Miloš Ráb

Poznámka k otázce o oscilačních vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y'' + A(x)y = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 3, 342--348

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117271`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA K OTÁZCE O OSCILAČNÍCH VLASTNOSTECH ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' + A(x)\,y = 0$

MILOŠ RÁB, BRNO.

(Došlo dne 30. července 1956.) DT: 517.941.91

Autor zostřuje známé kriterium, aby rovnice $y'' + A(x)\,y = 0$ byla neoscilatorická resp. oscilatorická, a zobecňuje nedávno publikované výsledky L. D. NIKOLENKA.

1. E. GAGLIARDO ukázal [1], že postačující podmínka k tomu, aby integrály diferenciální rovnice

$$y'' + A(x)\,y = 0 \tag{1}$$

oscilovaly v intervalu $(x_0, +\infty)$ jest, aby funkce $B(x) = A(x) - \frac{1}{4x^2}$ byla nezáporná a integrál $\int^t xB(x)\,dx \to +\infty$ pro $t \to +\infty$.

L. D. NIKOLENKO odvodil [2] následující nutnou podmínku pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1), „blízkou" k Gagliardově postačující podmínce:

$$\int^t x \ln x \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4x^2}, 0\right\} dx \to +\infty \text{ pro } t \to +\infty\,. \tag{2}$$

Gagliardova postačující podmínka je však zvláštním případem obecnější věty, kterou odvodil již před tím M. ZLÁMAL [3].

Označíme-li $\log_0 x = x$, $\log_n x = \log \log_{n-1} x$; $L_0(x) = x$, $L_n(x) = L_{n-1}(x) \,.\, \log_n x$; $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [L_i(x)]^{-2}$, jest Zlámalova postačující podmínka pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1), aby

$$\int^t L_n(x) \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} dx \to +\infty \quad \text{pro } t \to +\infty\,. \tag{3}$$

Podmínku tuto odvodil Zlámal jako korolár věty, které v dalším také užijeme:

a) *Jestliže integrál* $\int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{Q(t)}$ *diverguje a jestliže existuje kladná funkce* $\omega(t)$ *mající spojitou první derivaci taková, že*

$$\int^{\infty} \frac{Q(t)}{\omega(t)} \omega'^2(t)\, \mathrm{d}t < +\infty\,, \tag{4}$$

$$\int^{x} \omega(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \to +\infty \quad \text{pro} \quad x \to +\infty\,, \tag{5}$$

pak diferenciální rovnice $(Q(x)\,y')' + f(x)\,y = 0$ *jest oscilatorická.*

Obě podmínky (2) a (3) se dají zobecnit.

Ukážeme, že postačující podmínka k tomu, aby integrály diferenciální rovnice (1) oscilovaly, jest, aby

$$\int^{t} \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} \mathrm{d}x \to +\infty \quad \text{pro} \quad t \to +\infty\,, \tag{6}$$

a nutná podmínka

$$\int^{t} L_{n+1}(x)\, \mathrm{Max} \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\,,\, 0\right\} \mathrm{d}x \to +\infty \text{ pro } t \to +\infty\,, \tag{7}$$

pro n celé nezáporné a $\varepsilon > 0$.

V případě, že $A(x)$ splňuje podmínku

$$\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left|A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right| \mathrm{d}x < +\infty\,, \tag{8}$$

lze udat pro integrály diferenciální rovnice (1) asymptotické vzorce. Dokážeme, že existuje takový fundamentální systém $y_1(x)$, $y_2(x)$ diferenciální rovnice (1), že

$$y_1(x) \sim \sqrt{L_n(x)}\,, \quad y_2(x) \sim \sqrt{L_n(x)} \log_{n+1} x\,.$$

2. Dokážeme nyní postačitelnost podmínky (6) k oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1).

Transformujme diferenciální rovnici (1) substitucí

$$s = \alpha(x)\,, \quad y(x) = \frac{u(s)}{\sqrt{\alpha'(x)}}\,,$$

kde $\alpha(x)$ značí libovolnou funkci, která má v intervalu $(x_0, +\infty)$ spojitou třetí derivaci a $\alpha'(x) > 0$.

Po snadném počtu obdržíme diferenciální rovnici pro u

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}s^2} + R(x)\, u = 0\,, \tag{9}$$

kde

$$R(x) = V(x) + \frac{A(x)}{\alpha'^2(x)}, \quad V(x) = \frac{3}{4}\frac{\alpha''(x)}{\alpha'^4(x)} - \frac{1}{2}\frac{\alpha'''(x)}{\alpha'^3(x)}. \tag{10}$$

Zvolíme-li specielně $\alpha(x) = \log_{n+1} x$, jest

$$R(x) = L_n^2(x)\left\{A(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right\}.$$

Důkaz. Předně jest $\alpha'(x) = \frac{1}{L_n(x)}$, takže stačí ukázat, že $V(x) = -\frac{1}{4}L_n^2(x)\,.$ $.\,S_n(x)$, čili (podle (10)), že

$$-\frac{1}{4}L_n'^2(x) + \frac{1}{2}L_n''(x)\,L_n(x) = -\frac{1}{4}L_n^2(x)\,S_n(x)\,. \tag{11}$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

Pro $n = 1$(11) zřejmě platí. Předpokládejme nyní platnost (11) pro $n - 1$ a dokažme platnost pro n. Poněvadž $L_n'(x) = (L_{n-1}(x)\log_n x)' = L_{n-1}'(x)\,.$ $.\log_n x + 1$, $L_n''(x) = L_{n-1}''(x)\log_n x + \frac{L_{n-1}'(x)}{L_{n-1}(x)}$, dostáváme po dosazení do levé strany (11):

$$-\frac{1}{4}L_n'^2(x) + \frac{1}{2}L_n''(x)\,L_n(x) = -\frac{1}{4}[L_{n-1}'(x)\log_n x + 1]^2 +$$
$$+\frac{1}{2}L_n(x)\left[L_{n-1}''(x)\log_n x + \frac{L_{n-1}'(x)}{L_{n-1}(x)}\right] = \log_n^2 x\left[\frac{1}{2}L_{n-1}(x)\,L_{n-1}''(x) - \frac{1}{4}L_{n-1}'^2(x)\right] -$$
$$-\frac{1}{4} = \log_n^2 x\left[-\frac{1}{4}S_{n-1}(x)\,L_{n-1}^2(x)\right] - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}L_n^2(x)\,S_{n-1}(x) - \frac{1}{4} =$$
$$= -\frac{1}{4}L_n^2(x)\left[S_{n-1}(x) - \frac{1}{L_n^2(x)}\right] = -\frac{1}{4}L_n^2(x)\,S_n(x)\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Obdrželi jsme tedy tento výsledek:

Diferenciální rovnice (1) *se transformuje substitucí*

$$s = \alpha(x)\,, \quad y = \frac{u(s)}{\sqrt{\alpha'(x)}}, \quad \text{kde} \quad \alpha(x) = \log_{n+1} x \tag{12}$$

v diferenciální rovnici

$$\frac{d^2u}{ds^2} + L_n^2(x)\left\{A(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right\}u = 0\,. \tag{13}$$

Položme nyní ve větě (a) $\omega(s) = s(\log s)^{-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, $Q(s) \equiv 1$ a aplikujme ji na diferenciální rovnici (13). Poněvadž $\omega'(s) = (\log s)^{-1-\varepsilon} - (1 + \varepsilon)\,.$ $.\,(\log s)^{-2-\varepsilon}$, jest

$$\int^{\infty} \frac{\omega'^2(s)}{\omega(s)}\,\mathrm{d}s = \int^{\infty} \frac{(\log s)^{-2-2\varepsilon} - 2(1+\varepsilon)(\log s)^{-3-2\varepsilon} + (1+\varepsilon)^2(\log s)^{-4-2\varepsilon}}{s\,(\log s)^{-1-\varepsilon}}\,\mathrm{d}s <$$

$$< 4(1+\varepsilon)^2 \int^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s\,(\log s)^{1+\varepsilon}} < +\infty\,.$$

Také podmínka (5) je splněna vzhledem k předpokladu (6), neboť

$$\int^{t} \omega(s)\, f(s)\,\mathrm{d}s = \int^{t'} \log_{n+1} x(\log\log_{n+1}x)^{-1-\varepsilon} L_n^2(x) \left\{A(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right\} \mathrm{d}(\log_{n+1} x) =$$

$$= \int^{t'} \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{A(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right\} \mathrm{d}x\,,$$

kde t' je dáno vztahem $t = \log_{n+1} t'$. Integrály diferenciální rovnice (13), a tedy též (1) oscilují v intervalu $(x_0, +\infty)$ a postačitelnost podmínky (6) je dokázána.

Než přistoupíme k vyšetření integrálů diferenciální rovnice (1) v případě neoscilatorickém, připomeňme větu [4], [5]:

Jestliže $\int^{\infty} x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, *má diferenciální rovnice* $y'' + f(x)\,y = 0$ *takový fundamentální systém, že* $y_1 \sim 1$, $y_2 \sim x$.

Aplikujeme-li tuto větu na diferenciální rovnici (13), obdržíme: jestliže

$$\int^{\infty} s L_n^2(x) \left|A(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right| \mathrm{d}s = \int^{\infty} L_{n+1}(x) \left|A(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right| \mathrm{d}x < +\infty\,,$$

má diferenciální rovnice (13) fundamentální systém $u_1 \sim 1$, $u_2 \sim s$, a tedy diferenciální rovnice (1) vzhledem k (12) fundamentální systém

$$y_1 \sim \sqrt{L_n(x)}\,, \qquad y_2 \sim \sqrt{L_n(x)}\log_{n+1} x\,,$$

takže je zřejmě neoscilatorická.

Abychom dokázali podmínku (7), nutnou pro oscilaci, položme $B(x) = \mathrm{Max}\left\{A(x)\,, \frac{1}{4}S_n(x)\right\}$. Jestliže

$$\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left|B(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right| \mathrm{d}x = \int^{\infty} L_{n+1}(x)\,\mathrm{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\,, 0\right\} \mathrm{d}x < +\infty$$

dle (8), jest diferenciální rovnice $y'' + B(x)\,y = 0$ neoscilatorická, a tedy tím spíše neosciluje diferenciální rovnice (1). Nutnost podmínky (7) pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1) jest tím dokázána.

Poznámka při korektuře. Podmínku (7) nutnou pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1) odvodil současně Nikolenko v práci „Об одном достаточном условии неколебательности решений уравнения $y'' + f(x)y = 0$," ДАН СССР *110* (1956) 929—931.

LITERATURA

[1] *E. Gagliardo*: Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale $y'' + A(x)\,y = 0$ con $A(x) \geqq 0$, Boll. Unione Mat. Ital. *VIII* (1953), Ser. III, No 2, 177—185.

[2] *Л. Д. Николенко*: К вопросу об осцилляции решений дифференциального уравнения $y'' + p(x)\,y = 0$, Украинский Матем. Журнал VII (1955), No 1, 124—127.

[3] *M. Zlámal*: Oscillation criterions, Čas. pro pěst. matem. a fys. *75* (1950), 213—218.

[4] *M. Bôcher*: On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic, Trans. Amer. Math. Soc. *1* (1900), 40—52.

[5] *E. Hille*: Non-oscillation theorems, Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 234—252.

Резюме

ЗАМЕТКА К ВОПРОСАМ О КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + A(x)\,y = 0$

МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно.

(Поступило в редакцию 30/VII 1956 г.)

Л. Д. Николенко [2] указал необходимое условие для того, чтобы решения линейного дифференциального уравнения 2-ого порядка

$$y'' + A(x)\,y = 0 \tag{1}$$

были колеблющимися, которое он считал „достаточно близким" достаточному условию Э. Гаглиарда. Это необходимое условие, рядом с достаточным условием Гаглиарда [1]:

$$B(x) = A(x) - \frac{1}{4x^2} \geqq 0, \quad \int^t xB(x)\,\mathrm{d}x \to +\infty \text{ при } t \to +\infty,$$

следующее:

$$\int^\infty x \ln x \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4x^2},\ 0\right\} \mathrm{d}x = +\infty.$$

В настоящей работе оба условия обобщаются. Доказывается, что достаточным условием для того, чтобы решения дифференциального уравнения (1) были колеблющимися, является расходимость интеграла

$$\int^t \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x}\left\{A(x) - \frac{1}{4}\,S_n(x)\right\} \mathrm{d}x \text{ при } t \to +\infty,$$

где n — целое неотрицательное число и $\varepsilon > 0$. (Определение функций $L_n(x)$ и $S_n(x)$ смотри в статье.)

Необходимое условие следующее:

$$\int^t L_{n+1}(x) \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x),\ 0\right\} dx \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty\,.$$

При условии $\int^\infty L_{n+1}(x) \left| A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| dx < +\infty$ выводятся для решений дифференциального уравнения (1) асимптотические формулы. Доказывается, что существует такая фундаментальная система y_1 и y_2 решений дифференциального уравнения (1), что $y_1(x) \sim \sqrt{L_n(x)}$, $y_2(x) \sim \sqrt{L_n(x)}\,.$ $\cdot \log_{n+1} x$.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZU DER FRAGE ÜBER DIE OSZILLATORISCHEN EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + A(x)\,y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

(Eingelangt 30. VII. 1956.)

L. D. NIKOLENKO [2] hat eine notwendige Bedingung für die Oszillation der Lösungen der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + A(x)\,y = 0 \tag{1}$$

abgeleitet, die er als „naheliegend“ der hinreichenden Bedingung von E. GAGLIARDO [1] betrachtete. Seine notwendige Bedingung, neben der hinreichenden Bedingung von Gagliardo [1]:

$$B(x) = A(x) - \frac{1}{4x^2} \geqq 0\,, \quad \int^t xB(x)\,dx \to +\infty \quad \text{für} \quad t \to +\infty\,,$$

ist folgende:

$$\int^\infty x \ln x \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4x^2}\,,\ 0\right\} dx = +\infty\,.$$

In der vorliegenden Arbeit werden beide Bedingungen verallgemeinert. Es wird bewiesen, dass die hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung (1) die Divergenz des Integrals

$$\int^t \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} dx \quad \text{für } t \to +\infty$$

ist, wo $\varepsilon > 0$ und n eine nichtnegative ganze Zahl ist. (Die Definition der Funktionen $L_n(x)$ und $S_n(x)$ findet man in der Arbeit.)

Die notwendige Bedingung ist:

$$\int^{t} L_{n+1}(x) \operatorname{Max} \left\{ A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) , \; 0 \right\} \mathrm{d}x \to +\infty \quad \text{für} \quad t \to +\infty \, .$$

Unter der Voraussetzung $\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left| A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| \mathrm{d}x < +\infty$ werden für die Lösungen der Differentialgleichung (1) die asymptotischen Formeln abgeleitet. Es wird bewiesen, dass ein solches Fundamentalsystem y_1 und y_2 der Differentialgleichung (1) existiert, dass $y_1(x) \sim \sqrt{L_n(x)}$, $y_2(x) \sim \sqrt{L_n(x)} \, . \log_{n+1} x$ gilt .