Pak existuje reaktanční matice $\|u_{st}\|$ řádu $n + 1$ tak, že platí

$$w_{st} = u_{st} - \frac{u_{s,n+1}\, u_{t,n+1}}{1 + u_{n+1,n+1}}, \quad s, t = 1, 2, \ldots, n .$$

Věta 3. Buď $\|w_{st}\|$ *semipositivní matice n-tého řádu té vlastnosti, že žádné w_{st} nemá pólů na imaginární ose a v ∞. Pak existují semipositivní matice $\|w_{st}^{(p)}\|$, $p = 1, 2, \ldots, k \leq n$ tak, že $\|\mathrm{Re}\, w_{st}^{(p)}(i\omega)\|$ má hodnost 1 a $\|w_{st}\| = \sum_{p=1}^{k} \|w_{st}^{(p)}\|$.*

Závěrem přednášky jsem naznačil, kterak je možno pomocí vět 1, 2, 3 uskutečnit Oonovu synthesu $2n$-pólu na základě pojmů paralelního spojení konečného počtu $2n$-pólů a redukce $2(n + 1)$-pólu na $2n$-pól.

Václav Doležal, Praha.

GREENOVA VĚTA

(Referát o přednášce doc. dr Jana Maříka, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 26. března 1956.)

Přednášející vyložil hlavní výsledky článku o Greenově větě, který připravují do tisku J. Král a J. Mařík. Úkolem onoho článku je ukázat souvislost křivkového integrálu s dvojným integrálem, která se obvykle (za určitých předpokladů o funkcích P, Q a o křivce K) vyjadřuje formulí

$$\int_K P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, ;$$

K bývá zpravidla Jordanova křivka a G její vnitřek.

Budiž f až do konce pevně daná komplexní spojitá funkce s konečnou variací v intervalu $\langle a, b\rangle$. (Tím je míněno, že $f = f_1 + if_2$, kde f_1, f_2 jsou reálné funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$.) Buď E_2 množina všech (konečných) komplexních čísel; položme $K = f(\langle a, b\rangle)$.[1])

Je-li g komplexní spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, klademe

$$\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f(t) = \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f_1(t) + i \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f_2(t)\, .$$

Dá se ukázat, že pro všechna $z \in E_2 - K$ jest

$$\exp\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t) - z}\right) = \frac{f(b) - z}{f(a) - z}\,.^{2)} \tag{1}$$

[1]) Tedy naše „křivka" K má sice konečnou délku, ale jinak se může mnohonásobně protínat, může být mnohonásobně probíhanou úsečkou nebo bodem. Nelze proto mluvit o nějakém jejím vnitřku, nýbrž jenom o komponentách množiny $E_2 - K$.

[2]) Tedy i pro naši „křivku" K lze zachránit známou formuli $\int_K \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv \mathrm{Log}\, (\zeta(b) - z) - \mathrm{Log}\, (\zeta(a) - z) \pmod{2\pi i}$.

Dále buď

$$\operatorname{ind}_f z = \operatorname{ind} z = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t) - z} \quad (z \in E_2 - K)\,. \tag{2}$$

Funkce ind z (je to komplexní funkce proměnné z v oboru $E_2 - K$) má důležitý význam v případě, že $f(b) = f(a)$. Potom plyne snadno z (1), že funkce ind z nabývá jen celočíselných hodnot; mimo to je konstantní na každé komponentě množiny $E_2 - K$. Číslo ind z udává, kolikrát a v jakém smyslu „oběhne" bod $f(t)$ kolem bodu z, když t roste od a do b.

V dalším se stále předpokládá, že platí $f(b) = f(a)$.

Je účelné zavésti ještě toto označení: Buď φ reálná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $t \in (a, b)$. Jestliže funkce φ roste (resp. klesá) v bodě t, položme $\eta_\varphi(t) = 1$ (resp. $\eta_\varphi(t) = -1$); v ostatních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $\eta_\varphi(t) = 0$. Potom platí:

Nechť $x_1, x_2, y \in E_1$,[3] $x_1 < x_2$; nechť $\mathfrak{z}_j = x_j + iy$, $\mathfrak{z}_j \in E_2 - K$ pro $j = 1, 2$. Buď J úsečka $\overline{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2}$. Nechť $\eta_{f_2}(t) \neq 0$ pro všechna $t \in f^{-1}(J)$. Potom je množina $f^{-1}(J)$ konečná a platí

$$\operatorname{ind} \mathfrak{z}_1 = \operatorname{ind} \mathfrak{z}_2 + \sum_{f(t)\in J} \eta_{f_2}(t)\,. \tag{3}$$

Význam součtu Σ je tento: Je-li $t_0 \in f^{-1}(J)$, pak při $\eta_{f_2}(t_0) > 0$ resp. < 0 projde bod $f(t)$ skrz úsečku J v místě $f(t_0)$ mezi body $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$, které na K neleží, zdola nahoru resp. shora dolů, když t vzrůstá od a k b. Projde-li tedy při tom bod $f(t)$ celkem m-kráte zdola nahoru a n-kráte ($m, n \geqq 0$) shora dolů skrz J, je onen součet roven číslu $m - n$.

Připomeňme ještě tuto (Banachovu) větu o variaci spojité funkce:

Buď φ reálná spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro $y \in E_1$ buď $p(y)$ počet prvků množiny $\varphi^{-1}(y)$ (je-li $\varphi^{-1}(y)$ nekonečná množina, buď $p(y) = +\infty$). Potom je $p(y)$ měřitelná funkce a integrál $\int_{E_1} p(y)\,\mathrm{d}y$ je roven variaci funkce φ v $\langle a, b\rangle$.

Banachova věta umožňuje odvození následující věty o substituci:

Buďte g, φ reálné spojité funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť φ má konečnou variaci. Potom pro skoro všechna $y \in E_1$ je množina $\varphi^{-1}(y)$ konečná a platí

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t)\, g(t)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b g\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{4}$$

Naznačíme stručně důkaz této věty. Buď B množina všech bodů z (a, b), v nichž má funkce φ ostrý lokální extrém. Snadno se zjistí, že množina B je spočetná. Dále buď M množina všech y, pro něž je množina $\varphi^{-1}(y)$ nekonečná. Z Banachovy věty plyne, že množina M má míru 0; množina

$$L = M \cup \varphi(B) \cup \{\varphi(a), \varphi(b)\}$$

má tedy také míru 0. Je-li $y \in E_1 - L$, je množina $\varphi^{-1}(y)$ konečná a pro každé $t \in \varphi^{-1}(y)$ je $\eta_\varphi(t) \neq 0$. Je-li nyní $y \in E_1 - L$ a leží-li y mimo interval I o koncových bodech $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ (při $\varphi(b) = \varphi(a)$ odpadá tato podmínka), je $\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t) = 0$; je-li však $y \in (E_1 - L) \cap I$, je $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ a součet $\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t)$ je roven 1 nebo -1 podle toho, je-li $\varphi(a) < \varphi(b)$ nebo $\varphi(b) < \varphi(a)$. Odtud plyne ihned, že rovnost (4) platí pro funkci g identicky rovnou jedné v $\langle a, b\rangle$. Podobně se zjistí, že (4) platí pro charakteristické funkce intervalů, obsažených

[3]) E_1 je množina všech reálných čísel.

v $\langle a, b\rangle$, a snadno se vztah (4) dokáže také pro lineární kombinace takovýchto funkcí, t. j. pro „schodovité" funkce. Je-li nyní g libovolná spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje posloupnost „schodovitých" funkcí g_n tak, že $g_n \to g$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$. Potom je zřejmě $|g_n| < C$ pro všechna n (při vhodném $C > 0$), $\int_a^b g_n \, d\varphi \to \int_a^b g \, d\varphi$ a jde jen o to, zda v integrálu $\int_{E_1} (\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t) \, g_n(t)) \, dy$ lze provést limitní přechod za integračním znamením. To však zaručuje Banachova věta, neboť je $\int_{E_1} p(y) \, dy < \infty$ a platí $|\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t) \, g_n(t)| \leqq C \, p(y)$ pro skoro všechna y a všechna n. Tím je důkaz hotov.

Buď nyní $G = E[z; \operatorname{ind} z \neq 0]$ a nechť reálné funkce $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ jsou spojité v okolí (kompaktní) množiny $G \cup K$.[4]) Podle (4) je

$$\int_a^b Q(f(t)) \, df_2(t) = \int_{E_1} (\sum_{f_2(t)=y} Q(f(t)) \, \eta_{f_2}(t)) \, dy \, . \tag{5}$$

Sestrojme k funkci f_2 množinu L tak, jako jsme ji sestrojili k funkci φ v důkaze vztahu (4). Buď $y \in E_1 - L$. Zejména tedy nepatří y mezi ostré lokální extrémy funkce f_2. Přímka $\operatorname{Im} z = y$ protíná množinu K v konečně mnoha bodech $z_1, \ldots, z_n$ (stačí vyšetřit případ, že tento průnik není prázdný); můžeme psát $z_k = x_k + iy$, kde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Na každé z množin $M_0 = E[z; z = x + iy, x < x_1]$, $M_j = E[z; z = x + iy, x_j < x < x_{j+1}]$ $(1 \leqq j < n)$, $M_n = E[z; z = x + iy, x_n < x]$ je funkce ind z konstantní. Zvolme $\mathfrak{z}_j \in M_j$, položme $\operatorname{ind} \mathfrak{z}_j = I_j$ $(j \geqq 0)$ a označme symbolem J_j úsečku $\overline{\mathfrak{z}_{j-1} \mathfrak{z}_j}$ $(1 \leqq j \leqq n)$. Je $I_0 = I_n = 0$ a $f_2^{-1}(y) = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(J_j)$. Protože y není ostrým lokálním extrémem funkce f_2, je $\eta_{f_2}(t) \neq 0$ pro $t \in f^{-1}(J_j)$ a podle (3) je tedy

$$I_{j-1} - I_j = \operatorname{ind} \mathfrak{z}_{j-1} - \operatorname{ind} \mathfrak{z}_j = \sum_{f(t) \in J_j} \eta_{f_2}(t) \, .$$

Dále platí

$$\sum_{f_2(t)=y} Q(f(t)) \, \eta_{f_2}(t) = \sum_{j=1}^{n} Q(z_j) \sum_{f(t) \in J_j} \eta_{f_2}(t) = \sum_{j=1}^{n} Q(z_j) \, (I_{j-1} - I_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} I_j (Q(z_{j+1}) - Q(z_j)) = \int_{G_y^1} \operatorname{ind}(x, y) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \, dx \, ,$$

kde $G_y^1 = E[x; x + iy \in G]$. Celkem tedy podle (5) je

$$\int_a^b Q(f(t)) \, df_2(t) = \int_{E_1} \left(\int_{G_y^1} \operatorname{ind}(x, y) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \, dx \right) dy \, .$$

Snadno se však zjistí, že $\iint_{E_2} |\operatorname{ind} z| \, dx \, dy < +\infty$; existuje tedy $\iint_G \operatorname{ind} z \frac{\partial Q}{\partial x}(z) \, dx \, dy$ a rovná se $\int_a^b Q(f(t)) \, df_2(t)$.

---

[4]) Píšeme ovšem $Q(x, y) = Q(x + iy)$; podobně při $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ a $\operatorname{ind}(x, y)$.

Podobně se odvodí vztah

$$\int_a^b P(f(t))\,\mathrm{d}f_1(t) = -\iint_G \operatorname{ind} z\, \frac{\partial P}{\partial y}(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

za předpokladu, že reálné funkce P, $\frac{\partial P}{\partial y}$ jsou spojité v okolí množiny $G \cup K$. Tím je dokázána věta:

Buď f komplexní spojitá funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$; nechť $f(b) = f(a)$. Buď $K = f(\langle a, b\rangle)$. Definujme funkci ind z *podle* (2). *Nechť reálné funkce P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ jsou spojité v okolí množiny $G \cup K$, kde $G = E[z; \operatorname{ind} z \neq 0]$. Potom jest*

$$\int_a^b P(f(t))\,\mathrm{d}f_1(t) + \int_a^b Q(f(t))\,\mathrm{d}f_2(t) = \iint_G \operatorname{ind} z \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z) - \frac{\partial P}{\partial y}(z)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Předpoklady o funkcích P, Q by bylo možno poněkud oslabit. V každém případě je však existence integrálů $\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (každého zvlášť) při uvedeném postupu podstatná.

Závěrem doc. Mařík uvedl, že se mu podařilo jinými methodami dokázat následující větu:

Buď K kladně orientovaná Jordanova křivka konečné délky; buď G vnitřek křivky K. Nechť funkce P, Q jsou spojité na $\overline{G}$. Buď g funkce na množině G a nechť existuje Lebesgueův integrál $\iint_G g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Nechť pro každý uzavřený dvojrozměrný interval I obsažený v G platí

$$\int_{H(I)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_I g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

($H(I)$ značí kladně orientovanou hranici intervalu I). Potom jest

$$\int_K P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_G g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Josef Král a *Miloš Neubauer*, Praha.

EXISTENCE DERIVACÍ V DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII

(Referát o přednášce akademika EDUARDA ČECHA, konané 21. května 1956.)

Buď C křivka v trojdimensionálním eukleidovském prostoru, která je opisována bodem $A(t)$ a má tečnu $T(t)$, resp. oskulační rovinu $P(t)$. Souřadnice $A(t)$, resp. $T(t)$, resp. $P(t)$ nabývají maximální diferenciální třídy (při požadavku spojitých derivací) pro parametr $t = s$ (oblouk křivky C) resp. $t = \sigma$ (oblouk indikatrix tečen) resp. $t = \tau$ (oblouk indikatrix binormál). Vyjma případu, kdy je možno t voliti tak, že souřadnice $A(t)$ a současně $T(t)$ a $P(t)$ jsou nekonečněkrát diferencovatelné, existují další čtyři případy; v každém existuje přirozené r tak, že diferenciální třídy A, T a P při parametrech s, σ, τ jsou dány následující tabulkou: