\\768\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}245\\786\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}246\\857\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}245\\867\end{array}}, & \dfrac{11}{\begin{array}{c}245\\876\end{array}}. \\
0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9.
\end{array}$$

Pro objasnění dalšího postupu zavedu pojem přípustného konfiguračního schematu.

Očíslujme nějak body libovolné konfigurace $(12_4, 16_3)$ čísly 1, 2, 3, ..., 12. Tato čísla pak můžeme psát v šestnácti neuspořádaných trojicích $i—j—k$ (i, j, k jsou navzájem různá čísla), když $i—j—k$ znamená, že body odpovídající číslům i, j, k leží v konfigurační přímce. Množina těchto šestnácti trojic má tyto tři vlastnosti:

(1) všechny trojice jsou navzájem různé,

(2) každé číslo z $1, 2, \ldots, 12$ je právě ve čtyřech trojicích a

(3) jsou-li i, j, k, l navzájem různá čísla z $1, 2, \ldots, 12$, pak neplatí současně $i—j—k$, $i—j—l$.

Definice. Množina šestnácti neuspořádaných trojic z čísel $1, 2, \ldots, 12$ splňující podmínky (1), (2), (3) se nazývá přípustné konfigurační schema.

Permutací čísel $1, 2, \ldots, 12$ přejde zřejmě přípustné konfigurační schema opět v přípustné konfigurační schema. Dvě přípustná konfigurační schemata, z nichž jedno přejde v druhé permutací $1, 2, \ldots, 12$, nazveme ekvivalentní.

Hlavní otázka, kterou se budeme zabývat, je, která přípustná konfigurační schemata jsou realisovatelná v komplexní (reálné, případně racionální) projektivní rovině, t. j. pro která přípustná konfigurační schemata existuje v takové rovině konfigurace $(12_4, 16_3)$, k níž (při vhodném očíslování bodů) uvedené schema patří. Je-li přípustné konfigurační schema realisovatelné, pak jsou zřejmě zároveň realisovatelná i všechna přípustná schemata s ním ekvivalentní. Tohoto faktu budeme častěji používat.

Rozšíříme-li schema (I) jednou čtveřicí přímek bodem *12* ze zápisu (I_1), jednou trojicí přímek bodem *10* ze zápisu (I_2) a jednou trojicí přímek bodem *11* ze zápisu (I_3), a to tak, aby byla splněna podmínka (3) (přípustné konfigurační schema), dostaneme zřejmě přípustné konfigurační schema. Naším úkolem tedy jest najít všechna realisovatelná, navzájem neekvivalentní přípustná konfigurační schemata tohoto tvaru.

Pro lepší přehled a stručnější vyjadřování budu nadále označovat každé schema uspořádanou trojicí čísel ijk, kde první číslo udává, který ze všech šesti přípustných způsobů jsme volili v záznamu (I_1); druhé a třetí číslo uspořádané trojice ijk pak udává, který z deseti přípustných způsobů jsme volili v zápise (I_2) a (I_3). Tak ku příkladu 107 je stručný zápis schematu:

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&6\\8&5&7\end{matrix}}.$$

Při vyhledávání všech přípustných schemat zvolme tento přirozený postup: Vyhledejme nejprve přípustná schemata $1jk$, pak schemata $2jk, \ldots,$ až konečně schemata $6jk$.

Schemata $1jk$: Za j zřejmě můžeme dosadit jen 0, 2, 3, 7, 8, 9. Jsou tedy možnosti $10k$, $12k$, $13k$, $17k$, $18k$, $19k$.

V případě $10k$ dostaneme schemata 106, 107, 109, v případě $12k$ schemata 123, 126, 127, 128, v případě $13k$ možnosti 134, 138, 139, v případě $17k$ možnosti 173, 176, 178, 179, v případě $18k$ možnosti 184, 186, 187, 189, v případě $19k$ možnosti 193, 194, 197, 198.

Zapišme tyto výsledky úhrnně:

(II_1): Ze schemat $1jk$ jsou přípustná jen: 106, 107, 109, 123, 126, 127, 128, 134, 138, 139, 173, 176, 178, 179, 184, 186, 187, 189, 193, 194, 197, 198.

Zcela obdobně postupujeme v dalším výpočtu, kde zapíši již jen výsledky, které si čtenář může snadno ověřit:

(II_2): Ze schemat $2jk$ jsou přípustná jen: 223, 227, 228, 230, 238, 239, 243, 248, 249, 260, 267, 268, 270, 273, 278, 279, 287, 289, 290, 293, 297, 298.

(II_3): Ze schemat $3jk$ jsou přípustná jen: 301, 302, 307, 309, 310, 318, 319, 341, 342, 348, 349, 350, 357, 359, 370, 372, 378, 379, 381, 382, 387, 389, 390, 391, 397, 398.

(II_4): Ze schemat $4jk$ jsou přípustná jen: 401, 402, 409, 410, 413, 418, 419, 421, 423, 428, 430, 432, 438, 439, 450, 453, 459, 460, 461, 462, 468.

(II_5): Ze schemat $5jk$ jsou přípustná jen: 501, 505, 506, 507, 510, 514, 516, 518, 541, 545, 546, 548, 550, 554, 556, 557, 560, 561, 564, 565, 567, 568, 570, 575, 576, 578, 581, 584, 586, 587.

(II_6): Ze schemat $6jk$ jsou přípustná jen: 601, 605, 606, 609, 610, 616, 618, 619, 621, 625, 626, 628, 630, 635, 638, 639, 681, 686, 689, 690, 691, 695, 698.

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno o ekvivalentních přípustných konfiguračních schematech, můžeme některá z těchto schemat vyloučit. Jestliže totiž nějakou permutací T přejde jedno takové schema v druhé, můžeme ponechat z nich jen jedno.

Vidíme především, že permutací T_3 přechází schema 123 na schema 106, schema 173 na 107, 109 na 193, 176 na 127, 128 na 186, 184 na 138, 139 na 194, 187 na 178, 179 na 197 a 189 na 198.

Můžeme tedy v zápise (II_1) vyloučit tato schemata:

(III_1): 123, 173, 109, 176, 128, 184, 139, 187, 179, 189.

Podobně permutací T_4 přechází schema 260 na schema 223, 267 na 227, 268 na 228, 238 na 248, 243 na 230, 249 na 239, 273 na 270, 293 na 290.

Ze zápisu (II_2) vylučujeme:

(III_2): 260, 267, 268, 238, 243, 249, 273, 293.

Dále za zápisu (II_3) můžeme vyloučit schema:

(III_3): 397, neboť toto schema přechází na schema 349 permutací

$$(1\ 9)\ (2\ 6)\ (5\ 12)\ (7\ 10\ 8\ 11)\,. \qquad (T_9)$$

Užijeme-li permutace T_1, vidíme, že schema 505 přechází na 541, 514 na 550, 560 na 516, 561 na 506, 564 na 556, 565 na 546, 570 na 518, 575 na 548, 576 na 568, 581 na 507, 584 na 557, 586 na 567. Konečně permutací

$$(2\ 3)\ (4\ 8)\ (9\ 12)\ (10\ 11) \qquad (T_{10})$$

přechází schema 510 na 587, 516 na 567, 518 na 507, 548 na 505, 557 na 514, 568 na 506, 578 na 501.

Vylučujeme tedy ze zápisu (II_5) tato schemata:

(III_5): 505, 510, 516, 518, 548, 514, 557, 560, 561, 564, 565, 568, 570, 575, 576, 578, 581, 584, 586.

V posledním případě konečně použijeme permutace T_8, neboť touto permutací přechází schema 616 na 639, 618 na 609, 628 na 605, 630 na 686, 635 na 626, 638 na 606, 681 na 690, 689 na 610, 695 na 621, 698 na 601.

Můžeme tedy ze zápisu (II_6) vyloučit:

(III_6): 616, 618, 628, 630, 635, 638, 681, 689, 695, 698.

Jestliže skutečně podle tohoto návodu vyloučíme ze zápisů (II_i) schemata zapsaná v (III_i), dostaneme celkem 96 schemat, která rozvrhneme do dvou tabulek takto:

Tabulka 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	—	126	178	227	270	278	279	287	289	290	0
1	297	298	307	309	342	370	378	379	387	389	1
2	390	410	413	418	419	432	438	501	541	545	2
3	546	550	554	556	587	605	606	621	625	626	3

Tabulka 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	—	439	349	197	619	127	391	609	430	186	0
1	198	239	381	409	461	319	460	691	301	341	1
2	106	134	421	359	223	230	310	194	462	357	2
3	507	302	459	372	601	398	423	428	686	690	3
4	610	639	348	468	506	567	402	193	138	401	4
5	350	382	450	107	453	228	248	318	—	—	5

V příští kapitole dokážeme, že žádné přípustné konfigurační schema z tabulky 1 nelze realisovat v komplexní projektivní rovině. Ve třetí kapitole dokážeme, že všechna schemata z tabulky 2 jsou realisovatelná v komplexní projektivní rovině a přitom žádná dvě z nich nejsou ekvivalentní. Ukážeme také, proč jsme v tabulce 2 nevolili přirozené pořadí jako v tabulce 1.

II. Volba souřadnicového systému. Nerealisovatelná schemata

Abychom mohli dokázat, že schemata uvedená v tabulce 1 (konec předchozí kapitoly) skutečně nejsou realisovatelná a naopak, že schemata uvedená v tabulce 2 realisovatelná jsou, k tomu již je nutno zkoumat každé schema zvláště. Tuto práci si značně zjednodušíme, zvolíme-li jednotný souřadnicový systém pro celou skupinu schemat $1jk$, obdobně nový souřadnicový systém pro celou skupinu schemat $2jk, \ldots$, atd. To je první úkol této kapitoly.

1. Souřadnicový systém pro skupinu $1jk$. Protože žádné tři z bodů $1, 3, 9, 12$ neleží na konfigurační přímce (ani nemohou ležet na přímce nekonfigurační, jak se snadno přesvědčíme), zvolme $1 = (1, 0, 0)$; $9 = (0, 1, 0)$; $12 = (0, 0, 1)$; $3 = (1, 1, 1)$. Pak ihned dostáváme tyto přímky (psané v přímkových souřadnicích): $1—4—9 = (0, 0, 1)$; $3—6—9 = (1, 0, —1)$; $1—6—12 = (0, 1, 0)$; $1—2—3 = (0, 1, —1)$, z čehož $6 = (1, 0, 1)$ a můžeme položit $4 = (a, 1, 0)$, takže $2—4—12 = (1, —a, 0)$ a $2 = (a, 1, 1)$. Dále jest $2—5—9 = (1, 0, —a)$ a položíme-li $5 = (a, b, 1)$, pak $5—8—12 = (b, —a, 0)$, $3—7—12 = (1, —1, 0)$ a můžeme volit $8 = (a, b, c)$. Z toho je $7—8—9 = (c, 0, —a)$, $7 = (a, a, c)$.

Napišme tyto výsledky přehledněji:

$1—4—9 = (0, 0, 1)$, $2—5—9 = (1, 0, —a)$, $3—6—9 = (1, 0, —1)$,
$7—8—9 = (c, 0, —a)$, $1—6—12 = (0, 1, 0)$, $2—4—12 = (1, —a, 0)$,
$3—7—12 = (1, —1, 0)$, $5—8—12 = (b, —a, 0)$, $1—2—3 = (0, 1, —1)$,
$1 = (1, 0, 0)$, $2 = (a, 1, 1)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (a, 1, 0)$,
$5 = (a, b, 1)$, $6 = (1, 0, 1)$, $7 = (a, a, c)$, $8 = (a, b, c)$,
$9 = (0, 1, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde čísla a, b, c mohou (zatím) nabývat libovolných hodnot s výjimkou hodnot uvedených v následující větě:

Věta 1. *Pro čísla* a, b, c (z předchozích výsledků) *platí:*

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1,\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c.$$

Důkaz. Kdyby $a = 0$, ležel by bod 4 na přímce $2—5—9$,
$b = 0$, ležel by bod 5 na přímce $1—6—12$,
$c = 0$, ležel by bod 7 na přímce $1—4—9$,
$a = 1$, ležel by bod 3 na přímce $2—4—12$,
$b = 1$, ležel by bod 5 na přímce $1—2—3$,
$c = 1$, ležel by bod 7 na přímce $2—5—9$,
$a = b$, ležel by bod 5 na přímce $3—7—12$,
$a = c$, ležel by bod 7 na přímce $3—6—9$,
$b = c$, ležel by bod 8 na přímce $1—2—3$.

Pro další výpočty je výhodné zapsat ještě souřadnice přímek:

$$\begin{aligned}
&2-6 = (1, 1-a, -1)\,, && 4-6 = (-1, a, 1)\,,\\
&2-7 = (c-a, a-ac, a^2-a)\,, && 4-7 = (c, -ac, a^2-a)\,,\\
&2-8 = (c-b, a-ac, ab-a)\,, && 4-8 = (c, -ac, ab-a)\,,\\
&3-4 = (1, -a, a-1)\,, && 5-6 = (b, 1-a, -b)\,,\\
&3-5 = (1-b, a-1, b-a)\,, && 5-7 = (bc-a, a-ac, a^2-ab)\,,\\
&6-7 = (a, c-a, -a)\,, && 3-8 = (c-b, a-c, b-a)\,,\\
&4-5 = (1, -a, ab-a)\,, && 6-8 = (b, c-a, -b)\,.
\end{aligned}$$

Jak těchto výsledků později použijeme, bude patrno.

Zcela obdobně zvolíme souřadnicový systém ve skupině $2jk$. Tentokrát však již budu postupovat rychleji:

2. Souřadnicový systém pro skupinu $2jk$.

Protože žádné tři z bodů $1, 3, 9, 12$ neleží na konfigurační přímce (ani nemohou ležet na přímce nekonfigurační), zvolme $1 = (1, 1, 1)$, $3 = (0, 0, 1)$, $9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 1, 0)$. Zcela obdobným způsobem jako v předchozím případě najdeme souřadnice devíti konfiguračních přímek a desíti konfiguračních bodů. Podrobný důkaz neprovádím a pouze výsledky shrnuji:
$1-4-9 = (0, 1, -1)$, $2-5-9 = (0, a, -1)$, $3-6-9 = (0, 1, 0)$,
$7-8-9 = (0, a, -c)$, $1-6-12 = (1, 0, -1)$, $2-7-12 = (a, 0, -1)$,
$3-4-12 = (1, 0, 0)$, $5-8-12 = (a, 0, -b)$, $1-2-3 = (1, -1, 0)$;
$1=(1, 1, 1)$, $2 = (1, 1, a)$, $3 = (0, 0, 1)$, $4 = (0, 1, 1)$,
$5 = (b, 1, a)$, $6 = (1, 0, 1)$, $7 = (1, c, a)$, $8 = (b, c, a)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 1, 0)$, kde čísla a, b, c mohou nabývat libovolných hodnot, kromě výjimek uvedených ve větě 1.

Vypočítejme ještě:

$2-4 = (1-a, -1, 1)$, $2-6 = (1, a-1, -1)$, $2-8 = (a-ac, ab-a, c-b)$,
$3-5 = (1, -b, 0)$, $3-7 = (c, -1, 0)$, $3-8 = (c, -b, 0)$,
$4-5 = (a-1, b, -b)$,
$4-6 = (1, 1, -1)$, $4-7 = (a-c, 1, -1)$, $4-8 = (a-c, b, -b)$,
$6-8 = (-c, b-a, c)$,
$5-6 = (1, a-b, -1)$, $5-7 = (a-ac, a-ab, bc-1)$, $6-7 = (c, a-1, -c)$.

3. Souřadnicový systém pro skupinu $3jk$.

$7-8-9 = (0, c, -1)$, $1-6-12 = (1, -a, 0)$, $2-7-12 = (1, 0, 0)$,
$1-4-9 = (0, a, -1)$, $2-5-9 = (0, 0, 1)$, $3-6-9 = (0, 1, -1)$,
$3-5-12 = (1, -1, 0)$, $4-8-12 = (1, -b, 0)$, $1-2-3 = (1, 0, -1)$;
$1 = (a, 1, a)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (b, 1, a)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $6 = (a, 1, 1)$, $7 = (0, 1, c)$, $8 = (b, 1, c)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde pro čísla a, b, c platí věta:

Věta 2. *Pro čísla a, b, c* (z předchozích výsledků) *platí nerovnosti:*

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1,\ a \neq b,\ a \neq c.$$

Důkaz této věty je zcela obdobný, jako důkaz věty 1; nebudu ho proto uvádět.

Napišme ještě souřadnice těchto přímek:

2—$4 = (a, 0, -b)$, 2—$6 = (1, 0, -a)$, 2—$8 = (c, 0, -b)$,
3—$4 = (a-1, b-a, 1-b)$, 3—$7 = (c-1, -c, 1)$, 3—$8 = (c-1, b-c, 1-b)$,
4—$5 = (a, -a, 1-b)$, 4—$6 = (1-a, a^2-b, b-a)$, 4—$7 = (c-a, -bc, b)$,
5—$6 = (1, -1, 1-a)$ 5—$7 = (c, -c, 1)$, 5—$8 = (c, -c, 1-b)$
6—$7 = (c-1, -ac, a)$, 6—$8 = (c-1, b-ac, a-b)$.

4. Souřadnicový systém pro skupinu $4jk$.

1—4—$9 = (1, 0, -1)$, 2—5—$9 = (1, 0, -a)$, 3—6—$9 = (0, 0, 1)$,
7—8—$9 = (b, 0, -a)$, 1—6—$12 = (1, -1, 0)$, 2—7—$12 = (1, -a, 0)$,
3—8—$12 = (0, 1, 0)$, 4—5—$12 = (c, -a, 0)$, 1—2—$3 = (0, 1, -1)$;
$1 = (1, 1, 1)$, $2 = (a, 1, 1)$, $3 = (1, 0, 0)$, $4 = (a, c, a)$,
$5 = (a, c, 1)$, $6 = (1, 1, 0)$, $7 = (a, 1, b)$, $8 = (a, 0, b)$,
$9 = (0, 1, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde pro čísla a, b, c platí věta 2.

Napišme souřadnice dalších přímek:

2—$4 = (a-c, a-a^2, ac-a)$, 5—$8 = (bc, a-ab, -ac)$, 6—$7 = (b, -b, 1-a)$,
3—$4 = (0, -a, c)$, 5—$7 = (bc-1, a-ab, a-ac)$, 6—$8 = (-b, b, a)$,
3—$5 = (0, -1, c)$, 4—$7 = (bc-a, a^2-ab, a-ac)$, 3—$7 = (0, -b, 1)$,
4—$8 = (bc, a^2-ab, -ac)$, 5—$6 = (-1, 1, a-c)$, 2—$6 = (-1, 1, a-1)$,
4—$6 = (-a, a, a-c)$, 2—$8 = (b, a-ab, -a)$.

5. Souřadnicový systém pro skupinu $5jk$.

1—4—$9 = (0, 1, -a)$, 2—5—$9 = (0, 0, 1)$, 3—6—$9 = (0, 1, -1)$,
7—8—$9 = (0, c, -a)$, 1—8—$12 = (a, -1, 0)$, 2—6—$12 = (1, 0, 0)$,
3—5—$12 = (1, -1, 0)$, 4—7—$12 = (a, -b, 0)$, 1—2—$3 = (1, 0, -1)$,
$1 = (1, a, 1)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (b, a, 1)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $6 = (0, 1, 1)$, $7 = (b, a, c)$, $8 = (1, a, c)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde pro čísla a, b, c platí věta 1.

Napišme ještě souřadnice přímek:

3—$7 = (c-a, b-c, a-b)$, 4—$5 = (1, -1, a-b)$, 6—$8 = (c-a, 1, -1)$,
4—$6 = (a-1, -b, b)$, 5—$8 = (c, -c, a-1)$, 3—$4 = (1-a, b-1, a-b)$,
2—$4 = (1, 0, -b)$, 6—$7 = (c-a, b, -b)$, 3—$8 = (c-a, 1-c, a-1)$,
5—$7 = (c, -c, a-b)$, 2—$8 = (c, 0, -1)$, 2—$7 = (c, 0, -b)$,
4—$8 = (ac-a, 1-bc, ab-a)$, 5—$6 = (1, -1, 1)$.

6. Souřadnicový systém pro skupinu $6jk$.

$1-4-9 = (0, a, -1)$, $2-5-9 = (0, 1, 0)$, $3-6-9 = (0, 1, -1)$, $7-8-9 = (0, a, -b)$, $1-2-3 = (1, -1, 0)$, $1-8-12 = (a, 0, -1)$, $2-6-12 = (1, 0, 0)$, $3-7-12 = (1, 0, -1)$, $4-5-12 = (a, 0, -c)$; $1 = (1, 1, a)$, $2 = (0, 0, 1)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (c, 1, a)$, $5 = (c, 0, a)$, $6 = (0, 1, 1)$, $7 = (a, b, a)$, $8 = (1, b, a)$, $9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 1, 0)$, kde pro čísla a, b, c platí věta 2.

Napišme ještě souřadnice přímek:

$2-4 = (1, -c, 0)$, $2-7 = (b, -a, 0)$, $2-8 = (b, -1, 0)$, $3-4 = (a-1, c-a, 1-c)$, $3-5 = (a, c-a, -c)$, $4-6 = (1-a, -c, c)$, $3-8 = (a-b, 1-a, b-1)$, $4-7 = (a-ab, a^2-ac, bc-a)$, $5-6 = (a, c, -c)$, $4-8 = (a-ab, a-ac, bc-1)$, $6-8 = (a-b, 1, -1)$, $5-7 = (ab, ac-a^2, -bc)$, $5-8 = (ab, ac-a, -bc)$, $6-7 = (a-b, a, -a)$.

Druhým úkolem této kapitoly je dokázat, že skutečně žádné schema uvedené v tabulce 1 (konec předchozí kapitoly) není realisovatelné. Důkaz pro první schema v této tabulce uvedené provedu podrobně.

Schema 126, t. j.

$$\frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\ 5\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\ 7\ 8\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

Použijeme souřadnicového systému (navrženého pro skupinu $1jk$); zvolme tento postup:

Najděme nutnou a postačující podmínku, kterou musí splňovat čísla a, b, c, aby

1. přímky $3-5$, $4-7$, $6-8$ procházely bodem 10,
2. přímky $2-7$, $4-8$, $5-6$ procházely bodem 11,
3. body 1, 10, 11 ležely na přímce.

Ad 1: Souřadnice přímek $3-5$, $4-7$, $6-8$ najdeme ve výsledcích (viz souřadnicový systém pro skupinu $1jk$). Hledaná podmínka 1 tedy zní:

$$\begin{vmatrix} 1-b, & a-1, & b-a \\ a\ , & -ac, & a^2-a \\ b\ , & c-a, & -b \end{vmatrix} = 0\,.$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že tato podmínka zní:

$(c-a) \,.\, (b-a) \,.\, (a+c-1) = 0$. Vzhledem k větě 1 jest tudíž $a+c-1 = 0$. Tuto podmínku označím d_{12X} (první dva indexy se shodují s prvními dvěma číslicemi hledaného schematu 126). Jest tedy $d_{12X} = a+c-1 = 0$.

Ad 2: Zcela obdobně ze souřadnic přímek *2—7*, *4—8*, *5—6* zjistíme nutnou a postačující podmínku, aby na těchto přímkách ležel bod *11*. Jest to podmínka (vzhledem k větě 1) $d_{1X6} = a-b-1 = 0$. Význam indexů $(1X6)$ je již snadno pochopitelný.

Ad 3: Vypočítáme-li konečně (ku příkladu) z přímek *3—5*, *6—8* souřadnice bodu *10* a z přímek *4—8*, *5—6* souřadnice bodu *11*, vidíme, že nutná a postačující podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:

$$\begin{vmatrix} abc-ab+a^2b-a^2, & bc-ab+ab^2, & c-ac+abc \\ b-bc+ac-a^2\ , & b-ab\ , & c-a+b-bc \\ 1\ , & 0\ , & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Snadno vypočítáme, že (vzhledem k větě 1) musí platit $d_{126} = a^2-ab-c = 0$. V tom je však spor, neboť platí: $(a-b)\,.\,(a-c) = d_{126}-c.d_{1X6} = 0$, protože $d_{126} = d_{1X6} = 0$. Nemůže však býti $(a-b)\,.\,(a-c) = 0$, jak tvrdí věta 1. Je tedy skutečně schema 126 nerealisovatelné.

Než budu pokračovat v dalších důkazech, napíši (pro usnadnění práce a úsporu místa) všechny nutné a postačující podmínky — obdobné výrazům d_{1X6}, d_{12X} — které budeme později potřebovat. Předpokládám při tom, že je již čtenáři zcela jasný význam indexů u těchto výrazů. Pro snadnější přehled napíši výrazy d_{ijk} v tomto pořadí: Nejprve všechny výrazy s prvním indexem 1, pak 2, ..., atd až 6.

Výrazy d_{ijk}

$$\begin{aligned}
d_{10X} &= abc-bc+a^2b-ab^2+ab+a-2a^2\\
d_{12X} &= a+c-1\\
d_{13X} &= 3ac-a^2-a^2c-abc+a^2b-c^2\\
d_{17X} &= 2a-b+a^2b+ab-ac+abc-ab^2-2a^2\\
d_{18X} &= abc-a^2b+a^2c-2ac-c^2\\
d_{19X} &= 2abc-ab+bc-a^2c-bc^2\\
d_{1X3} &= abc-bc-c+2a-ac-a^2+c^2\\
d_{1X4} &= c-bc+3ab-a-b-ab^2\\
d_{1X6} &= a-b-1\\
d_{1X7} &= 2a^2+c-a^2c-c^2+bc+ac-ab-2a\\
d_{1X8} &= 2ab+c-bc-b-ab^2\\
d_{1X9} &= ac-abc-2bc+b^2c+b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{22X} &= abc-a+c+b-bc-bc^2\\
d_{23X} &= a+bc-1-c-ac+c^2\\
d_{24X} &= a+bc-1-b-ab+b^2\\
d_{26X} &= b^2c-b-abc+a+bc-c\\
d_{27X} &= 1
\end{aligned}$$

$$d_{28X} = bc^2+b^2c-c-b+ac+ab-2abc$$
$$d_{29X} = 1$$
$$d_{2X0} = b^2c-bc^2-b+c-ab^2c+ac^2+2abc-3ac+a$$
$$d_{2X3} = b^2c-bc^2-b+c-ab^2-a+3ab-2abc+abc^2$$
$$d_{2X7} = 1-bc$$
$$d_{2X8} = 2a-2-b-c$$
$$d_{2X9} = 1-bc-2a+ac+ab$$

$$d_{30X} = c^2-ac^2-bc^2+2bc-c+abc^2-ac+a^2c-ab+a-abc$$
$$d_{31X} = c^2-c+bc-ac^2-ac+a^2c+a-b$$
$$d_{34X} = a^2+abc-ac-a-bc+c+b-b^2$$
$$d_{35X} = b^2c-a^2-b^2+b-2bc+abc+a^2b-a^2bc+ac$$
$$d_{37X} = a+b+ac-c-a^2$$
$$d_{38X} = c-a+b+abc-2bc$$
$$d_{39X} = bc^2-c^2+ac-2bc+c-a+b^2c-b^2-abc^2+b+ac^2+a^2b-a^2c$$
$$d_{3X0} = ac-a-bc+c+ac^2-c^2$$
$$d_{3X1} = a+1-c$$
$$d_{3X2} = ac-abc+b^2-a^2$$
$$d_{3X7} = c^2-bc^2-ac+abc-bc+b$$
$$d_{3X8} = a^2b-ab+bc-ac-b^2+a^2$$
$$d_{3X9} = 2c-bc-a+ac^2-c^2$$

$$d_{40X} = a^2b-bc+abc-ab^2c+b^2c^2-a^2$$
$$d_{41X} = 1$$
$$d_{42X} = ab-a^2+b^2c^2-abc+a^2bc-ab^2c$$
$$d_{43X} = 1-bc+ab-a^2$$
$$d_{45X} = a^2bc-ab^2c+b^2c^2+a^2b-a^2-abc$$
$$d_{46X} = ab^2c-b^2c^2-abc+bc-ab+a^2$$
$$d_{4X0} = 3ab+b^2c-a-bc-b-ab^2$$
$$d_{4X2} = a-2$$
$$d_{4X1} = a-1+bc-b$$
$$d_{4X3} = 2abc-2bc+a^2c-a^2bc-ac-a+b+c$$
$$d_{4X8} = 2a+ab-abc-bc-c+a^2c-2a^2+bc^2$$
$$d_{4X9} = 1-2a+c+ab-bc$$

$$d_{50X} = bc-c-ab-ac+2a-1+c^2$$
$$d_{54X} = d_{55X} = 1$$
$$d_{56X} = b+c-ac-ab+2a^2-a^2b+2abc-a^2c-2a+ab^2-bc^2+ac^2-b^2c$$
$$d_{58X} = a^2b+a-a^2-ab^2-2abc-c+ac+b^2c+bc-b+ab$$
$$d_{5X1} = c-bc-a+ac+1-c^2$$
$$d_{5X6} = b^2c+ab-b+bc^2+ac-c-2abc$$
$$d_{5X7} = a-abc-b+b^2c+bc-c$$

$d_{60X} = bc-1+2a-ac$
$d_{61X} = a^3b-2a^2bc+a^3c-a^3+ab^2c+2abc^2-a^2c^2+a^2c-b^2c^2+ab-abc-a^2b$
$d_{62X} = 1$
$d_{63X} = 2a^3-2a^2+ab-ab^2c-a^3c+2a^2bc-a^2c+ac-bc+b^2c^2+a^2c^2-2abc^2 +$
$+ abc-a^3b$
$d_{68X} = a^3c-a^3+a^2+ab^2c-2a^2bc-a^2c^2+a^2c-ac-b^2c^2+2abc^2+a^3b-a^2b-$
$-abc+bc$
$d_{69X} = ab^2c+a^3c-2a^3-2a^2bc-b^2c^2-a^2c^2+a^2c+2abc^2-abc+a^3b+a^2$
$d_{6X0} = abc+ac-a^2-bc-abc^2+b^2c^2$
$d_{6X1} = a^2-a^2c+abc-a^2bc+abc^2-b^2c^2$
$d_{6X5} = 1$
$d_{6X6} = a^2-a^2c+bc-b^2c^2+abc^2-abc$
$d_{6X8} = bc-ac-1+a^2$
$d_{6X9} = abc-a^2bc-ac+abc^2+a^2-b^2c^2$

Nerealisovatelná schemata

Postupujme v pořadí určeném tabulkou 1, při čemž s výhodou použijeme výrazů d_{ijk} nahoře napsaných.

1. Schema 126. Důkaz byl již proveden.

2. Schema 178. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $(b-a) \,.\, d_{178} = 0$, kde $d_{178} = ab+c-b = 0$. Protože však $b \,.\, (a-b) = d_{1X8} + (b-1) \,.\, d_{178} = 0$, je z toho vidět spor s větou 1.

3. Schema 227. Jest $b \,.\, (1-c) = d_{22X} + (a-c) \,.\, d_{2X7}$. Spor s větou 1.

4, 5, 6. Schemata 270, 278, 279. Podmínka $d_{27X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

7. Schema 287. Jest $a \,.\, (b-1)^2 = b \,.\, d_{28X} + (a+bc-2ab+b^2) \,.\, d_{2X7} = 0$.

8. Schema 289. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $(b-c) \,.\, d_{289} = 0$, kde $d_{289} = b+c-3a+1+a^2 = 0$. Zřejmě platí:

$$a \,.\, (1-a) \,.\, (bc-1) = d_{28X} - d_{2X9} + (1-bc) \,.\, d_{289} = 0.$$

Nemůže však být $(1-bc) = 0$, neboť by bod *3* ležel na *5—7—10*.

9, 10, 11. Schemata 290, 297, 298. Podmínka $d_{29X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

12. Schema 307. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce zní: $d_{307} = ab^2-2b^2c+bc+ac^2-a^2c+ab^2c-abc^2+ac-ab+bc^2-c^2$. Jest však:

$$(a-1) \,.\, (b-a) \,.\, (b-1) \,.\, c^2 =$$
$$= c \,.\, (1-a) \,.\, (d_{30X} - d_{307}) + (b-1) \,.\, (d_{307} + b \,.\, d_{30X}) = 0.$$

13. Schema 309. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $d_{309} = a^2bc+abc^2-ab^2c+b^2c-bc^2-ab^2+2a^2c-2ac+c^2-ac^2+ab-a^3c = 0$.

Platí však:

$c \,.\, (a-1) \,.\, (a-b) \,.\, (a-c) = c \,.\, d_{309} + (1-b) \,.\, (ac+a-c) \,.\, d_{3X9} +$
$+ (a+ac-2c) \,.\, d_{30X} = 0.$

14. Schema 342. Platí $bc \,.\, (1-b) = (a+b) \,.\, d_{34X} + (a+b-1) \,.\, d_{3X2} = 0.$

15. Schema 370. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:
$a \,.\, (a-c) \,.\, (a-1) \,.\, d_{370} - a \,.\, d_{3X0} - a^2 \,.\, d_{37X} = 0$, kde $d_{370} = 1+ac-c = 0.$
Jest však: $a-1 = (1-a) \,.\, d_{3X0} + d_{37X} + (ac+a-b-c-1) \,.\, d_{370} = 0.$

16. Schema 378. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:
$a^2c-a^3b+a^2bc-a^3+2a^2b-abc-ac+a^2 = b \,.\, (a-1) \,.\, (c-b) +$
$+ (a+ab-b) \,.\, d_{37X} = 0$. Kdyby však bylo $c-b = 0$, ležel by bod *3* na přímce *2—8—11*.

17. Schema 379. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:
$a \,.\, (a-c) \,.\, (2-a) \,.\, d_{37X} - a \,.\, d_{3X9} + a \,.\, (a-c) \,.\, d_{379} = 0$, kde
$d_{379} = 2a^2c-1-2a-5ac+3c+3a^2-a^3 = 0$. Dále platí:
$(2a-3) \,.\, d_{3X9} = (a-1) \,.\, M + c \,.\, (3-2a) \,.\, d_{37X} + (2c-1) \,.\, d_{379} = 0$, kde
$M = (a+1) \,.\, (c-a+1) = 0$. V tom však je spor s větou 2, neboť kdyby bylo $c-a+1 = 0$, pak by z rovnice $d_{37X} = a \,.\, (c-a+1) + (b-c) = 0$ bylo $b-c = 0$ a na přímce *3—8—10* by ležel bod *2*. Nemůže být ani $(a+1) = 0$, jak snadno zjistíme dosazením tohoto výsledku do podmínky $d_{379} = 0$. (Vychází totiž $2c+1 = 0$, což dosazeno spolu s výsledkem $a+1 = 0$ do podmínky $d_{37X} = 0$ dává $b-1 = 0$.)

18. Schema 387. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:
$(b-c) \,.\, (a-1) \,.\, b = (c-b) \,.\, d_{38X} = 0$. Kdyby bylo $b-c = 0$, ležel by bod *3* na přímce *2—8—11*.

19. Schema 389. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:
$(c-b) \,.\, d_{389} = 0$, kde $d_{389} = abc-bc-a+ac+ab-a^2c = 0$. Kdyby totiž bylo $b-c = 0$, ležel by bod *3* na přímce *2—8—11*. Dále je
$(b-1) \,.\, (a-c) \,.\, M = (c-1) \,.\, d_{389} + c \,.\, (a-1) \,.\, d_{38X} = 0$, kde
$M = c-ac-2 = 0$. Zřejmě je $c \,.\, d_{38X} + (ac+1-2c) \,.\, d_{3X9} = (c-1) \,.\, N = 0$,
$N-P = (2c-ac-a+1) \,.\, M = 0$, kde $P = 2+c-a = 0$,
$N = a+a^2c-2c+2c^2+a^2c^2-3ac^2 = 0$. Protože však
$c \,.\, (c-b) = d_{3X9} + (c-1) \,.\, (M+P) = 0$ a protože — jak jsme již ukázali — je $c-b \neq 0$, vidíme spor s větou 2.

20. Schema 390. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:
$d_{390} = 2a^2c-a^2b-a^2bc+a-b+b^2+a^2c^2-ac^2-a^2 = 0$. Platí však:

$$ac(a-b) \,.\, (a-1) \,.\, (1-c) =$$
$$= (b-a) \,.\, d_{39X} + (b-ac) \,.\, d_{390} + (a-b-ab-a^2b+a^2c+b^2) \,.\, d_{3X0} = 0.$$

21, 22, 23, 24. Schemata 410, 413, 418, 419. Podmínka $d_{41X} = 1$ je ve sporu s větou 2.

25. Schema 432. Jest $(b-a) = b \,.\, d_{43X} + (ab+1-b^2) \,.\, d_{4X2} = 0.$

26. Schema 438. Jest $(a-1)^2 = (1-c) \cdot d_{43X} - d_{4X8} = 0$.

27. Schema 501. Platí $a \cdot (1-b) = d_{50X} + d_{5X1} = 0$.

28, 29, 30. Schemata 541, 545, 546. Podmínka $d_{54X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

31, 32, 33. Schemata 550, 554, 556. Podmínka $d_{55X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

34. Schema 587. Platí $a \cdot (b-1) \cdot (a-b-c) = d_{58X} - d_{5X7} = 0$. Nemůže však být $a-b-c = 0$, neboť by na přímce *6—7—11* ležel bod *5*.

35. Schema 605. Podmínka $d_{6X5} = 1$ je ve sporu s větou 2.

36. Schema 606. Jest $a \cdot (1-a) = d_{6X6} + (bc-a) \cdot d_{60X} = 0$.

37, 38, 39. Schemata 621, 625, 626. Podmínka $d_{62X} = 1$ je ve sporu s větou 2.

Tím je dokázáno, že žádné ze schemat, obsažených v tabulce 1 (konec kapitoly I), není realisovatelné.

Zároveň je také zřejmé, že nemusíme již hledat, zda některá z těchto schemat snad jsou ekvivalentní. Musíme však provést důkaz, že realisovatelná schemata (která uvádím v následující kapitole) jsou navzájem různá. Jakým způsobem se to dá nejbezpečněji (a snad i nejrychleji) zjistit, o tom pojednám v závěru příští kapitoly.

III. Jemnější dělení. Realisovatelné konfigurace

V úvodu jsme rozdělili body do typů A, B, C, D, E. Pro další úkoly je výhodné toto dělení ještě zjemnit, a to takto:

Zkoumejme nejprve jen body typu C a buď na př. *1* takovým bodem, odděleným od bodů *2, 3, 4*. Pak *2—3*, *2—4*, ale *3* : *4* (což je známá vlastnost C-bodů). Kromě přímek *2—3*, *2—4* procházejí bodem *2* ještě další dvě přímky, bodem *3* (kromě *2—3*) ještě další tři přímky a bodem *4* (kromě *2—4*) rovněž ještě další tři přímky. Žádná z těchto desíti přímek (přímky *2—3*, *2—4* v to počítaje) není incidentní s bodem *1* (protože dle předpokladu jest *1* : *2, 3, 4*) a existuje tudíž šest konfiguračních přímek, na kterých neleží ani jeden z bodů *2, 3, 4*. Z těchto šesti přímek procházejí čtyři bodem *1* a na zbývajících dvou již neleží ani bod *1*, ani body *2, 3, 4* (od kterých je tento C-bod oddělen). Můžeme tudíž vyslovit větu:

Věta 3. *V každé konfiguraci, obsahující aspoň jeden* C-bod, *existuje ke každému* C-bodu *dvojice přímek, které nejsou incidentní s tímto* C-bodem, ***ani*** *s body, od kterých je oddělen.*

Zcela obdobná věta (jejíž důkaz již ponechávám čtenáři) platí také pro body typu E:

Věta 4. *V každé konfiguraci, obsahující aspoň jeden* E-bod, *existuje ke každému* E-bodu *dvojice přímek, které nejsou incidentní s tímto* E-bodem, *ani s body, od kterých je oddělen.*

Na základě těchto vět můžeme C-body a E-body dělit na dva druhy, jak je provedeno v této úmluvě:

Úmluva 1. Jestliže dvě přímky z dvojice uvedené ve větě 3 (respektive 4) procházejí jedním konfiguračním bodem, pak říkáme, že uvedený C-bod (resp. E-bod) patří do typu C^1 (resp. E^1). Jinak říkáme, že patří do typu C^2 (resp. E^2).

Čtenář snadno zjistí, že takovéto zjemnění nelze provádět ani u A-bodů, ani u D-bodů.

Soustřeďme se nyní na B-body a nechť konkretně *1* je B-bod oddělený od bodů *2*, *3*, *4*. Pak je ovšem *2—3*, *2—4*, *3—4*, ale nikoliv *2—3—4*. Nepočítáme-li přímky *2—3*, *2—4*, *3—4*, pak každým z bodů 2, 3, 4 procházejí ještě další dvě konfigurační přímky. Celkem tedy body *2*, *3* *4* (spolu s přímkami *2—3*, *2—4*, *3—4*) prochází devět konfiguračních přímek, z nichž žádná není incidentní s bodem *1* (podle předpokladu *1* : *2*, *3*, *4*). Na zbývajících sedmi konfiguračních přímkách neleží tudíž žádný z bodů *2*, *3*, *4*. Z těchto sedmi přímek však čtyři procházejí bodem *1*; existuje tedy trojice přímek, na kterých neleží ani bod *1*, ani body *2*, *3*, *4* (od kterých je tento B-bod oddělen). Dokážeme ještě, že aspoň dvě z těchto přímek se protínají v konfiguračním bodě. Kdyby tomu totiž tak nebylo, pak by na těchto třech přímkách leželo devět konfiguračních bodů — různých od bodů *1*, *2*, *3*, *4* — a v tom je spor. Můžeme tedy vyslovit větu:

Věta 5. *V každé konfiguraci, obsahující aspoň jeden* B-bod, *existuje ke každému* B-bodu *trojice přímek (z nichž aspoň dvě se protínají v konfiguračním bodě), které nejsou incidentní s tímto* B-bodem *ani s body, od kterých je oddělen.*

A nyní opět podle toho, jaká je vzájemná poloha těchto tří přímek, můžeme rozdělit B-body na čtyři druhy, což učiníme úmluvou:

Úmluva 2. Jestliže tři přímky z trojice uvedené ve větě 5 se neprotínají v jediném bodě, mohou pro tři průsečíky vždy dvou z nich nastat tři případy:

1. Jeden průsečík je konfigurační bod a dva nekonfigurační; pak bod B označíme B^1.

2. Dva průsečíky jsou konfigurační body a třetí není konfigurační; bod B pak označíme B^2.

3. Všechny tři průsečíky jsou konfigurační body; bod B pak označíme B^3.

4. Jestliže tři přímky naší trojice se protínají v jediném bodě (což dle předchozích úvah může být jen bod konfigurační), označíme náš B-bod stručně B^4.

Že skutečně mohou existovat body C^1, C^2, E^1, E^2, B^1, B^2, B^3, B^4, přesvědčí se čtenář později, neboť u každé z realisovatelných konfigurací uvedu, jak jsou jednotlivé body odděleny a jakých jsou typů (již zjemněných). Body *10*, *11* jsou vždy typu C^1. Je to způsobeno volbou počátečních podmínek.

Tohoto jemnějšího dělení bodů použijeme především k uspořádání konfigurací. Tak ku příkladu konfigurace třídy $B_4C_5D_2E_1$ (viz Úvod) můžeme rozdělit ještě do několika typů, z nichž jeden uvádím, a to typ: $B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$. Do tohoto typu patří všechny konfigurace obsahující čtyři B-body (z nichž jeden je typu B^1 a tři typu B^2), pět C-bodů (z nichž čtyři jsou typu C^1 a jeden typu C^2), jeden E bod typu E^1, dva D-body a žádný A-bod.

Realisovatelné konfigurace pak v dalším seřazuji takto: Nejprve uvádím konfiguraci neobsahující B-body (je jediná). Pak konfigurace s jedním B-bodem, dále se dvěma B-body, atd. Mají-li konfigurace stejný počet B-bodů, seřazuji je podle typů těchto B-bodů (resp. C-bodů, atd.) atd. Tím zároveň vysvětluji pořadí schemat v tabulce 2 (konec I. kapitoly). Tohoto seřazení později s výhodou použijeme při důkazu, že všechna níže uvedená realisovatelná schemata jsou navzájem různá.

Než přikročím k vlastním důkazům, upozorňuji, že při výpočtech budu používat již zavedených souřadnicových systémů, jakož i výrazů d_{ijk} z předchozí kapitoly. Třeba se ještě také zmínit o pojmech cizí přímka a čistá konfigurace. Tyto pojmy definuji — jak je zvykem — takto:

D e f i n i c e c i z í c h p ř í m e k. Jestliže tři konfigurační body leží na nekonfigurační přímce, pak této přímce říkáme *cizí přímka.*

D e f i n i c e č i s t é k o n f i g u r a c e. Konfigurace, ve kterých se nevyskytují cizí přímky nazývám *čisté konfigurace.*

V některé literatuře se zavádí ještě pojem *cizích* bodů a definice čisté konfigurace pak zní jinak. V této práci však pod pojmem konfigurace čistá je míněna konfigurace nahoře definovaná. Na to čtenáře výslovně upozorňuji.

U každé z níže uvedených konfigurací upozorním na případné reálné řešení. V poslední kapitole pak přímo u každé z konfigurací uvedu souhrnně počet reálných i imaginárních řešení.

Protože počet čistých konfigurací značně převládá, upozorňuji, že není-li výslovně řečeno jinak, je vždy uvedená konfigurace čistá.

Realisovatelné konfigurace

1. Typ $C_6^1C_1^2D_4E_1^2$, s c h e m a 439, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\5\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $b\,.\,(1-c)\,.\,d_{43X} = 0$ (výrazy d_{iXj}, resp. d_{ijX}, nechť si čtenář laskavě vyhledá v kapitole II). Dále platí: $b\,.\,d_{4X9} = b\,.\,d_{43X} + b\,.\,M = (b-1)\,.\,d_{43X} + (a-1)\,.\,N = 0$, kde $M = ab-a-1 = 0$, $N = c-2a+a^2 = 0$. Vzhledem k tomu, že pro tři neznámé a, b, c (pro které platí věta 2) máme předepsány jen dvě rovnice

($M = 0$ a $N = 0$), můžeme souřadnice všech dvanácti konfiguračních bodů získat tak, že do souřadnic:

$1 = (1, 1, 1)$, $2 = (a, 1, 1,)$, $3 = (1, 0, 0)$, $4 = (a, c, a)$,
$5 = (a, c, 1)$, $6 = (1, 1, 0)$, $7 = (a, 1, b)$, $8 = (a, 0, b)$,
$9 = (0, 1, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$ dosadíme za b, c výrazy

$b = \dfrac{a+1}{a}$; $c = 2a-a^2$. Dostaneme tak:

$$
\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1), & 7 &= (a^2, a, a+1),\\
2 &= (a, 1, 1), & 8 &= (a^2, 0, a+1),\\
3 &= (1, 0, 0), & 9 &= (0, 1, 0),\\
4 &= (1, 2-a, 1), & 10 &= (2a^2+a-a^3, a^2+2a-a^3, a+1),\\
5 &= (a, 2a-a^2, 1), & 11 &= (2a^2-a^3, a^2+a-a^3, 1),\\
6 &= (1, 1, 0), & 12 &= (0, 0, 1),
\end{aligned}
$$

kde a může nabývat všech hodnot nad tělesem komplexních čísel, ale $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq 2$, $a^2-2 \neq 0$, $a^2-a-1 \neq 0$. Snadno totiž nalezneme, že $a \neq 0$, $a \neq 1$ dle věty 2 a z téhož důvodu musí být $a \neq -1$, resp. $a \neq 2$, resp. $a^2-a-1 \neq 0$, (neboť jinak by bylo $b = 0$, resp. $c = 0$, resp. $a = b$). Poněkud nesnadněji se hledá, proč musí být také $a^2 - 2 \neq 0$. V opačném případě by však bod *3* ležel na přímce *4—7—11*.

Pro libovolnou přípustnou hodnotu a jest v této konfiguraci vždy cizí přímka *2—4—6* a kromě toho další dvě cizí přímky dostaneme, položíme-li $a = 1 \pm \sqrt{2}$ (a to přímky *9—10—12*, *1—5—8*). V tomto případě také vzniká incidence (kterou bychom mohli nazvat n á h o d n o u), že totiž přímky *3—8—12*, *1—4—9*, *6—7—10* procházejí jedním bodem, právě tak jako přímky *3—5—10*, *1—4—9*, *2—8—11*.

Jednotlivé body této konfigurace jsou těchto typů a takto odděleny:

1 : *5, 7, 8*	D	*5* : *1, 7, 8*	D	*9* : *10, 11, 12*	D
2 : *4, 6, 10*	C^1	*6* : *2, 4, 8*	C^1	*10* : *2, 9, 12*	C^1
3 : *4, 7, 11*	E^2	*7* : *1, 3, 5*	C^1	*11* : *3, 9, 12*	C^1
4 : *2, 3, 6*	C^2	*8* : *1, 5, 6*	C^1	*12* : *9, 10, 11*	D

Tato konfigurace je jediná, která nemá B-body.

2. Typ $B_1^2C_4^1C_3^2D_4$, s c h e m a 349, t. j.

$$
\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad
\frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,5\,8\end{matrix}},\quad
\frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,6\\7\,5\,8\end{matrix}},\quad
\frac{11}{\begin{matrix}2\,4\,5\\8\,7\,6\end{matrix}},\quad
\frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.
$$

Vypočítáme-li souřadnice bodů *10*, *11* z přímek *3—7*, *6—8*; *2—8*, *4—7* dostaneme: $10 = (b, 1-a+b, b+c-ac)$; $11 = (bc, 2c-a, c^2)$. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, tedy zní: $d_{349} = a^2+b^2-ab-ac = 0$. Dále platí: $c \,.\, d_{34X} = b \,.\, d_{3X9} + (c-a) \,.\, M$; $d_{34X} = N + (1-b) \,.\, M$, kde $M = c-b-ac = 0$, $N = 2b-2b^2+a^2-a = 0$.

Z těchto tří rovnic (d_{349}, M, N) můžeme již snadno vypočítat b, c jako funkce a a podmínku pro a:

$$2b = 7a^2-6a+3 \; ; \quad 2c = 14a^2-11a+5 \; ; \quad 7a^3-9a^2+5a-1 = 0 \,.$$

Pomocí těchto rovnic (viz souřadnicový systém pro skupinu $3ij$) dostáváme:

$1 = (a, 1, a)$,	$7 = (0, -7a^2+2a+1, 1)$,
$2 = (0, 1, 0)$,	$8 = (1-a, -7a^2+2a+1, 1)$,
$3 = (1, 1, 1)$,	$9 = (1, 0, 0)$,
$4 = (7a^2-6a+3, 2, 2a)$,	$10 = (1, -7a^2+2a+2, 2)$,
$5 = (1, 1, 0)$,	$11 = (1-a, 2-2a, 1)$,
$6 = (a, 1, 1)$,	$12 = (0, 0, 1)$,

kde pro a platí $7a^3-9a^2+5a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

Jednotlivé body jsou takto odděleny a těchto typů:

$1 : 5, 7, 8 \ldots\ldots\ D$	$5 : 1, 7, 8 \ldots\ldots\ D$	$9 : 10, 11, 12 \ldots\ D$
$2 : 4, 6, 10 \ldots\ldots\ C^2$	$6 : 2, 4, 7 \ldots\ldots\ C^2$	$10 : 2, 9, 12 \ldots\ldots\ C^1$
$3 : 4, 8, 11 \ldots\ldots\ B^2$	$7 : 1, 5, 6 \ldots\ldots\ C^1$	$11 : 3, 9, 12 \ldots\ldots\ C^1$
$4 : 2, 3, 6 \ldots\ldots\ C^2$	$8 : 1, 3, 5 \ldots\ldots\ C^1$	$12 : 9, 10, 11 \ldots\ D$

Tato konfigurace spolu s předchozí (439) jsou jediné dvě konfigurace obsahující více než dva D-body.

Protože u zbývajících konfigurací se provádí výpočet obdobně jako u této, nebudu již výpočet provádět a omezím se pouze na výsledek.

3. Typ $B_1^2C_4^1C_4^2D_2E_1^2$, schema 197, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\ 8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\ 8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}\,.$$

V tomto případě je výhodné vypočítat souřadnice bodu 10 z přímek $3-8$, $5-6$ a souřadnice bodu 11 z přímek $2-8$, $4-5$. Pak totiž vyjde podmínka d_{197} (aby body 1, 10, 11 ležely na přímce) ve velmi jednoduchém tvaru $d_{197} = a-b-1 = 0$. Další výpočty přenechávám čtenáři:

$1 = (1, 0, 0,)$,	$7 = (1, 1, 2)$,
$2 = (x+1, 4, 4)$,	$8 = (x+1, x-3, 2x+2)$,
$3 = (1, 1, 1)$,	$9 = (0, 1, 0)$,
$4 = (x+1, 4, 0)$,	$10 = (3-x, -x-1, 4)$,
$5 = (x+1, x-3, 4)$,	$11 = (x+5, -x-1, 4)$,
$6 = (1, 0, 1)$,	$12 = (0, 0, 1)$,

kde pro x platí rovnice $x^2 + 7 = 0$.[2])

[2]) Podmínka pro a vyšla původně $2a^2-a+1=0$. Abychom mohli snadněji počítat souřadnice konfiguračních bodů, provedl jsem substituci $4a = x+1$.

$1 : 5, 7, 8$ .... C^2	$5 : 1, 3, 7$ .... C^1	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 6, 7, 10$ ...... B^2	$6 : 2, 4, 8$ .... C^2	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 4, 5, 11$ ...... E^2	$7 : 1, 2, 5$ .... C^1	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 3, 6, 8$ .... C^2	$8 : 1, 4, 6$ .... C^2	$12 : 9, 10, 11$ .... D

4. Typ $B_2^1C_4^1C_4^2D_2$, schema 619, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\ 8\ 6\ 7\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\ 8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, a), & 7 &= (2a, ax+a+4, 2a), \\
2 &= (0, 0, 1), & 8 &= (2, ax+a+4, 2a), \\
3 &= (1, 1, 1), & 9 &= (1, 0, 0), \\
4 &= (4-ax-3a, 2, 2a), & 10 &= (4, 2x+10, 5a+4+ax), \\
5 &= (1, 0, ax+3a-2-x), & 11 &= (2, ax+a+4, 3ax+7a-2x), \\
6 &= (0, 1, 1), & 12 &= (0, 1, 0),
\end{aligned}$$

kde pro a, x platí současně $a^2+ax-x = 0$, $x^2+5x+8 = 0$.[3])

$1 : 5, 6, 7$ .... C^2	$5 : 1, 3, 7$ .... C^1	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 4, 7, 10$ ...... B^1	$6 : 1, 4, 8$ .... C^2	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 5, 8, 11$ ...... B^1	$7 : 1, 2, 5$ .... C^1	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 2, 6, 8$ .... C^2	$8 : 3, 4, 6$ .... C^2	$12 : 9, 10, 11$ .... D

5. Typ $B_1^1B_1^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 127, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\ 5\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\ 8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 0, 0), & 7 &= (a, a, 1-a), \\
2 &= (a, 1, 1), & 8 &= (2a^2-a, a^3-a^2, 3a-2a^2-1), \\
3 &= (1, 1, 1), & 9 &= (0, 1, 0), \\
4 &= (a, 1, 0), & 10 &= (a^4-5a^3+4a^2-a, 2a^3-a^4-a^2, \\
& & & \quad a^4-a^3-4a^2+4a-1), \\
5 &= (2a^2-a, a^3-a^2, 2a-1), & 11 &= (2a^3+a^2-a, a^3+a^2-a, 2a-1), \\
6 &= (1, 0, 1), & 12 &= (0, 0, 1);
\end{aligned}$$

kde pro a platí $a^6-4a^4-4a^3+11a^2-6a+1 = 0$, $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 \in (1, 2)$.[4])

$1 : 5, 7, 8$ .... C^2	$5 : 1, 6, 7$ .... C^1	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 6, 7, 10$ ...... B^2	$6 : 2, 4, 5$ .... B^1	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 4, 8, 11$ ...... C^2	$7 : 1, 2, 5$ .... C^1	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 3, 6, 8$ .... C^2	$8 : 1, 3, 4$ .... C^2	$12 : 9, 10, 11$ .... D

---

[3]) Pro snadnější výpočet souřadnic konfiguračních bodů provedl jsem ve výsledné rovnici pro a ($a^4-5a^3+13a^2-16a+8 = 0$) substituci $a = 1-t$.

[4]) K podstatnému zjednodušení této rovnice dojde, provedeme-li substituci $a = \dfrac{1}{t+1}$, neboť touto substitucí přejde daná rovnice na tvar $t^6 - 4t^4 + 5t^2 - 1 = 0$. Doporučuji zvláště pro event. přesnější odhad kořenů.

6. Typ $B_1^1 B_1^2 C_4^1 C_4^2 D_2$, schema 391, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&5\\8&7&6\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&5&6\\4&7&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (a, 1, a)\,, & 7 &= (0, 1, a+1)\,,\\
2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (2a^3-a^5+a^2-a, 1, a+1)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (2a^3-a^5+a^2-a, 1, a)\,, & 10 &= (a^5-2a^3+2a, a^5-2a^3+a+1, 1)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (a^4-2a^2-a+1, a^3-a^2-a, -1)\,,\\
6 &= (a, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $a^6+a^5-a^4-2a^3+a+1 = 0$.

1 : 5, 7, 8 .... C^2	*5 : 1, 4, 7* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 6, 8, 10 ...... C^2	*6 : 2, 4, 8* .... C^2	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 7, 11 ...... B^2	*7 : 1, 3, 5* .... C^1	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 3, 5, 6 .... B^1	*8 : 1, 2, 6* .... C^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

7. Typ $B_1^1 B_1^2 C_4^1 C_4^2 D_2$, schema 430, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&6\\5&8&7\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&5&6\\4&7&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 7 &= (2a, 2, a^2)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 8 &= (2, 0, a)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\
4 &= (1, 3a^2-a^3-a-1, 1)\,, & 10 &= (2a^2-a^3+3a-4, a^3-3a^2+a+2, 1)\,,\\
5 &= (a, a^3-3a^2+a+2, 1)\,, & 11 &= (a^3-2a^2+1, 1, a^2-a-1)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $a^4-2a^3-2a^2+2a+2 = 0$; $a_1 \in (1, 2)$; $a_2 \in (2, 3)$.

1 : 5, 7, 8 .... C^2	*5 : 1, 6, 8* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 6, 8, 10 ...... B^2	*6 : 2, 4, 5* .... B^1	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 7, 11 ...... C^2	*7 : 1, 3, 4* .... C^2	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 3, 6, 7 .... C^2	*8 : 1, 2, 5* .... C^1	*12 : 9, 10, 11* .... D

8. Typ $B_1^1B_1^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 609, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 7\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{array}{ll}
1 = (1, 1, a)\,, & 7 = (1, 2a-4+2t-at, 1)\,,\\
2 = (0, 0, 1)\,, & 8 = (2, 5a+2t-4-2at, a)\,,\\
3 = (1, 1, 1)\,, & 9 = (1, 0, 0)\,,\\
4 = (2, 2t-2-a, 1+at-2a)\,, & 10 = (2, 2at+2-6a, 6t-10-a)\,,\\
5 = (2, 0, 1+at-2a)\,, & 11 = (2, 5a+2t-4-2at, 2t+3a-at-3)\,,\\
6 = (0, 1, 1)\,, & 12 = (0, 1, 0)\,,
\end{array}$$

kde pro a, t platí současně $a^2-ta+1 = 0$; $2t^2-10t+13 = 0$.[5])

$1: 5, 6, 7$ .... C^2	$5: 1, 3, 8$ .... C^2	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 4, 7, 10$ ...... B^1	$6: 1, 4, 7$ .... C^1	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 5, 8, 11$ ...... C^2	$7: 1, 2, 6$ .... C^1	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 2, 6, 8$ .... B^2	$8: 3, 4, 5$ .... C^2	$12: 9, 10, 11$ .... D

9. Typ $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 186, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\8\ 6\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\7\ 8\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{array}{ll}
1 = (1, 0, 0), & 7 = (x, x, 1),\\
2 = (x+6, 3, 3), & 8 = (11x, 5x+3, 11),\\
3 = (1, 1, 1), & 9 = (0, 1, 0),\\
4 = (x+6, 3, 0), & 10 = (6-x, 3-x, 1),\\
5 = (x+6, x+3, 3), & 11 = (4-x, 3-x, 1),\\
6 = (1, 0, 1), & 12 = (0, 0, 1),
\end{array}$$

kde pro x platí $x^2-3 = 0$.[6])

$1: 5, 7, 8$ .... B^2	$5: 1, 3, 4$ .... C^1	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 6, 8, 10$ ...... C^2	$6: 2, 7, 8$ .... C^1	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 4, 5, 11$ ...... C^2	$7: 1, 4, 6$ .... B^2	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 3, 5, 7$ .... C^1	$8: 1, 2, 6$ .... C^1	$12: 9, 10, 11$ .... D

[5]) Původní podmínka pro a vychází $4a^4 - 20a^3 + 34a^2 - 20a + 4 = 0$.

[6]) Podmínka pro a vychází $3a^2 - 12a + 11 = 0$. Pro výpočet souřadnic konfiguračních bodů je však výhodné použít substituce $a = \frac{2x+1}{x}$, kterou původní rovnice přejde na tvar $x^2 - 3 = 0$. Výhoda této substituce spočívá hlavně v tom, že použitím poslední rovnice se dá konfigurace snadněji nakreslit.

10. Typ $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 198, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 0, 0)$, $7 = (3, 3, 2a^2-4a^3+5a-6)$,
$2 = (a, 1, 1)$, $8 = (5a^3-2a^2-6a+12, 3, 3a^3-6a+9)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $9 = (0, 1, 0)$,
$4 = (a, 1, 0)$, $10 = (2a-3-a^3, -1, 2a^3-a^2-2a+3)$,
$5 = (3a, 2a^3-a-a^2+6, 3)$, $11 = (2a^3-a^2-3a+3, -1, 2a^3-a^2-2a+3)$,
$6 = (1, 0, 1)$, $12 = (0, 0, 1)$,

kde pro a platí $a^4 + a^3 - 2a^2 + 3 = 0$.

1 : 5, 7, 8 .... B^2	*5 : 1, 3, 4* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 6, 7, 10 ...... C^2	*6 : 2, 7, 8* .... C^1	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 5, 11 ...... C^2	*7 : 1, 2, 6* .... C^1	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 3, 5, 8 .... C^1	*8 : 1, 4, 6* .... B^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

11. Typ $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 239, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&7&4&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&8&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $7 = (1, a^3-4a^2+7a-2, a)$,
$2 = (1, 1, a)$, $8 = (a^3-5a^2+10a-3, a^3-4a^2+7a-2, a)$,
$3 = (0, 0, 1)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$4 = (0, 1, 1)$, $10 = (a^3-5a^2+10a-3, 1, -a^3+4a^2-6a+3)$,
$5 = (a^3-5a^2+10a-3, 1, a)$, $11 = (a^3-5a^2+9a-2, a^3-4a^2+6a-1, 2a-a^2)$,
$6 = (1, 0, 1)$, $12 = (0, 1, 0)$,

kde pro a platí rovnice $a^4-5a^3+10a^2-6a+1 = 0$; $a_1 \in (0; 0{,}5)$; $a_2 \in (0{,}5; 1)$.

1 : 5, 7, 8 .... C^1	*5 : 1, 4, 7* .... C^2	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 4, 6, 10 ...... C^1	*6 : 2, 4, 8* .... C^1	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 7, 8, 11 ...... B^2	*7 : 1, 3, 5* .... C^1	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 2, 5, 6 .... C^2	*8 : 1, 3, 6* .... B^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

Tato konfigurace není čistá, protože body *1*, *5*, *7* leží na přímce.

12. Typ $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 381, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (a, 1, a). & 7 &= (0, 1, a+1),\\
2 &= (0, 1, 0), & 8 &= (1, 1+a-a^2, 1+2a-a^3),\\
3 &= (1, 1, 1), & 9 &= (1, 0, 0),\\
4 &= (1, a+1-a^2, a+a^2-a^3), & 10 &= (1, a, a^2-1),\\
5 &= (1, 1, 0), & 11 &= (a+1, a^4, 2a^2+a-a^4),\\
6 &= (a, 1, 1), & 12 &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $a^4+a^3-a^2-a-1=0$; $a_1 \in (-2, -1)$; $a_2 \in (1, 2)$.

1 : 5, 7, 8 .... B^2	*5 : 1, 4, 6* .... B^2	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 6, 8, 10 ...... C^2	*6 : 2, 5, 8* .... C^1	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 7, 11 ...... C^2	*7 : 1, 3, 4* .... C^1	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 3, 5, 7 .... C^1	*8 : 1, 2, 6* .... C^1	*12 : 9, 10, 11* .... D

13. Typ $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 409, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (3x+4, x^2+x+2, 3x+4)\,,\\
2 &= (x+1, x, x)\,, & 5 &= (3x+4, x^2+x+2, x^3-x^2+4x+5)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 8 &= (x^2-2x-2, 0, -x-5)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 7 &= (x^2-2x-2, x^3-2x+5, -x-5)\,,\\
9 &= (0, 1, 0)\,, & 10 &= (8x^2-2x^3+21x+18, x^3+6x^2+7x+10, 3x^2+19x+20),\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (10x^2-5x^3+2x-18, 9x^2-3x^3-4x-15, 2x^2+9x-5)\,,
\end{aligned}$$

kde pro x platí $x^4+5x+5=0$.[7])

1 : 5, 7, 8 .... C^1	*5 : 1, 3, 8* .... C^1	*9 : 10, 11 ,12* ... D
2 : 4, 6, 10 ...... C^1	*6 : 2, 4, 7* .... C^2	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 5, 7, 11 ...... B^2	*7 : 1, 3, 6* .... B^2	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 2, 6, 8 .... C^1	*8 : 1, 4, 5* .... C^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

---

[7]) Původní podmínka $5a^4-15a^3+15a^2-5a+1=0$ přechází substitucí $a=\dfrac{x+1}{x}$ na tvar $x^4+5x+5=0$.

14. Typ $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 461, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,8\,5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,5\\7\,8\,6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,5\,6\\4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 7 &= (a^2, a, a-1)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 8 &= (a^2, 0, a-1)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\
4 &= (a, 1-a, a)\,, & 10 &= (2a^2-2a+1, a, a-1)\,,\\
5 &= (a, 1-a, 1)\,, & 11 &= (3a^2-a+1, 1, 3a-1)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $3a^3-5a^2+4a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

1 : 5, 7, 8 .... C^2	*5 : 1, 3, 7* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 6, 8, 10 ...... C^1	*6 : 2, 4, 8* .... C^1	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 5, 11 ...... B^2	*7 : 1, 4, 5* .... C^1	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 3, 6, 7 .... B^2	*8 : 1, 2, 6* .... C^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

15. Typ $B_2^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 319, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,5\,8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,5\,6\\4\,8\,7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,4\,5\\8\,7\,6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (a, 1, a)\,, & 7 &= (0, a-1, a^2)\,,\\
2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (a^3+a+1, a, a^3-a^4+a+1)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (a^3+a+1, a, a^2)\,, & 10 &= (a^4-a^3+a^2+a, 2a-1, a^2)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (a^3+a+1, a+1, a^3-a^4+a+1)\,,\\
6 &= (a, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $a^5-2a^4+2a^3-a^2+1 = 0$; $a_1 \in (-1, 0)$.

1 : 5, 7, 8 .... C^1	*5 : 1, 4, 7* .... C^2	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 4, 6, 10 ...... C^2	*6 : 2, 4, 8* .... C^2	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 7, 8, 11 ...... B^2	*7 : 1, 3, 5* .... C^1	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 2, 5, 6 .... C^2	*8 : 1, 3, 6* .... B^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

16. Typ $B_2^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 460, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,8\,5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,5\\7\,8\,6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,5\,6\\4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 7 &= (b^2, 2, 2b)\,,\\
2 &= (b^2, 2, 2)\,, & 8 &= (b, 0, 2)\,,\\
3 &= (1, 0, 0) & 9 &= (0, 1, 0),\\
4 &= (1, 2-b, 1)\,, & 10 &= (1+b^2, 2, 2b)\,,\\
5 &= (1, 2-b, 2b+2-2b^2)\,, & 11 &= (b+2+b^2, 2, 2+2b)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro b platí $b^3-b-1 = 0$; $b_1 \in (1, 2)$.

$1 : 5, 7, 8 \ldots\ldots\; C^2$	$5 : 1, 3, 8 \ldots\ldots\; C^1$	$9 : 10, 11, 12 \ldots\; D$
$2 : 6, 8, 10 \ldots\ldots\; B^2$	$6 : 2, 4, 7 \ldots\ldots\; C^2$	$10 : 2, 9, 12 \ldots\ldots\; C^1$
$3 : 4, 5, 11 \ldots\ldots\; B^2$	$7 : 1, 4, 6 \ldots\ldots\; C^2$	$11 : 3, 9, 12 \ldots\ldots\; C^1$
$4 : 3, 6, 7 \ldots\ldots\; C^2$	$8 : 1, 2, 5 \ldots\ldots\; C^1$	$12 : 9, 10, 11 \ldots\; D$

17. Typ $B_2^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 691, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\8\,6\,7\,5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,5\\8\,7\,6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,5\,6\\4\,8\,7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, x-xy)\,, & 7 &= (x-xy, 1-x, x-xy)\,,\\
2 &= (0, 0, 1)\,, & 8 &= (1, 1-x, x-xy)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (1+x, 1, x-xy)\,, & 10 &= (3-y, 2, 3-y+x-xy)\,,\\
5 &= (1+x, 0, x-xy)\,, & 11 &= (2x+2, 2, x-xy+2)\,,\\
6 &= (0, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro x, y platí současně $x^2+x(y-1)+1 = 0$, $y^2-5 = 0$.[8])

$1 : 5, 6, 7 \ldots\ldots\; C^2$	$5 : 1, 3, 7 \ldots\ldots\; C^1$	$9 : 10, 11, 12 \ldots\; D$
$2 : 7, 8, 10 \ldots\ldots\; B^2$	$6 : 1, 4, 8 \ldots\ldots\; C^2$	$10 : 2, 9, 12 \ldots\ldots\; C^1$
$3 : 4, 5, 11 \ldots\ldots\; B^2$	$7 : 1, 2, 5 \ldots\ldots\; C^1$	$11 : 3, 9, 12 \ldots\ldots\; C^1$
$4 : 3, 6, 8 \ldots\ldots\; C^2$	$8 : 2, 4, 6 \ldots\ldots\; C^2$	$12 : 9, 10, 11 \ldots\; D$

Konfigurace není čistá, neboť body *1, 5, 7* leží na cizí přímce.

---

[8]) Podmínka pro c vycházela $c^4-6c^3+10c^2-8c+4 = 0$. Provedl jsem substituci $c = 1 + x$ a toho jsem použil pro snadnější výpočet souřadnic konfiguračních bodů.

18. Typ $B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$, schema 301, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

1 = (1, 2, 1),	*5* = (1, 1, 0),	*9* = (1, 0, 0),
2 = (0, 1, 0),	*6* = (1, 2, 2),	*10* = (8, 14, 9),
3 = (1, 1, 1),	*7* = (0, 2, 3),	*11* = (4, 6, 5),
4 = (4, 10, 5),	*8* = (4, 10, 15),	*12* = (0, 0, 1),

1 : 5, 7, 8 .... B^2	*5 : 1, 4, 6* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 6, 8, 10 ...... E^2	*6 : 2, 4, 5* .... C^2	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 7, 8, 11 ...... B^2	*7 : 1, 3, 4* .... B^2	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 5, 6, 7 .... C^1	*8 : 1, 2, 3* .... E^1	*12 : 9, 10, 11* .... D

Tato konfigurace se dá konstruovat lineárně, právě tak jako konfigurace následující, protože u nich nenastává adjunkce irracionality (to znamená, že se dá konstruovat v projektivní rovině nad tělesem racionálních čísel). Je to konfigurace čistá a pro její nakreslení můžeme s výhodou použít incidencí (které jsem u první z konfigurací — schema 439 — nazval „náhodné“). Přímky *1—10—11, 3—5—12, 7—8—9* se totiž protínají v jednom bodě, právě tak jako přímky *3—5—12, 1—4—9, 6—7—11.*

19. Typ $B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_2^2$, schema 341, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

Tato konfigurace je dalším případem konfigurace, která se dá konstruovat lineárně (viz konfiguraci předchozí), neboť souřadnice konfiguračních bodů jsou:

1 = (3, 2, 3)	*5* = (1, 1, 0)	*9* = (1, 0, 0)
2 = (0, 1, 0)	*6* = (3, 2, 2)	*10* = (8, 6, 3)
3 = (1, 1, 1) ,	*7* = (0, 2, 5)	*11* = (20, 14, 15)
4 = (4, 2, 3)	*8* = (4, 2, 5)	*12* = (0, 0, 1)

1 : 5, 7, 8 .... C^2	*5 : 1, 6, 7* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 6, 8, 10 ...... E^2	*6 : 2, 4, 5* .... B^2	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 8, 11 ...... B^2	*7 : 1, 4, 5* .... C^1	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 3, 6, 7 .... B^2	*8 : 1, 2, 3* .... E^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

Tři konfigurační přímky *6—7—11, 3—5—12, 1—4—9* se protínají v bodě, což je opět případ „náhodné“ incidence. Tato okolnost je velmi výhodná při konstrukci.

20. Typ $B_2^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$, schema 106, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,5\\6\,4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,5\,6\\4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,4\,5\\7\,8\,6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\,10\\3\,11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 0, 0)$, $7 = (x-1, x-1, 2)$,
$2 = (x+3, 2, 2)$, $8 = (3x-3, x-3, 6)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $9 = (0, 1, 0)$,
$4 = (x+3, 2, 0)$, $10 = (x+5, 2, x-1)$,
$5 = (x+3, x+1, 2)$, $11 = (2, 1-x, x+1)$,
$6 = (1, 0, 1)$, $12 = (0, 0, 1)$,

kde pro x platí $x^2+3 = 0$.

1 : *5, 7, 8* .... B^2	*5* : *1, 3, 4* .... B^2	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *6, 8, 10* ...... E^2	*6* : *2, 4, 7* .... C^2	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *5, 8, 11* ...... B^3	*7* : *1, 4, 6* .... C^1	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *5, 6, 7* .... C^1	*8* : *1, 2, 3* .... E^1	*12* : *9, 10, 11* .... D

Konfigurace není čistá; body *4*, *6*, *7* leží na přímce.

21. Typ $B_4^1C_4^1C_1^2D_2E_1^2$, schema 134, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,5\\6\,4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,6\\5\,8\,7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,4\,6\\7\,5\,8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\,10\\3\,11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 0, 0)$, $7 = (at-a-t+2, at-a-t+2, 1)$,
$2 = (a, 1, 1)$, $8 = (at-a-t+2, -a, 1)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $9 = (0, 1, 0)$,
$4 = (a, 1, 0)$, $10 = (-t-a-at, a, 1)$,
$5 = (a, a+t+at+2, 1)$, $11 = (t+a-at, a, 1)$,
$6 = (1, 0, 1)$, $12 = (0, 0, 1)$,

kde pro a, t platí současně $a^2+ta+1 = 0$; $t^2-2 = 0$.

1 : *5, 7, 8* .... C^2	*5* : *1, 6, 7* .... C^1	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *6, 8, 10* ...... B^1	*6* : *2, 4, 5* .... B^1	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *4, 8, 11* ...... B^1	*7* : *1, 4, 5* .... C^1	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *3, 6, 7* .... B^1	*8* : *1, 2, 3* .... E^2	*12* : *9, 10, 11* .... D

22. Typ $B_3^1 B_1^2 C_2^1 C_3^2 D_2 E_1^1$, schema 421, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&6\\5&7&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&5&6\\4&8&7\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (6a-5, 3a^3-16a^2+22a-8, 6a-5)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 5 &= (6a^2-5a, -9a^3+12a^2-6a-1, 6a-5)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (6a^2-5a, 6a-5, 3a^2-4a+7)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 8 &= (6a^2-5a, 0, 3a^2-4a+7)\,,\\
9 &= (0, 1, 0)\,, & 10 &= (3a^2+2a+2, -3a^2+7a+2, 3a^2-4a+7)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (3a^3+2a^2-4a+5, -3a^3+13a^2-9a+5, 3a^3-4a^2+7a)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $3a^4-7a^3+10a^2-2a+1 = 0$.

1 : *5, 7, 8* .... C^2	*5* : *1, 6, 7* .... C^2	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *6, 8, 10* ...... E^1	*6* : *2, 4, 5* .... B^1	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *4, 7, 11* ...... B^1	*7* : *1, 3, 5* .... C^2	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *3, 6, 8* .... B^1	*8* : *1, 2, 4* .... B^2	*12* : *9, 10, 11* .... D

23. Typ $B_2^1 B_2^2 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^2$, schema 359, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&5\\7&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&4&5\\8&7&6\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
2 &= (0, 1, 0)\,, & 1 &= (2c^3-2c^2+c, c^3-c+1, 2c^3-2c^2+c)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (c^4-c+1, c^3-c+1, 2c^3-2c^2+c)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 6 &= (2c^3-2c^2+c, c^3-c+1, c^3-c+1)\,,\\
7 &= (0, 1, c)\,, & 8 &= (c^4-c+1, c^3-c+1, c^4-c^2+c)\,,\\
9 &= (1, 0, 0)\,, & 10 &= (c^4-c+1, c^4-c^3+c^2-c+1, c^3-c+1)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (c^4-c+1, 2c^3-2c^2+1, c^4-c^2+c)\,,
\end{aligned}$$

kde pro c platí $c^8-2c^7+3c^6-3c^5+2c^4-c^3+2c^2-2c+1 = 0$.

1 : *5, 7, 8* .... C^1	*5* : *1, 4, 7* .... C^2	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *4, 6, 10* ...... E^2	*6* : *2, 7, 8* .... B^1	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *4, 8, 11* ...... B^2	*7* : *1, 5, 6* .... C^1	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *2, 3, 5* .... B^1	*8* : *1, 3, 6* .... B^2	*12* : *9, 10, 11* .... D

24. Typ $B_1^1 B_3^2 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^1$, schema 223, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 7\ 4\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\ 5\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\ 6\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 7 = (2, 2c, c+x+2)\,,\\
&2 = (2, 2, x+c+2)\,, && 8 = (2x, 2c, c+x+2)\,,\\
&3 = (0, 0, 1)\,, && 9 = (1, 0, 0)\,,\\
&4 = (0, 1, 1)\,, && 10 = (2x, 2, 2x+1-cx)\,,\\
&5 = (2x, 2, x+c+2)\,, && 11 = (cx-1-2x, 2-c-x, c-2x-1)\,,\\
&6 = (1, 0, 1)\,, && 12 = (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro c, x platí současně $c^2-2x-1 = 0$; $x^2+1 = 0$.

$1 : 5, 7, 8 \ldots\ldots\ B^2$ | $5 : 1, 4, 6 \ldots\ldots\ C^1$ | $9 : 10, 11, 12 \ldots\ D$
$2 : 4, 8, 10 \ldots\ldots\ B^1$ | $6 : 4, 5, 7 \ldots\ldots\ C^1$ | $10 : 2, 9, 12 \ldots\ C^1$
$3 : 7, 8, 11 \ldots\ldots\ B^2$ | $7 : 1, 3, 6 \ldots\ldots\ B^2$ | $11 : 3, 9, 12 \ldots\ C^1$
$4 : 2, 5, 6 \ldots\ldots\ C^2$ | $8 : 1, 2, 3 \ldots\ldots\ E^1$ | $12 : 9, 10, 11 \ldots\ D$

25. Typ $B_1^1 B_3^2 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^1$, schema 230, t. j.

$$\frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 7\ 4\ 8\end{matrix}},\quad \frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\ 5\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 5 = (2a+1, 1, a)\,, && 9 = (1, 0, 0)\,,\\
&2 = (1, 1, a)\,, && 6 = (1, 0, 1)\,, && 10 = (2a+1, 1, a+2)\,,\\
&3 = (0, 0, 1)\,, && 7 = (1, -1, a)\,, && 11 = (a, a-2, a^2-2)\,,\\
&4 = (0, 1, 1)\,, && 8 = (2a+1, -1, a)\,, && 12 = (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $a^3-a^2-a-1 = 0$; $a_1 \in (1, 2)$.

$1 : 5, 7, 8 \ldots\ldots\ B^2$ | $7 : 1, 3, 4 \ldots\ldots\ B^2$
$2 : 6, 8, 10 \ldots\ldots\ B^1$ | $8 : 1, 2, 3 \ldots\ldots\ E^1$
$3 : 7, 8, 11 \ldots\ldots\ B^2$ | $9 : 10, 11, 12 \ldots\ D$
$4 : 5, 6, 7 \ldots\ldots\ C^1$ | $10 : 2, 9, 12 \ldots\ C^1$
$5 : 1, 4, 6 \ldots\ldots\ C^1$ | $11 : 3, 9, 12 \ldots\ C^1$
$6 : 2, 4, 5 \ldots\ldots\ C^2$ | $12 : 9, 10, 11 \ldots\ D$

26. Typ $B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$, schema 310, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (a, 1, a), & 7 &= (0, 1, 2),\\ 2 &= (0, 1, 0), & 8 &= (5a - 2, 2, 4),\\ 3 &= (1, 1, 1), & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\ 4 &= (5a - 2, 2, 2a), & 10 &= (3a + 2, 4 - 2a, 4),\\ 5 &= (1, 1, 0), & 11 &= (4a, 4a + 1, 2),\\ 6 &= (a, 1, 1), & 12 &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

kde pro a platí $4a^2-5a+2 = 0$.

$1: 5, 7, 8$	B^2	$5: 1, 4, 6$	C^1	$9: 10, 11, 12$	D
$2: 6, 8, 10$	B^1	$6: 2, 4, 5$	C^2	$10: 2, 9, 12$	C^1
$3: 7, 8, 11$	B^2	$7: 1, 3, 4$	B^2	$11: 3, 9, 12$	C^1
$4: 5, 6, 7$	C^1	$8: 1, 2, 3$	E^1	$12: 9, 10, 11$	D

27. Typ $B_1^1B_3^2C_2^1C_3^2D_2E_1^2$, schema 194, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&6\\7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0, 0),\ 2 = (a, 1, 1),\ 3 = (1, 1, 1);\ 4 = (a, 1, 0),\\ 5 &= (5a^3-5a^2+2a,\ 5a^4-a^5-5a^3+2a^2+1,\ 5a^2-5a+2),\ 6 = (1, 0, 1),\\ 7 &= (5a^3-5a^2+2a,\ 5a^3-5a^2+2a,\ -a^6+4a^5-6a^4+6a^3-a^2-3a+2),\\ 8 &= (5a^3-5a^2+2a,\ -a^5+5a^4-5a^3+2a^2+1,\\ &\quad -a^6+4a^5-6a^4+6a^3-a^2-3a+2),\\ 9 &= (0, 1, 0),\\ 10 &= (5a^2-5a+2,\ -a^7+3a^6-5a^4-a^2-2,\\ &\quad a^7-4a^6+a^5+13a^4-12a^3-2a^2+4a-3),\\ 11 &= (a^7-4a^6+5a^5+3a^4-5a^3+a^2-a,\ a^5-1,\ 5a^3-5a^2+2a),\\ 12 &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

kde pro a platí $a^8-5a^7+7a^6+3a^5-14a^4+12a^3-3a^2-a+1 = 0$; $a_1 \in (-2, -1)$; $a_2 \in (-1, 0)$.

$1: 5, 7, 8$	C^2	$5: 1, 3, 7$	C^2	$9: 10, 11, 12$	D
$2: 6, 8, 10$	B^1	$6: 2, 4, 7$	B^2	$10: 2, 9, 12$	C^1
$3: 4, 5, 11$	E^2	$7: 1, 5, 6$	C^2	$11: 3, 9, 12$	C^1
$4: 3, 6, 8$	B^2	$8: 1, 2, 4$	B^2	$12: 9, 10, 11$	D

28. Typ $B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$, schema 462, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\6&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1), & 7 &= (10c - 4, 5c - 2, 4),\\
2 &= (2, 1, 1), & 8 &= (5c - 2, 0, 2),\\
3 &= (1, 0, 0), & 9 &= (0, 1, 0),\\
4 &= (2, c, 2), & 10 &= (c + 6, 5c - 2, 4),\\
5 &= (2, c, 1), & 11 &= (17c - 12, 5c - 4, 12c - 8),\\
6 &= (1, 1, 0), & 12 &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro c platí $4c^2-5c+2 = 0$.

1 : *5, 7, 8* .... C^1	*5* : *1, 3, 7* .... C^2	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *4, 8, 10* ...... E^1	*6* : *4, 7, 8* .... B^2	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *4, 5, 11* ...... B^2	*7* : *1, 5, 6* .... C^1	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *2, 3, 6* .... B^2	*8* : *1, 2, 6* .... B^2	*12* : *9, 10, 11* .... D

29. Typ $B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^2$, schema 357, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&6&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&6\\8&5&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (2c^3-c^2+c-3, 1, 2c^3-c^2+c-3), & 7 &= (0, 1, c),\\
2 &= (0, 1, 0), & 8 &= (c+1, 1, c),\\
3 &= (1, 1, 1), & 9 &= (1, 0, 0),\\
4 &= (c+1, 1, 2c^3-c^2+c-3), & 10 &= (c+1, c, 1),\\
5 &= (1, 1, 0), & 11 &= (11c+11, 2c^3-7c^2+8c+12, 11c),\\
6 &= (2c^3-c^2+c-3, 1, 1), & 12 &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro c platí rovnice $c^4-2c-1 = 0$; $c_1 \in (-1, 0)$; $c_2 \in (1, 2)$.

1 : *5, 7, 8* .... C^1	*5* : *1, 6, 7* .... C^1	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *4, 6, 10* ...... E^2	*6* : *2, 5, 8* .... B^2	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *4, 8, 11* ...... B^2	*7* : *1, 4, 5* .... C^2	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *2, 3, 7* .... B^2	*8* : *1, 3, 6* .... B^2	*12* : *9, 10, 11* .... D

30. Typ $B_4^2 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^2$, schema 507, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\ 8\ 6\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\ 8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (2, x + 3, 2)\,, & 7 &= (2, 3x - 7, -8)\,,\\
2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (2, x + 3, 2x + 2)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (-x - 1, 2x + 6, 4)\,, & 10 &= (3x + 3, 12, 8)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (2, 5x + 3, 2x + 2)\,,\\
6 &= (0, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro x platí $3x^2+5 = 0$.

$1 : 5, 6, 7$ .... C^2	$5 : 1, 6, 8$ .... C^1	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 4, 7, 10$ ...... B^2	$6 : 1, 4, 5$ .... C^1	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 7, 8, 11$ ...... B^2	$7 : 1, 2, 3$ .... E^2	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 2, 6, 8$ .... B^2	$8 : 3, 4, 5$ .... B^2	$12 : 9, 10, 11$ .... D

31. Typ $B_3^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^1$, schema 302, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 5\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\ 6\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 2, 1)\,, & 7 &= (0, 1, c)\,,\\
2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (3c-1-c^2, 2, 2c)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (3c-1-c^2, 2, 1)\,, & 10 &= (1, 2c^2-9c+13, c^2-4c+6)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (1, c^2-4c+6, 2)\,,\\
6 &= (1, 2, 2)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro c platí rovnice $c^3-5c^2+8c-3 = 0$; $c_1 \in (0, 1)$.

$1 : 5, 7, 8$ .... B^2	$5 : 1, 4, 6$ .... C^1	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 4, 8, 10$ ...... B^3	$6 : 4, 5, 7$ .... C^1	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 7, 8, 11$ ...... B^2	$7 : 1, 3, 6$ .... B^2	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 2, 5, 6$ .... C^2	$8 : 1, 2, 3$ .... E^1	$12 : 9, 10, 11$ .... D

32. Typ $B_3^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^1$, schema 459, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\;2\;3\;7\\4\;5\;6\;8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\;2\;3\;4\\6\;7\;8\;5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\;4\;5\\7\;6\;8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\;4\;5\\8\;7\;6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}\,.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1),\ 2 = (a, 1, 1),\ 3 = (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (a^5-2a^4+a^3+4a^2-3a,\ a^4-7a^3+16a^2-12a+3,\ a^5-2a^4+a^3+4a^2-3a)\,,\\
5 &= (a^5-2a^4+a^3+4a^2-3a,\ a^4-7a^3+16a^2-12a+3,\ a^4-2a^3+a^2+4a-3)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,,\\
7 &= (a^5-2a^4+6a^3-6a^2+3a,\ a^4-2a^3+6a^2-6a+3,\ 2a^4-4a^3+7a^2-2a)\,,\\
8 &= (a^4-2a^3+6a^2-6a+3,\ 0,\ 2a^3-4a^2+7a-2),\ 9 = (0, 1, 0)\,,\\
10 &= (3a^4-8a^3+12a^2-5a-1,\ a^4-2a^3+a^2+4a-3\,,\\
&\qquad a^5-5a^4+17a^3-28a^2+27a-11)\,,\\
11 &= (a^5-4a^4+5a^3+2a^2-11a+6,\ a^4-4a^3+10a^2-13a+5,\ 1-3a^2)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $a^6-7a^5+24a^4-43a^3+51a^2-36a+11 = 0$.

$1: 5, 7, 8$ .... C^1	$5: 1, 3, 7$ .... C^2	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 4, 6, 10$ ...... E^1	$6: 2, 7, 8$ .... B^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 4, 5, 11$ ...... B^2	$7: 1, 5, 6$ .... C^1	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 2, 3, 8$ .... B^3	$8: 1, 4, 6$ .... B^2	$12: 9, 10, 11$ .... D

33. Typ $B_3^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^2$, schema 372, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\;2\;3\;7\\4\;5\;6\;8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\;2\;3\;4\\6\;7\;5\;8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\;4\;6\\8\;5\;7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\;4\;5\\6\;7\;8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}\,.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (a, 1, a)\,, & 7 &= (0,\ 2a^2-a^4-a-2,\ 3)\,,\\
2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (a^4-3a^3+a^2+a+2,\ 2a^2-a^4-a-2,\ 3)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (3a^3-2a^4+a^2+a-4,\ 3,\ 3a)\,,\\
9 &= (1, 0, 0)\,, & 10 &= (a^4-3a^3+a^2+a+5,\ 8a^4-15a^3+5a^2-7a+25,\ 3)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (3a,\ 3a^3-2a^4+a^2+a-4,\ 3)\,,\\
6 &= (a, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $a^5-2a^4+a^3-a^2+3a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

$1: 5, 7, 8$ .... C^1	$5: 1, 6, 7$ .... C^1	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 4, 8, 10$ ...... B^3	$6: 4, 5, 8$ .... B^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 4, 7, 11$ ...... E^2	$7: 1, 3, 5$ .... C^2	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 2, 3, 6$ .... B^2	$8: 1, 2, 6$ .... B^2	$12: 9, 10, 11$ .... D

34. Typ $B^2_3 B^3_1 C^1_4 C^2_1 D_2 E^2_1$, schema 601, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 7\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 5\ 6\\4\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, x+1)\,, && 7 = (x+1, -1-2x, x+1)\,,\\
&2 = (0, 0, 1)\,, && 8 = (1, -1-2x, x+1)\,,\\
&3 = (1, 1, 1)\,, && 9 = (1, 0, 0)\,,\\
&4 = (5x-12x^2+10, 2, 2x+2)\,, && 10 = (2, 4x^2+x, 4x^2+7x+4)\,,\\
&5 = (5x-12x^2+10, 0, 2x+2)\,, && 11 = (3x-4x^2+4, 2x+2, 6x+4)\,,\\
&6 = (0, 1, 1)\,, && 12 = (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro x platí rovnice $4x^3+x^2-4x-2 = 0$; $x_1 \in (1, 2)$.

$1 : 5, 6, 7 \ldots\ldots\ C^1$	$5 : 1, 3, 6 \ldots\ldots\ C^2$	$9 : 10, 11, 12 \ldots\ D$
$2 : 7, 8, 10 \ldots\ldots\ B^2$	$6 : 1, 4, 5 \ldots\ldots\ C^1$	$10 : 2, 9, 12 \ldots\ldots\ C^1$
$3 : 5, 8, 11 \ldots\ldots\ E^2$	$7 : 1, 2, 4 \ldots\ldots\ B^2$	$11 : 3, 9, 12 \ldots\ldots\ C^1$
$4 : 6, 7, 8 \ldots\ldots\ B^2$	$8 : 2, 3, 4 \ldots\ldots\ B^3$	$12 : 9, 10, 11 \ldots\ D$

35. Typ $B^1_2 B^2_3 C^1_4 C^2_1 D_2$, schema 398, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 5\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 6\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (a, 1, a),\ 2 = (0, 1, 0),\ 3 = (1, 1, 1),\\
4 &= (2a^2-2a^3-2a+1, a^2-4a+2, a^3-4a^2+2a),\ 5 = (1, 1, 0),\\
6 &= (a, 1, 1),\ 7 = (0, a^2-4a+2, a^4-2a^5-3a^3+5a^2-7a+3),\\
8 &= (2a^2-2a^3-2a+1, a^2-4a+2, a^4-2a^5-3a^3+5a^2-7a+3),\ 9 = (1, 0, 0),\\
10 &= (4a^4-6a^3+6a^2-4a+1, 2a^4-3a^3+7a^2-7a+2, 2a^3-a^2-2a+1),\\
11 &= (2a^3-2a^2+2a-1, 2a^3-3a^2+6a-3, 2a^5-a^4+3a^3-5a^2+7a-3),\\
12 &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $2a^6-3a^5+6a^4-12a^3+15a^2-9a+2 = 0$.

$1 : 5, 7, 8 \ldots\ldots\ C^1$	$5 : 1, 4, 8 \ldots\ldots\ C^2$	$9 : 10, 11, 12 \ldots\ D$
$2 : 4, 6, 10 \ldots\ldots\ B^2$	$6 : 2, 7, 8 \ldots\ldots\ B^1$	$10 : 2, 9, 12 \ldots\ldots\ C^1$
$3 : 4, 7, 11 \ldots\ldots\ B^2$	$7 : 1, 3, 6 \ldots\ldots\ B^2$	$11 : 3, 9, 12 \ldots\ldots\ C^1$
$4 : 2, 3, 5 \ldots\ldots\ B^1$	$8 : 1, 5, 6 \ldots\ldots\ C^1$	$12 : 9, 10, 11 \ldots\ D$

36. Typ $B_2^1 B_3^2 C_4^1 C_1^2 D_2$, schema 423, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3\ 4\ 6\\5\ 7\ 8\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2\ 4\ 5\\6\ 8\ 7\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2\ 10\\3\ 11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 4 = (a^4-3a^3+3a^2-3a+1,\ a^3-2a^2,\ a^4-3a^3+3a^2-3a+1)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 5 = (a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a,\ a^4-2a^3,\\
& && \quad a^4-3a^3+3a^2-3a+1)\,,\\
&3 = (1, 0, 0)\,, && 7 = (a^5-2a^4+a^2-a,\ a^4-2a^3+a-1,\ a^4-2a^3+a^2-a)\,,\\
&6 = (1, 1, 0)\,, && 8 = (a^4-2a^3+a-1,\ 0,\ a^3-2a^2+a-1)\,,\\
&9 = (0, 1, 0)\,, && 10 = (2a^4-7a^3+7a^2-4a+1,\ a^5-2a^4,\\
& && \quad a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a)\,,\\
&12 = (0, 0, 1)\,, && 11 = (a^3-2a^2+2a,\ 1,\ a^2-a+1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $a^9-4a^8+3a^7+8a^6-23a^5+33a^4-29a^3+17a^2-6a+1 = 0$; $a_1 \in (-3, -2)$.

1 : 5, 7, 8	C^1	*5 : 1, 6, 8*	C^1	*9 : 10, 11, 12*	D
2 : 4, 8, 10	B^1	*6 : 4, 5, 7*	B^2	*10 : 2, 9, 12*	C^1
3 : 4, 7, 11	B^1	*7 : 1, 3, 6*	B^2	*11 : 3, 9, 12*	C^1
4 : 2, 3, 6	B^2	*8 : 1, 2, 5*	C^2	*12 : 9, 10, 11*	D

37. Typ $B_2^1 B_3^2 C_4^1 C_1^2 D_2$, schema 428, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3\ 4\ 6\\5\ 7\ 8\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2\ 4\ 5\\8\ 6\ 7\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2\ 10\\3\ 11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 7 = (a,\ 1,\ -a^6+4a^5-6a^4+6a^3-5a^2+3a-1)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 8 = (1,\ 0,\ -a^6+3a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a-1)\,,\\
&3 = (1, 0, 0)\,, && 9 = (0, 1, 0)\,,\\
&4 = (a^2, a-1, a^2)\,, && 10 = (-a^6+4a^5-7a^4+8a^3-6a^2+4a-2,\ a-1,\ a)\,,\\
&5 = (a^2, a-1, a)\,, && 11 = (a+1,\ 1,\ -a^6+3a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a)\,,\\
&6 = (1, 1, 0)\,, && 12 = (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí rovnice $a^7-4a^6+7a^5-9a^4+9a^3-6a^2+4a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

1 : 5, 7, 8	C^1	*5 : 1, 6, 8*	C^1	*9 : 10, 11, 12*	D
2 : 4, 6, 10	B^2	*6 : 2, 5, 7*	B^1	*10 : 2, 9, 12*	C^1
3 : 4, 7, 11	B^1	*7 : 1, 3, 6*	B^2	*11 : 3, 9, 12*	C^1
4 : 2, 3, 8	B^2	*8 : 1, 4, 5*	C^2	*12 : 9, 10, 11*	D

38. Typ $B_1^1 B_4^2 C_4^1 C_1^2 D_2$, schema 686, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&7&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}\,.$$

$1 = (1, 1, x+1)$, $2 = (0, 0, 1)$, $3 = (1, 1, 1)$,
$4 = (2x^5-5x^4-3x^3+4x^2+4x,\ 4x^5-x^6-2x^4-8x^3+4x^2+3x+1,$
$\quad -x^7+3x^6+2x^5-10x^4-4x^3+7x^2+4x+1)$,
$5 = (2x^5-5x^4-3x^3+4x^2+4x,\ 0,\ 3x^6-x^7+2x^5-10x^4-4x^3+7x^2+4x+1)$,
$6 = (0, 1, 1)$,
$7 = (3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4,\ x^5-2x^4-x^3+4x^2-x-3,$
$\quad 3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4)$,
$8 = (5x^3-2x^4+3x^2-4x-4,\ x^5-2x^4-x^3+4x^2-x-3,$
$\quad 3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4)$,
$10 = (7x^9-22x^8-4x^7+46x^6+8x^5-36x^4-21x^3+4x^2+14x+6,$
$\quad 3x^8-8x^7-11x^6+33x^5+6x^4-22x^3-10x^2+5x+3,$
$\quad 17x^8-x^9-31x^7-47x^6+67x^5+59x^4-33x^3-29x^2-3x-2)$,
$11 = (3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4,\ x^5-2x^4-x^3+4x^2-x-3,$
$\quad x^9-3x^8-3x^7+11x^6+5x^5-10x^4+5x^2-6x-5)$,
$9 = (1, 0, 0)$,
$12 = (0, 1, 0)$,

kde pro x platí

$x^{10}-3x^9-4x^8+13x^7+9x^6-16x^5-13x^4+4x^3+6x^2+3x+1 = 0$; $x_1 \in (-2, -1)$; $x_2 \in (-1, 0)$.

$1 : 5, 6, 7$ .... C^1	$5 : 1, 3, 8$ .... B^2	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 4, 8, 10$ ...... B^2	$6 : 1, 7, 8$ .... C^1	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 4, 5, 11$ ...... B^2	$7 : 1, 4, 6$ .... C^2	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 2, 3, 7$ .... B^2	$8 : 2, 5, 6$ .... B^1	$12 : 9, 10, 11$ .... D

39. Typ $B_1^1 B_4^2 C_2^1 C_3^2 D_2$, schema 690, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&7&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}\,.$$

$1 = (1, 1, a)$, $2 = (0, 0, 1)$, $3 = (1, 1, 1)$,
$4 = (a^6-3a^5+a^4+a^3+a^2,\ -a^4+2a^3-a+1,\ -a^5+2a^4-a^2+a)$,
$5 = (a^5-3a^4+a^3+a^2+a,\ 0,\ -a^4+2a^3-a+1)$, $6 = (0, 1, 1)$,
$7 = (a^3-3a^2+a-1,\ a^4-3a^3+3a^2-2a-1,\ a^3-3a^2+a-1)$,
$8 = (a^3-3a^2+a-1,\ a^5-3a^4+3a^3-2a^2-a,\ a^4-3a^3+a^2-a)$,

$$
\begin{aligned}
9 &= (1, 0, 0),\\
10 &= (-a^7+7a^6-17a^5+19a^4-15a^3+9a^2-3a+1\,,\\
&\quad a^8-5a^7+11a^6-15a^5+13a^4-11a^3+10a^2-5a+2\,,\\
&\quad 2a^6-10a^5+17a^4-17a^3+13a^2-5a+2)\,,\\
11 &= (-a^7+6a^6-11a^5+6a^4-2a^3+3a^2+1\,,\\
&\quad a^8-5a^7+8a^6-3a^5+6a^3-5a^4-3a^2+7a-2\,,\\
&\quad 2a^6-9a^5+13a^4-9a^3+3a^2+4a-1)\,,\\
12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}
$$

kde pro a platí $a^9-6a^8+14a^7-18a^6+18a^5-19a^4+18a^3-9a^2+3a-1 = 0$, $a_1 \in (0, 1)$.

$1: 5, 6, 7$ .... C^2	$5: 1, 3, 8$ .... B^2	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 7, 8, 10$ ...... B^2	$6: 1, 4, 7$ .... C^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 4, 5, 11$ ...... B^2	$7: 1, 2, 6$ .... C^2	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 3, 6, 8$ .... B^2	$8: 2, 4, 5$ .... B^1	$12: 9, 10, 11$ .... D

40. Typ $B_1^1B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 610, t. j.

$$
\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad
\frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&7&5\end{matrix}},\quad
\frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad
\frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad
\frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= (1, 1, x+1)\,, & 7 &= (x^2-1, x^3+x+1, x^2-1)\,,\\
2 &= (0, 0, 1)\,, & 8 &= (x-1, x^3+x+1, x^2-1)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (x-1, x, x^2+x)\,, & 10 &= (x^3-x, x^4+x^2-1, x^3-2x-1)\,,\\
5 &= (x-1, 0, x^2+x)\,, & 11 &= (x-1, x, x^2-2-x^3)\,,\\
6 &= (0, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}
$$

kde pro x platí $x^5-x^4+2x^3+2 = 0$; $x_1 \in (-1, 0)$.

$1: 5, 6, 7$ .... C^1	$5: 1, 3, 6$ .... C^2	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 7, 8, 10$ ...... B^2	$6: 1, 4, 5$ .... C^1	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 5, 8, 11$ ...... B^1	$7: 1, 2, 4$ .... B^2	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 6, 7, 8$ .... B^2	$8: 2, 3, 4$ .... B^3	$12: 9, 10, 11$ .... D

41. Typ $B_1^1B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 639, t. j.

$$
\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad
\frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&7&5\end{matrix}},\quad
\frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&8&7\end{matrix}},\quad
\frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad
\frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.
$$

$$
\begin{aligned}
&1 = (1, 1, x+1),\ 2 = (1, 0, 1),\ 3 = (1, 1, 1)\,,\\
&4 = (-x^5-2x^4-3x^3-4x^2-3x-1, x^5-3x^4-3x^3-x^2, x^6-2x^5-6x^4-4x^3-x^2)\,,\\
&5 = (x^4+x^3+2x^2+2x+1, 0, 3x^4-x^5+3x^3+x^2)\,,\ 6 = (0, 1, 1)\,,
\end{aligned}
$$

$7 = (x^5+3x^4+x^3-2x^2-x,\ x^4+x^3+2x^2+2x+1,\ x^5+3x^4+x^3-2x^2-x)$,
$8 = (x^4+2x^3-x^2-x,\ x^4+x^3+2x^2+2x+1,\ x^5+3x^4+x^3-2x^2-x)$,
$9 = (1, 0, 0)$,
$10 = (x^6-x^7+10x^5+5x^4-4x^3-4x^2-x,\ x^7-x^8+4x^5-4x^3+x^2+2x+1,$
$x^8-6x^7+6x^6+21x^5-4x^4-17x^3-4x^2+3x+2)$,
$11 = (5x^7-2x^8-x^6-13x^5+x^4+5x^3-6x^2-9x-3,\ x^6-4x^5+x^4+x^3-8x^2-7x-2$
$6x^7-2x^8-2x^6-16x^5+x^4+6x^3-11x^2-12x-4)$, $12 = (0, 1, 0)$,

kde pro x platí $x^9-2x^8-x^7+7x^6+x^5-5x^4+x^3+6x^2+4x+1 = 0$; $x_1 \in (-2, -1)$.

1 : 6, 5, 7 .... C^1	*5 : 1, 7, 8* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 4, 7, 10 ...... B^1	*6 : 1, 4, 8* .... B^2	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 8, 11 ...... B^2	*7 : 1, 2, 5* .... C^2	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 2, 3, 6 .... B^2	*8 : 3, 5, 6* .... B^3	*12 : 9, 10, 11* .... D

42. Typ $B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 348, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (2, x-xy+2, 2)$,
$2 = (0, 1, 0)$,
$3 = (1, 1, 1)$,
$4 = (1-y-xy, 2+x-xy, 2)$,
$5 = (1, 1, 0)$,
$6 = (x+y+1, 2, 2)$,
$7 = (0, xy-2y+3x-4, 2)$,
$8 = (xy+2x-y-1, xy-2y+3x-4, 2)$,
$9 = (1, 0, 0)$,
$10 = (xy+2x+2y+4, xy+3x+3y+5, 2)$,
$11 = (xy+2x-y-1, 5x+2xy-3y-5, 2)$,
$12 = (0, 0, 1)$,

kde pro x, y platí $x^2-2 = 0$, $y^2-3 = 0$.

1 : 5, 7, 8 .... C^1	*5 : 1, 6, 8* .... C^1	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 4, 6, 10 ...... B^2	*6 : 2, 5, 7* .... B^2	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 8, 11 ...... B^2	*7 : 1, 4, 6* .... B^2	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 2, 3, 7 .... B^3	*8 : 1, 3, 5* .... C^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

43. Typ $B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 468, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $2 = (x+1, 1, 1)$, $3 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$,
$4 = (5x^4+8x^3-x^2-4x,\ x^4+11x^3+x^2-4x+1,\ 5x^4+8x^3-x^2-4x)$,
$5 = (5x^4+8x^3-x^2-4x,\ x^4+11x^3+x^2-4x+1,\ 5x^3+3x^2-4x)$, $6 = (1, 1, 0)$,
$7 = (5x^4+13x^3+7x^2-5x-4,\ 5x^3+8x^2-x-4,\ x^4+3x^3-x^2-7x-5)$,

$$\mathit{8} = (5x^4+13x^3+7x^2-5x-4,\ 0,\ x^4+3x^3-x^2-7x-5)\ ,\quad \mathit{9} = (0,\ 1,\ 0)\ ,$$

$$\mathit{10} = (x^7+4x^6+15x^5+21x^4+11x^3-3x^2-9x-5,\ 5x^3+8x^2-x-4,$$
$$x^4+3x^3-x^2-7x-5)\ ,$$

$$\mathit{11} = (-x^5-2x^4+4x^3+x^2-5x-1,\ 5x^3+3x^2-4x,$$
$$-x^7-x^6-5x^5+11x^4+21x^3-x^2-9x+2)\ ,$$

kde pro x platí $x^8+3x^7+10x^6+6x^5-10x^4-8x^3+3x^2+x-1 = 0$; $x_1 \in (-1, 0)$; $x_2 \in (0, 1)$.

1 : *5, 7, 8* .... C^1	*5* : *1, 3, 8* .... C^2	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *4, 6, 10* ...... B^2	*6* : *2, 7, 8* .... B^2	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *4, 5, 11* ...... B^2	*7* : *1, 4, 6* .... B^2	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *2, 3, 7* .... B^3	*8* : *1, 5, 6* .... C^1	*12* : *9, 10, 11* .... D

44. Typ $B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 506, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\7\ 8\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}\ .$$

$$\mathit{1} = (1,\ a,\ 1)\ ,\qquad \mathit{7} = (4a-a^2-2,\ a^2-3a+2,\ 1)\ ,$$
$$\mathit{2} = (0,\ 1,\ 0)\ ,\qquad \mathit{8} = (2a^2-7a+3,\ a^2-3a+2,\ 1)\ ,$$
$$\mathit{3} = (1,\ 1,\ 1)\ ,\qquad \mathit{9} = (1,\ 0,\ 0)\ ,$$
$$\mathit{4} = (1,\ a^2-2a,\ a-2)\ ,\qquad \mathit{10} = (3a^2-11a+4,\ a^2-4a,\ -1)\ ,$$
$$\mathit{5} = (1,\ 1,\ 0)\ ,\qquad \mathit{11} = (a-1,\ 2a-1,\ a)\ ,$$
$$\mathit{6} = (0,\ 1,\ 1)\ ,\qquad \mathit{12} = (0,\ 0,\ 1)\ ,$$

kde pro a platí $a^3-4a^2+3a-1 = 0$; $a_1 \in (3, 4)$.

1 : *5, 6, 7* .... C^1	*5* : *1, 4, 8* .... B^2	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *4, 8, 10* ...... B^3	*6* : *1, 4, 7* .... C^1	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *7, 8, 11* ...... B^2	*7* : *1, 3, 6* .... C^2	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *2, 5, 6* .... B^2	*8* : *2, 3, 5* .... B^2	*12* : *9, 10, 11* .... D

Tato konfigurace není čistá, neboť body *1*, *6*, *7* leží na přímce.

45. Typ $B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 567, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\7\ 8\ 6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}\ .$$

$$\mathit{1} = (1,\ 2-x^3-x,\ 1)\ ,\qquad \mathit{7} = (x^3-1,\ x^3+x-2,\ x^4+x^3+x^2-1)\ ,$$
$$\mathit{2} = (0,\ 1,\ 0)\ ,\qquad \mathit{8} = (1,\ 2-x-x^3,\ 1-x^4-x^3-x^2)\ ,$$
$$\mathit{3} = (1,\ 1,\ 1)\ ,\qquad \mathit{9} = (1,\ 0,\ 0)\ ,$$
$$\mathit{4} = (1-x^3,\ 2-x^3-x,\ 1)\ ,\qquad \mathit{10} = (x^4+x^2-x+1,\ x^4+x^2-2x+2,\ 1-x)\ ,$$
$$\mathit{5} = (1,\ 1,\ 0)\ ,\qquad \mathit{11} = (1,\ x^5-x^2-x+2,\ 1-x^4-x^3-x^2)\ ,$$
$$\mathit{6} = (0,\ 1,\ 1)\ ,\qquad \mathit{12} = (0,\ 0,\ 1)\ ,$$

kde pro x platí $x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+1 = 0$.

$1: 5, 6, 7$ .... C^1	$5: 1, 7, 8$ .... C^1	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 4, 7, 10$ ...... B^2	$6: 1, 4, 8$ .... B^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 4, 8, 11$ ...... B^3	$7: 1, 2, 5$ .... C^2	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 2, 3, 6$ .... B^2	$8: 3, 5, 6$ .... B^2	$12: 9, 10, 11$ .... D

46. Typ $B_3^2B_2^4C_4^1C_1^2D_2$, schema 402, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\6&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (2b^2-9b+8, 2b^2-8b+6, 2b^2-9b+8)\,,\\
2 &= (2, 1, 1)\,, & 5 &= (4b^2-18b+16, 4b^2-16b+12, 2b^2-9b+8)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 10 &= (2b^3-4b^2-12b+16, 2b^3-8b^2+6b, 2b^3-9b^2+8b)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (9b^2-38b+32, 5b^2-20b+16, 4b^2-18b+16)\,,\\
7 &= (2, 1, b)\,, & 8 &= (2, 0, b)\,,\\
9 &= (0, 1, 0)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro b platí $8b^4-61b^3+160b^2-168b+64 = 0$.

$1: 5, 7, 8$ .... B^2	$5: 1, 3, 6$ .... B^4	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 4, 8, 10$ ...... C^1	$6: 4, 5, 7$ .... B^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 5, 7, 11$ ...... B^2	$7: 1, 3, 6$ .... B^4	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 2, 6, 8$ .... C^1	$8: 1, 2, 4$ .... C^2	$12: 9, 10, 11$ .... D

47. Typ $B_2^2B_1^3B_2^4C_2^1C_3^2D_2$, schema 193, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\6&8&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (a-a^3, a-a^3, 1)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 8 &= (a^2-a^4, a^2-a^3+2a-1, a)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\
4 &= (a, 1, 0)\,, & 5 &= (a, a^5-a^6+4a^4-3a^3+5a-2, 1)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 10 &= (a+a^4, a+a^2, 1)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (1-a+a^3, a+a^2, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $a^7-2a^6-2a^5+4a^4-2a^3-2a^2+3a-1 = 0$; $a_1 \in (2, 3)$.

$1: 5, 7, 8$ .... B^2	$5: 1, 3, 4$ .... C^2	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 7, 8, 10$ ...... B^3	$6: 4, 7, 8$ .... B^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 4, 5, 11$ ...... C^2	$7: 1, 2, 6$ .... B^4	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 3, 5, 6$ .... C^2	$8: 1, 2, 6$ .... B^4	$12: 9, 10, 11$ .... D

48. Typ $B_2^1B_5^2C_2^1D_2E_1^2$, schema 138, t. j.

$$\frac{9}{\substack{1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8}},\quad \frac{12}{\substack{1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8}},\quad \frac{10}{\substack{3\ 4\ 6\\ 5\ 8\ 7}},\quad \frac{11}{\substack{2\ 4\ 5\\ 8\ 6\ 7}},\quad \frac{1}{\substack{2\ 10\\ 3\ 11}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (1, 1, 2)\,,\\ 2 &= (a, 1, 1)\,, & 8 &= (a, 1-2a, 2a)\,,\\ 3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\ 4 &= (a, 1, 0)\,, & 10 &= (2a, 1-a, a+1)\,,\\ 5 &= (a, 1-2a, 1)\,, & 11 &= (a+2-4a^2, 1, 2-4a^2)\,,\\ 6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,, \end{aligned}$$

kde pro a platí $4a^3-4a^2-3a+1 = 0$; $a_1 \in (-1, 0)$; $a_2 \in (0, 1)$; $a_3 \in (1, 2)$.

$1 : 5, 7, 8$ .... B^2	$5 : 1, 4, 6$ .... B^2	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 6, 7, 10$ ...... E^2	$6 : 2, 5, 8$ .... B^1	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 4, 8, 11$ ...... B^1	$7 : 1, 2, 4$ .... B^2	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 3, 5, 7$ .... B^2	$8 : 1, 3, 6$ .... B^2	$12 : 9, 10, 11$ .... D

49. Typ $B_1^1B_6^2C_2^1D_2E_1^1$, schema 401, t. j.

$$\frac{9}{\substack{1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8}},\quad \frac{12}{\substack{1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 8\ 5}},\quad \frac{10}{\substack{3\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8}},\quad \frac{11}{\substack{2\ 5\ 6\\ 4\ 8\ 7}},\quad \frac{1}{\substack{2\ 10\\ 3\ 11}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 1, 1)\,, & 5 &= (a, 3a, 1)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\ 2 &= (a, 1, 1)\,, & 6 &= (1, 1, 0)\,, & 10 &= (2, 3, 1)\,,\\ 3 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (a, 1, -a)\,, & 11 &= (3a, 6a-1, 1)\,,\\ 4 &= (1, 3, 1)\,, & 8 &= (1, 0, -1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,, \end{aligned}$$

kde pro a platí $3a^2-2a+1 = 0$.

$1 : 5, 7, 8$ .... B^2	$5 : 1, 3, 6$ .... B^2	$9 : 10, 11, 12$ ... D
$2 : 6, 8, 10$ ...... E^1	$6 : 2, 4, 5$ .... B^1	$10 : 2, 9, 12$ ..... C^1
$3 : 5, 7, 11$ ...... B^2	$7 : 1, 3, 4$ .... B^2	$11 : 3, 9, 12$ ..... C^1
$4 : 6, 7, 8$ .... B^2	$8 : 1, 2, 4$ .... B^2	$12 : 9, 10, 11$ .... D

50. Typ $B_1^1B_3^2B_1^3B_2^4C_2^1D_2E_1^2$, schema 350, t. j.

$$\frac{9}{\substack{1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8}},\quad \frac{12}{\substack{1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 5\ 8}},\quad \frac{10}{\substack{3\ 4\ 5\\ 7\ 6\ 8}},\quad \frac{11}{\substack{2\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8}},\quad \frac{1}{\substack{2\ 10\\ 3\ 11}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (2, tx-t+2, 2)\,, & 7 &= (0, t+2-tx, 2)\,,\\ 2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (4t+6-2x-3tx, t+2-tx, 2)\,,\\ 3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\ 4 &= (tx-2t+2, tx-t+2, 2)\,, & 10 &= (t-x-tx+4, tx+x-2t, 2)\,,\\ 5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (tx-2t+2, 4-t, 2)\,,\\ 6 &= (tx+2x-2t-2, 2, 2)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,, \end{aligned}$$

kde pro t, x platí $x^2-x-t = 0$; $t^2-2 = 0$.

$1:5,7,8 \ldots\ldots\ B^2$	$5:1,4,6 \ldots\ldots\ B^4$	$9:10,11,12 \ldots\ D$
$2:6,8,10 \ldots\ldots\ B^1$	$6:2,5,7 \ldots\ldots\ B^2$	$10:2,9,12 \ldots\ C^1$
$3:4,8,11 \ldots\ldots\ B^2$	$7:1,4,6 \ldots\ldots\ B^4$	$11:3,9,12 \ldots\ C^1$
$4:3,5,7 \ldots\ldots\ B^3$	$8:1,2,3 \ldots\ldots\ E^2$	$12:9,10,11 \ldots\ D$

51. Typ $B_1^1B_3^2B_1^3B_2^4C_2^1D_2E_1^2$, schema 382, t. j.

$$\frac{9}{\substack{1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8}}, \quad \frac{12}{\substack{1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 5\ 8}}, \quad \frac{10}{\substack{3\ 4\ 5\\ 8\ 6\ 7}}, \quad \frac{11}{\substack{2\ 4\ 5\\ 6\ 7\ 8}}, \quad \frac{1}{\substack{2\ 10\\ 3\ 11}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (c-c^2, 1, c-c^2)\,, & 7 &= (0, 1, c)\,,\\
2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (2c^2-c^3-c+1, 1, c)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (2c^2-c^3-c+1, 1, c-c^2)\,, & 10 &= (c^3-c^2+c-1, c^3-c^2+c-2, -c)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (c-c^2, 1-c, 1)\,,\\
6 &= (c-c^2, 1, 0)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro c platí $c^5-2c^4+3c^3-4c^2+2c-1 = 0$; $c_1 \in (1, 2)$.

$1:5,7,8 \ldots\ldots\ B^4$	$5:1,4,6 \ldots\ldots\ B^2$	$9:10,11,12 \ldots\ D$
$2:4,8,10 \ldots\ldots\ B^3$	$6:5,7,8 \ldots\ldots\ B^4$	$10:2,9,12 \ldots\ C^1$
$3:4,7,11 \ldots\ldots\ E^2$	$7:1,3,6 \ldots\ldots\ B^2$	$11:3,9,12 \ldots\ C^1$
$4:2,3,5 \ldots\ldots\ B^1$	$8:1,2,6 \ldots\ldots\ B^2$	$12:9,10,11 \ldots\ D$

52. Typ $B_2^1B_6^2C_2^1D_2$, schema 450, t. j.

$$\frac{9}{\substack{1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8}}, \quad \frac{12}{\substack{1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 8\ 5}}, \quad \frac{10}{\substack{3\ 4\ 5\\ 7\ 6\ 8}}, \quad \frac{11}{\substack{2\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8}}, \quad \frac{1}{\substack{2\ 10\\ 3\ 11}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (a^2-3a+5, 3-2a, a^2-3a+5)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 5 &= (a^3-3a^2+5a, 3a-2a^2, a^2-3a+5)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (a^3+a^2-a, a^2+a-1, a^3-4a^2+8a-5)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 8 &= (a^3+a^2-a, 0, a^3-4a^2+8a-5)\,,\\
9 &= (0, 1, 0)\,, & 10 &= (a^3-a^2+4a-3, a^2+a-1, a^3-4a^2+8a-5)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (a^3-2a^2+5a-5, 2a-3, a^3-5a^2+9a-7)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $a^5-8a^4+21a^3-29a^2+19a-5 = 0$; $a_1 \in (4, 5)$.

$1:5,7,8 \ldots\ldots\ B^2$	$5:1,3,6 \ldots\ldots\ B^2$	$9:10,11,12 \ldots\ D$
$2:6,8,10 \ldots\ldots\ B^2$	$6:2,5,7 \ldots\ldots\ B^1$	$10:2,9,12 \ldots\ C^1$
$3:4,5,11 \ldots\ldots\ B^2$	$7:1,4,6 \ldots\ldots\ B^2$	$11:3,9,12 \ldots\ C^1$
$4:3,7,8 \ldots\ldots\ B^1$	$8:1,2,4 \ldots\ldots\ B^2$	$12:9,10,11 \ldots\ D$

53. Typ $B_1^1 B_6^2 B_1^3 C_2^1 D_2$, schema 107, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\ 8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 0, 0)\,, && 5 = (3a^2-a,\ a^3-a^2+5a-3,\ 3a-1)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 8 = (3a^2-a,\ a^3-a^2+5a-3,\ -a^2+9a-5)\,,\\
&3 = (1, 1, 1)\,, && 7 = (3a^2-a,\ 3a^2-a,\ -a^2+9a-5)\,,\\
&4 = (a, 1, 0)\,, && 10 = (a^4+a^3+a^2+2a-2,\ a^3-a^2+5a-3,\ a^4+a^3-3a^2+12a-7),\\
&6 = (1, 0, 1)\,, && 11 = (3a^3-5a^2+10a-5,\ a^3-a^2+5a-3,\ a^4+a^3-3a^2+12a-7),\\
&9 = (0, 1, 0)\,, && 12 = (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $a^5-2a^3+11a^2-14a+5 = 0$; $a_1 \in (-3, -2)$.

1 : 5, 7, 8 .... B^2	*5 : 1, 3, 6* .... B^2	*9 : 10, 11, 12* .... D
2 : 6, 7, 10 ...... B^2	*6 : 2, 4, 5* .... B^1	*10 : 2, 9, 12* ...... C^1
3 : 5, 8, 11 ...... B^3	*7 : 1, 2, 4* .... B^2	*11 : 3, 9, 12* ...... C^1
4 : 6, 7, 8 .... B^2	*8 : 1, 3, 4* .... B^2	*12 : 9, 10, 11* ..... D

54. Typ $B_1^1 B_5^2 B_2^4 C_2^1 D_2$, schema 453, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\ 7\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\ 6\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 2 = (2c^7-c^8-c^6-c^5+2c^4-2c+3,\ 1,\ 1)\,,\\
&3 = (1, 0, 0)\,, && 4 = (1,\ -c^7-c^4-c^3+c^2+c-1,\ 1)\,,\\
&6 = (1, 1, 0)\,, && 5 = (2c^7-c^8-c^6-c^5+2c^4-2c+3,\ c,\ 1)\,,\\
&8 = (c^2-c+1, 0, 1)\,, && 7 = (c^2-c+1,\ c^6-c^7-c^5-c^4+c^3,\ 1)\,,\\
&9 = (0, 1, 0)\,, && 10 = (c^6-c^5+2c^3-c^2-c+2,\ c^6-c^7-c^5-c^4+c^3,\ 1)\,,\\
&12 = (0, 0, 1)\,, && 11 = (2c^7-c^8-c^6-c^5+c^4+c^2-2c+2,\ c^2-c^4,\ 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro c platí $c^9-2c^8+2c^7-c^5+c^3+c^2-2c+1 = 0$; $c_1 \in (-1, 0)$.

1 : 5, 7, 8 .... B^4	*5 : 1, 3, 6* .... B^2	*9 : 10, 11, 12* ... D
2 : 4, 8, 10 ...... B^1	*6 : 5, 7, 8* .... B^4	*10 : 2, 9, 12* ..... C^1
3 : 4, 5, 11 ...... B^2	*7 : 1, 4, 6* .... B^2	*11 : 3, 9, 12* ..... C^1
4 : 2, 3, 7 .... B^2	*8 : 1, 2, 6* .... B^2	*12 : 9, 10, 11* .... D

55. Typ $B_3^2 B_5^3 C_2^1 D_2$, schema 228, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\;2\;3\;7\\4\;5\;6\;8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\;2\;3\;5\\6\;7\;4\;8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\;4\;6\\5\;7\;8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\;4\;5\\8\;6\;7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 7 &= (2, 2-2x-2bx, 3+b-x-bx)\,,\\
2 &= (2, 2, 3+b-x-bx)\,, & 8 &= (2b, 2-2x-2bx, 3+b-x-bx)\,,\\
3 &= (0, 0, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (0, 1, 1)\,, & 10 &= (2b, 2, 3b-bx+x+1)\,,\\
5 &= (2b, 2, 3+b-x-bx)\,, & 11 &= (b+1, 2-x-bx, 3+b-x-bx)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro b, x platí $b^2+2bx-x = 0$, $x^2+1 = 0$.

$1: 5, 7, 8$ .... B^3	$5: 1, 4, 6$ .... B^3	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 4, 6, 10$ ...... B^3	$6: 2, 5, 7$ .... B^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 7, 8, 11$ ...... B^2	$7: 1, 3, 6$ .... B^3	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 2, 5, 8$ .... B^2	$8: 1, 3, 4$ .... B^3	$12: 9, 10, 11$ .... D

56. Typ $B_3^2 B_5^3 C_2^1 D_2$, schema 248, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\;2\;3\;7\\4\;5\;6\;8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\;2\;3\;5\\6\;7\;4\;8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\;4\;6\\7\;5\;8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\;4\;5\\8\;6\;7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 7 &= (1, a^2-2a, a)\,,\\
2 &= (1, 1, a)\,, & 8 &= (-a^2+4a-2, a^2-2a, a)\,,\\
3 &= (0, 0, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (0, 1, 1)\,, & 10 &= (1, a^2-2a, a^2-3a+3)\,,\\
5 &= (-a^2+4a-2, 1, a)\,, & 11 &= (-a^2+4a-1, a^2-2a+1, 2a)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro a platí $a^3-7a^2+13a-5 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$; $a_2 \in (2, 3)$; $a_3 \in (4, 5)$.

$1: 5, 7, 8$ .... B^3	$5: 1, 3, 6$ .... B^3	$9: 10, 11, 12$ ... D
$2: 4, 6, 10$ ...... B^3	$6: 2, 5, 7$ .... B^2	$10: 2, 9, 12$ ..... C^1
$3: 5, 8, 11$ ...... B^2	$7: 1, 4, 6$ .... B^3	$11: 3, 9, 12$ ..... C^1
$4: 2, 7, 8$ .... B^2	$8: 1, 3, 4$ .... B^3	$12: 9, 10, 11$ .... D

57. **Typ** $B_3^2 B_5^3 C_2^1 D_2$, schema 318, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 5\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\4\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 6\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$1 = (a, 1, a)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 1)$,
$4 = (a^5-5a^4+7a^3-4a^2+2a+1, 2, 2a)$, $5 = (1, 1, 0)$, $6 = (a, 1, 1)$,
$7 = (0, 2a^5-9a^4+14a^3-17a^2+9a-5, 2)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$8 = (a^5-4a^4+4a^3-2a^2-a+1, 2a^5-9a^4+14a^3-17a^2+9a-5, 2)$,
$10 = (2a^5-8a^4+9a^3-7a^2+1, 3a^5-13a^4+19a^3-22a^2+10a-5, 2)$,
$11 = (a^5-4a^4+4a^3-2a^2-a+1, 3a^5-13a^4+18a^3-19a^2+8a-4)$,
$12 = (0, 0, 1)$,

kde pro a platí $a^6-4a^5+5a^4-6a^3+2a^2-2a-1 = 0$; $a_1 \in (-1, 0)$; $a_2 \in (2, 3)$.

1 : *5, 7, 8* .... B^3	*5* : *1, 4, 6* .... B^3	*9* : *10, 11, 12* ... D
2 : *4, 6, 10* ...... B^2	*6* : *2, 5, 8* .... B^3	*10* : *2, 9, 12* ..... C^1
3 : *7, 8, 11* ...... B^2	*7* : *1, 3, 4* .... B^3	*11* : *3, 9, 12* ..... C^1
4 : *2, 5, 7* .... B^2	*8* : *1, 3, 6* .... B^3	*12* : *9, 10, 11* .... D

Zbývá ještě provést důkaz, že všechna tato schemata jsou navzájem různá. K tomu nám pomáhá věta:

Věta 6. *Jsou-li dvě schemata různého typu, nemohou být ekvivalentní.*

Snadný důkaz této věty nebudu provádět.

Ukažme nyní na příkladě, jak této věty použijeme. Stačí především zkoumat schemata stejného typu. Tak na př. schemata 230 a 310, která jsou uvedena s pořadovými čísly 25 a 26, jsou obě typu $B_1^1 B_3^3 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^1$. V obou je jen jeden bod typu B^1 (u obou je to bod *2*). Musí tedy hledaná permutace být taková, aby bod *2* z jednoho schematu přešel opět na bod *2* schematu druhého, což stručně zapíšeme (*2 2*). Podobně vzhledem k bodům C^2, E^1 vidíme, že musí platit (*6 6*) a (*8 8*). Přímka *6—8—11* přechází tedy ze schematu 230 opět na přímku *6—8—11* schematu 310, čili musí platit také (*11 11*). Protože také přímka *2—4—11* musí přejít na přímku *2—4—11*, platí také (*4 4*). Pak ale přímka *4—8—10* ze schematu 230 by musela přejít na přímku *4—8—12* ve schematu 310, čili (*10 12*), ale to není možné, neboť bod *10* je C-bod a bod *12* je D-bod. Neexistuje tudíž permutace čísel 1, 2, 3, ..., 12, kterou by přecházelo schema 230 na schema 310 a tato schemata jsou tedy různá.

Zcela obdobné důkazy jsem provedl u všech schemat stejného typu a vždy se ukázalo, že jsou navzájem různá. Tyto výpočty již provádět nebudu. Chtěl bych jen ještě poznamenat, že při provádění takovýchto důkazů lze s výhodou použít ještě dalšího zjemňování. Tak na př. poznáme ihned, že schemata 357 a 507 (uvedená s pořadovými čísly 29 a 30) nemohou být ekvivalentní (ačkoliv jsou stejného typu), protože v prvém z nich je jediný C^2-bod oddělen od bodů *1, 4, 5*, což jsou (postupně) body C^1, B^2, C^1, kdežto v druhém schematu je jediný C^2-bod oddělen od bodů *5, 6, 7*, což jsou body C^1, C^1, E^2. Dalšího zjemnění můžeme dosáhnout třeba u bodů B^2, uvážíme-li, že je v konfiguraci (která aspoň jeden bod typu B^2 obsahuje) právě jediný bod, který je různý od tohoto B^2-bodu i od bodů, od kterých je tento B^2-bod oddělen a který neleží na žádné přímce z trojice uvedené ve větě 5. Jak by se tohoto poznatku dalo použít, je již jasné. Dalším zjemňováním se již zabývat nebudu, protože zjemnění, kterých jsme užili (a popsali zde i v úmluvách 1, 2), v našich případech zcela postačí.

Čtenář si zřejmě také povšiml, že u schemat 402, 193, 350, 382 a 453 (uvedených s pořadovými čísly 46, 47, 50, 51 a 54) existují vždy dva body, které jsou odděleny od téže trojice bodů. Oba tyto body jsou typu B^4 a není to náhodné, neboť platí věta:

Věta 7. *Nutná a postačující podmínka, aby dva body byly odděleny od téže trojice bodů je: Oba tyto body jsou typu B^4.*

Poměrně snadný důkaz této věty ponechávám opět čtenáři.

IV. Závěr

Přijmeme-li definici ekvivalence konfigurací (viz kapitolu I), vidíme, že *existuje* **57 konfigurací** $(12_4, 16_3)$, *které obsahují aspoň jeden bod typu D; dají se realisovat body a přímkami nad tělesem komplexních čísel.* Jsou to:

Poř. číslo	Třída	Typ	Řešení[9])	Poznámka
1	$C_7D_4E_1$	$C_6^1C_1^2D_4E_1^2$	∞^1	Jediný typ bez B-bodů.
2	$B_1C_7D_4$	$B_1^2C_4^1C_3^2D_4$	(1,2)	První dva typy jsou jediné
3	$B_1C_8D_2E_1$	$B_1^2C_4^1C_4^2D_2E_1^2$	(0,2)	s více než dvěma D-body.
4	$B_2C_8D_2$	$B_2^1C_4^1C_4^2D_2$	(0,4)	
5		$B_1^1B_1^2C_4^1C_4^2D_2$	(2,4)	
6			(0,6)	
7			(2,2)	
8			(0,4)	
9		$B_2^2C_6^1C_2^2D_2$	(2,0)	
10			(0,4)	
11			(2,2)	Konfigurace není čistá.
12			(2,2)	

[9]) Ve čtvrtém sloupci nadepsaném „Řešení" uvádím, kolika možnými způsoby je daná konfigurace řešitelná. První číslo v závorce (i, j) uvádí počet reálných řešení, druhé pak počet řešení imaginárních.

Poř. číslo	Třída	Typ	Řešení[9])	Poznámka
13			(0,4)	
14			(1,2)	
15		$B_2^2C_4^1C_4^2D_2$	(1,4)	
16			(1,2)	
17			(2,2)	
18	$B_3C_5D_2E_2$	$B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$	(1,0)	Tyto tři konfigurace jsou
19		$B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_2^2$	(1,0)	jediné, které obsahují dva
20		$B_2^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$	(0,2)	E-body.
21	$B_4C_5D_2E_1$	$B_4^1C_4^1C_1^2D_2E_1^2$	(0,4)	
22		$B_3^1B_1^2C_2^1C_3^2D_2E_1^1$	(0,4)	
23		$B_2^1B_2^2C_4^1C_1^2D_2E_1^2$	(0,8)	
24		$B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$	(0,4)	
25			(1,2)	
26			(0,2)	
27		$B_1^1B_3^2C_2^1C_3^2D_2E_1^2$	(2,6)	
28		$B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$	(0,2)	
29		$B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^2$	(2,2)	
30			(0,2)	
31		$B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^1$	(1,2)	
32			(0,6)	
33		$B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^2$	(1,4)	
34			(1,2)	
35	$B_5C_5D_2$	$B_2^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2$	(0,6)	
36			(1,8)	
37			(1,6)	
38		$B_1^1B_4^2C_4^1C_1^2D_2$	(2,8)	
39		$B_1^1B_4^2C_2^1C_3^2D_2$	(1,8)	
40		$B_1^1B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$	(1,4)	
41			(1,8)	
42		$B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$	(4,0)	
43			(2,6)	
44			(1,2)	
45			(0,6)	
46		$B_3^2B_2^4C_4^1C_1^2D_2$	(0,4)	
47		$B_2^2B_1^3B_2^4C_2^1C_3^2D_2$	(1,6)	
48	$B_7C_2D_2E_1$	$B_2^1B_5^2C_2^1D_2E_1^2$	(3,0)	
49		$B_1^1B_6^2C_2^1D_2E_1^1$	(0,2)	
50		$B_1^1B_3^2B_1^3B_2^4C_2^1D_2E_1^2$	(2,2)	
51			(1,4)	
52	$B_8C_2D_2$	$B_2^1B_6^2C_2^1D_2$	(1,4)	
53		$B_1^1B_6^2B_1^3C_2^1D_2$	(1,4)	
54		$B_1^1B_5^2B_2^4C_2^1D_2$	(1,8)	
55		$B_3^2B_5^3C_2^1D_2$	(0,4)	
56			(3,0)	
57			(2,4)	

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský:* Über eine ebene Konfiguration (12_4, 16_3), Věstník Král. české spol. nauk, 1939.

[2] *J. de Vries:* Über gewisse ebene Konfigurationen, Acta matematica, *12*, 1889, 67.

[3] *O. Hesse:* Über Curven dritter Ordnung ..., J. f. reine u. angew. Math. *36*, 1848, 156—176. — Sebrané spisy, str. 155 a n.

[4] *O. Hesse:* Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem, J. f. reine u. angew. Math. *41*, 1851, 270. — Sebrané spisy (Mnichov 1897), str. 254.

[5] *G. Salmon* (něm. překlad W. Fiedler): Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 1873, čl. 151, 152.

[6] *Th. Reye:* Konstruktion der Konfigurationen, Acta Math. *1*, 1882, str. 97 a n.

[7] *Th. Reye:* Geometrie der Lage, 3. B., 1910, str. 234 a n.

[8] *H. Schroeter:* Über ebene Konfigurationen, J. f. reine u. angew. Math. *108*, 1891, str. 297.

[9] *M. Zacharias:* Untersuchungen über ebene Konfigurationen (12_4, 16_3), Deutsche Mathematik, *6*, čís. 2 a 3.

[10] *J. Metelka:* O jistých konfiguracích (12_4, 16_3) v rovině, Věstník Král. české spol. nauk, 1944.

[11] *B. Bydžovský:* Poznámky k theorii konfigurace (12_4, 16_3), Časopis pro pěst. mat. *74*, 1950. (Zprávy ze spol. sjezdu matematiků čsl. a polských.)

[12] *B. Bydžovský:* O dvou nových konfiguracích (12_4, 16_3), Časopis pro pěst. mat. *79*, 1954.

[13] *J. Metelka:* O rovinných konfiguracích (12_4, 16_3), Časopis pro pěst. mat. *80*, 1955, 133 a n.

[14] *F. Levi:* Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929.

[15] *V. Metelka:* O jistých rovinných konfiguracích (12_4, 16_3), které obsahují aspoň jeden bod typu *D*, Časopis pro pěst. mat. *80*, 1955, 146 a n.

Резюме

ПЛОСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ (12_4, 16_3), СОДЕРЖАЩИЕ ХОТЯ БЫ ОДНУ *D*-ТОЧКУ

ВАЦЛАВ МЕТЕЛКА (Václav Metelka), Либерец.

(Поступило в редакцию 18/IV 1956г.)

Вацлав Метелка разработал вместе со своим братом (Иосеф Метелка, Оломоуц) план для отыскания всех плоских конфигураций (12_4, 16_3), которые можно осуществить в проективной плоскости при помощи точек и прямых над полем комплексных чисел. Для реализации этого плана нужно было прежде всего ввести эффективный принцип для классификации плоских конфигураций $(12_4, 16_3)$, как это намечено здесь.

Обозначим двенадцать точек конфигурации цифрами *1*, *2*, *3*, ..., *12*. Точка *1* является (как и все точки конфигурации) инцидентной в точности с четырьмя прямыми конфигурации, на которых лежит — кроме точки *1* — еще дальнейших девять (напр. *5*, *6*, ..., *12*) точек конфигурации. Мы говорим, что точка *1 соединена* с этими точками (что можно кратко обозначить *1—5*, *1—6*, ..., *1—12*). От остальных трех точек конфигурации (*2*, *3*, *4*) точка *1 отделена* (*1* : *2*, *1* : *3*, *1* : *4*).

В зависимости от взаимного расположения этих трех точек (*2*, *3*, *4*) точку *1* можно отнести к одному из пяти типов. Так, например, если *2* : *3*, *2* : *4*, *3* : *4*, то скажем, что *1* является A-точкой. В случае, когда *2—3*, *2* : *4*, *3* : *4*, мы скажем, что *1* является D-точкой. Нет нужды рассматривать дальнейшие возможности взаимного расположения точек *2*, *3*, *4*, так как для дальнейших объяснений вполне достаточно этих двух типов.

Брат автора отыскал в своей статье (И. Метелка, [13]) все конфигурации $(12_4, 16_3)$, содержащие хотя бы одну A-точку. Этим самым была исчерпана первая часть программы.

Работа же Вацлава Метелки выполняет вторую часть этой программы, так как в ней отысканы все возможные плоские конфигурации $(12_4, 16_3)$, содержащие хотя бы одну D-точку.

Здесь *автор доказал, что имеется ровно* 57 *конфигураций*, причем в его работе приводятся не только все схемы инцидентностей (т. е. схемы, показывающие способ соединения точек конфигурации), но и вычисление координат точек конфигурации.

Далее в его работе доказывается, что все эти конфигурации отличны друг от друга (по определению эквивалентных конфигураций), другими словами, что не существует перестановка чисел 1, 2, ..., 12, которая переводила бы точки одной схемы инцидентности в точки другой схемы.

Так как классификация конфигураций по числу точек типа A, D, ..., и т. д. оказалась еще недостаточной, в этой работе была проведена классификация, несколько более сложная, но зато значительно более контрастная, чем исходная классификация.

В заключительной главе этой работы конфигурации расположены в соответствии с этой новой классификацией с указанием, какие из них можно осуществить в проективной плоскости над полем комплексных (соотв. действительных) чисел; указано и число возможных способов осуществления.

Все эти конфигурации являются новыми и не были до сих пор опубликованы.

Zusammenfassung

ÜBER EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, DIE MINDESTENS EINEN D-PUNKT ENTHALTEN

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Eingelangt am 18. April 1956.)

Der Autor hat mit seinem Bruder JOSEF METELKA (Olomouc) einen Plan auf die Entdeckung aller Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ entworfen, die in einer projektiven Ebene mit Punkten und Geraden oberhalb des Körpers der komplexen Zahlen realisiert werden können. Zur Verwirklichung dieses Planes war es vor allem notwendig, ein wirksames Ordnungsprinzip der ebenen Konfigurationen, wie hier angegeben, einzuführen:

Zwölf Konfigurationspunkte seien mit Nummern *1, 2, ..., 12* bezeichnet. Der Punkt *1* ist (wie jeder Konfigurationspunkt) mit eben vier Konfigurationsgeraden inzident, auf welchen — mit Ausnahme von Punkt *1* — noch weitere neun (z. B. *5, 6, ..., 12*) Konfigurationspunkte liegen. Man sagt, dass der Punkt *1* mit diesen Punkten verbunden ist (was man kurz *1—5, 1—6, ..., 1—12* bezeichnet). Von den übrigen drei Konfigurationspunkten (*2, 3, 4*) ist der Punkt *1* abgetrennt (*1 : 2, 1 : 3. 1 : 4*).

Je nach der gegenseitigen Stellung dieser drei Punkte (*2, 3, 4*) können wir den Punkt *1* in einen von fünf Typen einreihen. So zum Beispiel, gilt es *2 : 3, 2 : 4, 3 : 4*, so sagen wir, dass *1* der A-Punkt ist. Im Falle, dass *2—3, 2 : 4, 3 : 4*, sagen wir, dass *1* der D-Punkt ist. Weitere Möglichkeiten gegenseitiger Stellung der Punkte *2, 3, 4* braucht man nicht anzuführen, weil für weitere Erörterung die zwei gegebenen Typen vollkommen genügen.

Der Bruder des Autors hat in seiner Arbeit [13] alle Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ entdeckt, die wenigstens einen A-Punkt enthalten. Damit war der erste Teil des Planes erschöpft.

Die Arbeit vom Autor erfüllt dann den zweiten Teil dieses Planes, denn sie enthält alle möglichen ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, die mindestens einen D-Punkt haben.

Der Autor hat hier bewiesen, dass die *Gesamtzahl der Konfigurationen genau* 57 *beträgt*, und in seiner Arbeit sind nicht nur alle Inzidenzschemas (d. h. Schemas, die angeben, auf welche Weise die Verbindung der Konfigurationspunkte erfolgt), sondern auch die Ausrechnung der Koordinaten der Konfigurationspunkte angeführt.

Weiter ist in seiner Arbeit bewiesen, dass alle diese Konfigurationen (nach der Definition der Äquivalentkonfigurationen) voneinander verschieden sind, was bedeutet, dass keine Permutation der Nummern *1, 2, 3, ..., 12*, durch welche die Punkte eines Inzidenzschemas in ein anderes Schema übergehen könnten, vorhanden ist.

Da es sich ergab, dass die Klassifikation der Konfigurationen nach der Anzahl der Punkte des Types $A, D, \ldots$ usw. nocht nicht hinreichend ist, ist in dieser Arbeit eine — auf wesentlichere Art abgestufte — Klassifikation durchgeführt worden, die nichtsdestoweniger nur ein wenig anspruchsvoller als die ursprüngliche Klassifikation ist.

Im Schlusskapitel sind dann die Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ nach der neuen Klassifikation geordnet, und zwar mit der Angabe, welche von ihnen in der projektiven Ebene oberhalb des Körpers der komplexen, bzw. reellen Zahlen und auf wieviel mögliche Weisen realisierbar sind.

Alle diese Konfigurationen sind neu und ursprünglich und sind noch nie früher abgedruckt worden.