Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Laitoch

O jistých řešeních funkční rovnice $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 420--425

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117226`

O JISTÝCH ŘEŠENÍCH FUNKČNÍ ROVNICE $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$

MIROSLAV LAITOCH, Olomouc.

(Došlo dne 19. listopadu 1955.) DT:517.948

Řešením funkční rovnice

$$F[\varphi(x)] - F(x) = 1 \tag{a}$$

při dané funkci φ se zabýval ABEL.[1]) Ukázal, že je-li ψ řešením diferenční rovnice

$$\psi(y + 1) = \varphi[\psi(y)]\,, \tag{b}$$

pak obecné řešení funkční rovnice (a) je tvaru $F(x) = \psi_{-1}(x) + \chi[\psi_{-1}(x)]$, při čemž χ je periodická funkce o periodě 1 a ψ_{-1} je inversní funkce k ψ.

Funkční rovnice (a) přichází na příklad v theorii spojitých grup transformací jedné nezávisle proměnné,[2]) při rozšíření Floquetovy metody k určení charakteru fundamentálního systému řešení lineární homogenní diferenciální rovnice 2. řádu[3]) a j.

V tomto pojednání ukážeme pomocí theorie dispersí, v jaké souvislosti jsou jistá řešení funkční rovnice (a) s oscilujícími integrály homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

1. Uvažujme lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' = q(x) \,.\, y\,. \tag{1}$$

Předpokládáme, že funkce q je spojitá v otevřeném int. (a, b) a že integrály dif. rovnice (1) v tomto intervalu oscilují. Oscilací integrálů v otevřeném intervalu (a, b) rozumíme toto:

Ať je $x \in (a, b)$ libovolné číslo, pak každý integrál dif. rovnice (1) má v int. (a, b) nekonečně mnoho nulových bodů menších než x a nekonečně mnoho nulových bodů větších než x.

Buďte u, v dva lineárně nezávislé integrály dif. rovnice (1) definované v int. (a, b). Pro $x \in (a, b)$ položíme $\varrho(x) = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$.

Funkce ϱ se nazývá první amplituda uspořádané dvojice řešení u, v.

---

[1]) *N. H. Abel*, Sebrané spisy, sv. 2, Christiania 1881, str. 36.

[2]) *G. Kowalewski*, Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Leipzig 1931, str. 10.

[3]) *M. Laitoch*, Расширение метода Флоке..., Чехосл. мат. ж., *5 (80)*, 1955, str. 170.

Nechť $a_0 \in (a, b)$ je libovolný kořen integrálu v; označme ν-tý následující kořen za a_0 (předcházející před a_0) integrálu v symbolem a_ν $(a_{-\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots$; Funkce $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ roste pak v každém intervalu $(a_\nu, a_{\nu+1})$ od $-\infty$ do $+\infty$, jestliže wronskián $w = u(x)\,v'(x) - u'(x)\,v(x)$ je záporný a klesá od $+\infty$ do $-\infty$, je-li $w > 0$. V obou případech tedy existuje pro každé $x \in (a_\nu, a_{\nu+1})$ právě jedno číslo $\operatorname{arctg} \dfrac{u(x)}{v(x)} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Nechť α značí první fázi uspořádané dvojice nezávislých integrálů u, v, která je definována vzorci

$$\alpha(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2} - \nu\pi\right) . \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad x = a_\nu\,, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{u(x)}{v(x)} - \nu\pi \,.\, \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad x \in (a_\nu, a_{\nu+1})\,. \end{cases} \tag{3}$$

O funkci α se snadno ukáže,[4]) že má v int. (a, b) tyto vlastnosti:

1° Uspořádanou dvojicí nezávislých řešení u, v je jednoznačně určena až na aditivní celočíselné násobky π,

2° je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,

3° první derivace je dána vzorcem $\alpha'(x) = -\dfrac{w}{\varrho^2(x)}$, takže z definice funkce α plyne, že tato roste od $-\infty$ do $+\infty$ v případě, že $w < 0$ a klesá od $+\infty$ do $-\infty$ v případě $w > 0$.

Nechť dále φ značí základní (z.) centrální (c.) dispersi 1. druhu příslušnou k dif. rovnici (1). Z. c. disperse 1. druhu je v int. (a, b) definována takto:

Buď $x \in (a, b)$ libovolné číslo. Nechť A značí množinu integrálů dif. rovnice (1), jejichž jedním kořenem je x. $\varphi(x)$ je za číslem x bezprostředně následující společný kořen integrálů množiny A.

O funkci φ se dá ukázat[5]), že má v int. (a, b) tyto vlastnosti:

a) je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,

b) roste od a do b, $(\varphi'(x) > 0)$,

c) $\varphi(x) > x$.

2. V tomto odstavci uvedeme nyní dvě nové věty o řešeních funkční rovnice (a).

1. *Nechť φ je z. c. disperse 1. druhu příslušná k dif. rovnici* (1). *Nechť funkce F je dána vzorcem*

$$F(x) = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} . \alpha(x)\,,$$

[4]) Srovnej [1], str. 202.

[5]) Srovnej [1], str. 207 a n.

při čemž α značí první fázi uspořádané dvojice nezávislých integrálů u, v dif. rovnice (1) *a w jejich wronskián. Potom o funkci F v int.* (a, b) *platí*:

1° *je řešením funkční rovnice* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$,

2° *je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,*

3° *roste od* $-\infty$ *do* $+\infty$, $(F'(x) > 0)$,

4° $-\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4} \frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2} \frac{F'''(x)}{F'(x)} = q(x)$.

Skutečně, vlastnost 1° funkce F pro $x = a_\nu$ plyne bezprostředně ze vzorce (3) a pro $x \in (a_\nu, a_{\nu+1})$ takto. Platí $-\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \left\{\alpha[\varphi(x)] - \alpha(x)\right\} = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \left\{\operatorname{arctg} \frac{u[\varphi(x)]}{v[\varphi(x)]} - (\nu + 1)\pi \cdot \operatorname{sgn} w - \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{v(x)} + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} w\right\} = 1$, neboť $u[\varphi(x)]\, v(x) - u(x)\, v[\varphi(x)] = 0$[6]) a tudíž pro $x \neq a_\nu$ je $\frac{u[\varphi(x)]}{v[\varphi(x)]} = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Vlastnosti 2°, 3° plynou z definice funkce F a z vlastností funkce α.

O vlastnosti 4° se lze přesvědčit snadným výpočtem.

2. *Nechť funkce φ má v int.* (a, b) *vlastnosti* a), b), c), *uvedené v odstavci 1. Nechť dále v int.* (a, b) *platí*:

1° *funkce F je řešením funkční rovnice* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$,

2° *funkce F je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,*

3° *funkce F roste od* $-\infty$ *do* $+\infty$, $(F'(x) > 0)$,

4° $q(x) = -\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4} \frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2} \frac{F'''(x)}{F'(x)}$.

Potom v int. (a, b) *je funkce q spojitá, integrály dif. rovnice*

$$y'' = q(x) \cdot y \tag{4}$$

oscilují a funkce φ je z. c. disperzí 1. druhu příslušnou k dif. rovnici (4).

Skutečně, snadno se nahlédne, že funkce

$$u(x) = [\sin \pi F(x)] : \sqrt{F'(x)}, \quad v(x) = [\cos \pi F(x)] : \sqrt{F'(x)} \tag{5}$$

jsou dvě nezávislá řešení dif. rovnice (4), která vzhledem k 1° a 3° v int. (a, b) oscilují. Podle Sturmovy věty oscilují tedy všechny integrály dif. rovnice (4).

Tvrzení o spojitosti koeficientu q plyne z 2° a 3°.

Tvrzení o funkci φ ukážeme takto. Buď $x_0 \in (a, b)$ libovolné číslo a y integrál dif. rovnice (4) takový, že $y(x_0) = 0$. Integrál y se dá vyjádřit jako lineární kombinace integrálů u, v ve tvaru

$$y(x) = c_1\, u(x) + c_2\, v(x) = [c_1 \sin \pi F(x) + c_2 \cos \pi F(x)] : \sqrt{F'(x)}.$$

[6]) Viz [1], str. 204, 208.

Nyní stačí ukázat, že číslo $\varphi(x_0)$ je kořenem integrálu y bezprostředně následujícím za kořenem x_0. Ukážeme napřed, že $\varphi(x_0)$ je kořen integrálu y. Je

$$y[\varphi(x_0)] = \{c_1 \sin \pi F[\varphi(x_0)] + c_2 \cos \pi F[\varphi(x_0)]\} : \sqrt{F'[\varphi(x_0)]} =$$
$$= \{c_1 \sin [\pi F(x_0) + \pi] + c_2 \cos [\pi F(x_0) + \pi]\} : \sqrt{\frac{F'(x_0)}{\varphi'(x_0)}} = - y(x_0) \sqrt{\varphi'(x_0)}\,,$$

neboť vzhledem k vlastnosti 1° platí $F[\varphi(x_0)] = F(x_0) + 1$, $F'[\varphi(x_0)] = F'(x_0) : \varphi'(x_0)$. Z vlastnosti c) funkce φ víme, že je $\varphi(x_0) > x_0$, takže zbývá ukázat, že mezi nulovými body x_0 a $\varphi(x_0)$ integrálu y neleží žádný další nulový bod integrálu y. V případech $y = c_1u$ resp. $y = c_2v$ to plyne ze vzorců (5). Je-li $c_1 \neq 0 \neq c_2$ plyne tvrzení pomocí Sturmovy věty o oddělování nulových bodů integrálů. Neboť kdyby mezi nulovými body x_0, $\varphi(x_0)$ integrálu y ležel jeho další nulový bod, pak by na př. integrál u musel míti v int. $(x_0, \varphi(x_0))$ dva nulové body, na příklad x_1, $\varphi(x_1)$ a platilo by $x_0 < x_1 < \varphi(x_1) < \varphi(x_0)$, což však není možné, protože podle předpokladu funkce φ v int. (a, b) roste.

LITERATURA

[1] *O. Borůvka*: О колеблющихся интегралах диф. лин. уравнений 2-го порядка, Чехосл. мат. ж., *2 (78)*, 1953, 199—256.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$

МИРОСЛАВ ЛАЙТОХ (Miroslav Laitoch), Оломоуц.

(Поступило в редакцию 19/XI 1955 г.)

В настоящей статье показано, в какой связи находятся определенные решения функционального уравнения $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$ и колеблющиеся интегралы линейного диф. уравнения 2-ого порядка.

Возьмем линейное диф. уравнение 2-ого порядка

$$y'' = q(x)\,y\,, \tag{1}$$

о котором будем предполагать, что коэффициент q является в интервале (a, b) непрерывной функцией и что в указанном интервале решения данного диф. уравнения колеблются.

Основная центральная дисперсия 1-ого рода φ, соответствующая диф. уравнению (1), обладает следующими свойствами: а) она имеет в интервале

(a, b) непрерывную производную 3-ьего порядка; б) она возрастает в указанном интервале от своего значения a до значения b; в) для каждого $x \in (a, b)$ $\varphi(x) > x$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* φ — *основная центральная дисперсия* 1-*ого рода, соответствующая диф. уравнению* (1). *Пусть функция* F *определена формулой*

$$F(x) = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \alpha(x),$$

причем α *означает первую фазу упорядоченной пары независимых интегралов* u, v *диф. уравнения* (1), *а* w — *их определитель Вронского. Тогда в интервале* (a, b) *справедливо утверждение: функция* F *является решением функционального уравнения* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$, *имеет непрерывную производную* 3-*ьего порядка, возрастает от* $-\infty$ *до* $+\infty$ *и* $-\pi^2F'^2(x) + \frac{3}{4} \cdot \frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2} \frac{F'''(x)}{F'(x)} = q(x)$.

Теорема 2. *Пусть* φ *имеет в интервале* (a, b) *свойства* а), б), в). *Далее, пусть в интервале* (a, b): *Функция* F *является решением функционального уравнения* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$, *пусть она имеет непрерывную производную* 3-*ьего порядка и возрастает от* $-\infty$ *до* $+\infty$, $(F'(x) > 0)$; *пусть, наконец,*

$$q(x) = -\pi^2F'^2(x) + \frac{3}{4} \cdot \frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{F'''(x)}{F'(x)}.$$

Тогда в интервале (a, b) *функция* q *будет непрерывной, интегралы диф. уравнения*

$$y'' = q(x)\, y \tag{2}$$

будут колебаться, а функция φ *есть основная центральная дисперсия* 1-*ого рода, соответствующая диф. уравнению* (2).

Zusammenfassung

ÜBER GEWISSE LÖSUNGEN DER FUNKTIONALGLEICHUNG $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$

MIROSLAV LAITOCH, Olomouc.

(Eingelangt 19. XI. 1955.)

In dieser Arbeit wird der Zusammenhang gewisser Lösungen der Funktionalgleichung $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$ mit oszillierenden Integralen einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben.

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = q(x) \cdot y\,; \tag{1}$$

wir setzen voraus, dass der Koeffizient q im Intervall (a, b) eine stetige Funktion ist und dass die Lösungen der Differentialgleichung (1) in diesem Intervall oszillieren.

Die zu der Differentialgleichung (1) gehörige erste Zentraldispersion 1. Art φ a) hat im Intervall (a, b) eine stetige Ableitung 3. Ordnung, b) sie wächst in diesem Interval vom Funktionswert a zum Funktionswert b, c) sie erfüllt für jedes $x \in (a, b)$ die Ungleichung $\varphi(x) > x$.

Es gelten folgende Sätze:

Satz 1. *Es sei φ die zu der Differentialgleichung* (1) *gehörige erste Zentraldispersion 1. Art. Die Funktion F sei durch die Formel*

$$F(x) = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \alpha(x)$$

definiert. α bedeutet die erste Phase eines geordneten Paares unabhängiger Lösungen u, v der Differentialgleichung (1) *und w die wronskische Determinante. Dann gilt im Intervall* (a, b) *folgendes: Die Funktion F ist eine Lösung der Funktionalgleichung* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$, *sie hat eine stetige Ableitung 3. Ordnung und wächst von* $-\infty$ *bis* $+\infty$, $(F'(x) > 0)$; *ferner gilt die Identität* $-\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{F'''(x)}{F'(x)} = q(x)$.

Satz 2. *Es sei φ eine Funktion, die im Intervall* (a, b) *die obigen Eigenschaften* a), b), c) *besitzt. Es sei F eine Lösung der Funktionalgleichung* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$, *die eine stetige Ableitung 3. Ordnung besitzt und im Intervall* (a, b) *von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *wächst* $(F'(x) > 0)$; *ferner sei q durch die Formel*

$$q(x) = -\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{F'''(x)}{F'(x)}$$

definiert. Dann gilt im Intervall (a, b) *folgendes: Die Funktion q ist stetig, die Lösungen der Differentialgleichung*

$$y'' = q(x) \cdot y \tag{2}$$

oszillieren und die Funktion φ ist die zu der Differentialgleichung (2) *gehörige erste Zentraldispersion 1. Art.*