Viktor Vladimirovich Nemyckij
Některé problémy kvalitativní teorie diferenciálních rovnic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 451--469

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117212

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

NĚKTERÉ PROBLÉMY KVALITATIVNÍ TEORIE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Přehled současné literatury)*)

DT: 517.91.001

V. V. NEMYCKIJ, Moskva.

Problémy kvalitativního vyšetřování diferenciálních rovnic byly v posledních letech jedním z nejaktuálnějších themat matematické literatury. Základní pojmy, věty a metodika kvalitativní teorie se staly základními pojmy a metodikou řešení mnohých otázek fysikálních a technických. Vědci, kteří se zabývají nelineárními kmity, radiofysikou a automatickou regulací, začali běžně užívat vět o struktuře integrálních křivek v okolí singulárního bodu, o indexech singulárního bodu a o limitních cyklech; rozsáhle aplikují Bendixson-Poincarého teorii a Brouwerovu větu o existenci pevného bodu transformace (Fixpunktsatz) atd. Přitom, je-li při problémech radiofysiky charakteristické vyšetřování soustav s jedním stupněm volnosti a užití vět kvalitativní teorie pro integrální čáry v rovině, při řešení problému automatické regulace se naproti tomu ukazuje jako nutné kvalitativní vyšetřování soustav s větším počtem stupňů volnosti a tedy řešení složitějších prostorových problémů. Situace se ještě zkomplikovala tím, že kvalitativní teorie se v podstatě dosud zabývala řešením problémů lokálního charakteru, historicky spjatých s vyjádřením analytických funkcí řadami v okolí bodu, zatím co problémy aplikované matematiky vyžadují určit chování integrálních křivek ve velkém, t. j. ve velké oblasti. Zde lze pozorovat jisté zaostávání matematické teorie za požadavky fysiky a dokonce i inženýrské praxe. Pozorujeme-li s radostí významné pronikání abstraktních matematických idejí do praxe, vzpomínáme s hrdostí, že zvláště u nás v SSSR ve škole akademika L. I. MANDELŠTAMA a jeho žáka akademika A. A. ANDRONOVA po prvé vznikly ideje o možnosti širokého užití kvalitativní teorie diferenciálních rovnic ve fysice a technice.

Přejdu nyní k přehledu výsledků kvalitativní teorie přibližně za posledních pět let.

*) Rozšířený výklad přednášky konané v březnu 1953 v Moskevské matematické společnosti. Překlad z časopisu Успехи матем. наук, IX, вып. *3* (*61*), 1954, 39—56.

Budeme vyšetřovat soustavu dvou rovnic

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \tag{1}$$

Jestliže v předcházejícím období (do konce třicátých let) byly vyšetřovány problémy struktury okolí singulárního bodu, pak nyní je pozornost zaměřena na vyšetřování ve velkém. To neznamená, že okolí singulárního bodu je úplně probádáno. Na příklad není úplně rozebrán případ singulárního bodu vyššího řádu a doposud vycházejí práce s touto thematikou (sem patří práce A. WINTNERA [1], N. B. CHAIMOVA [2] ,[2a], G. E. ŠILOVA [3] a jiných), avšak nyní, podle mého názoru, to není hlavní směr kvalitativní teorie.

I. BENDIXSON a H. POINCARÉ popsali možné chování integrálních křivek v oblastech, obsahujících konečný počet singulárních bodů. Podstatným rozšířením těchto výsledků jsou práce JU. K. SOLNCEVA [4] a R. E. VINOGRADA [5]. Solncev úplně popsal Ω-limitní množinu E_Ω libovolné ohraničené trajektorie; speciálně jím byla přesně formulována cykličnost typická pro tuto množinu; dokázal, že neredukuje-li se E_Ω na jediný singulární bod, pak rozděluje rovinu alespoň na dvě komponenty. Vinograd opustil předpoklad ohraničenosti E_Ω a podal úplnou klasifikaci topologických typů v nejobecnějším případě. Jím byla dokázána tato základní fakta: 1. E_Ω je hranicí jednoduše souvislé oblasti a nemůže obsahovat ohraničených komponent; 2. jestliže E_Ω neobsahuje singulární body, pak se skládá nejvýše ze spočetně mnoha topologických přímek, při čemž každá ohraničená oblast může být protata pouze konečným počtem těchto „přímek". Problém klasifikace možných integrálních křivek v rovině, na němž začal pracovat již H. Poincaré, byl těmito pracemi úplně rozřešen.

Bendixsonovy věty ukazují, že existuje-li v rovině prstencová oblast K, ohraničená topologickými kružnicemi, jejíž hranici všechny integrální křivky protínají při rostoucím t z vnějšku dovnitř, a neobsahuje-li K singulárních bodů, pak v K leží uzavřená integrální křivka, t. j. soustava (1) má periodické řešení. Tento jednoduchý topologický princip byl široce uplatněn při důkazech existence limitních cyklů a také při odhadu jejich polohy.

Zvláště úspěšně bylo této metody užito k vyšetření rovnice

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = 0, \tag{2}$$

jež se vyskytuje v teorii nelineárních kmitů. Zde jsou nejnovějšími práce A. F. FILIPPOVA [6], DRAGILEVA [7] a DE CASTRA [8]. Abychom ukázali charakter zde dosažených výsledků, uvedeme výsledek de Castrův:

Rovnice (2) má periodické řešení, jestliže

1. $f(x, v)$ a $g(x)$ jsou lipschitzovské v libovolné ohraničené oblasti;

2. $f(0, 0) < 0$;

3. $xg(x) > 0$ pro $x \neq 0$;

4. $|g(x)| + f(x, v)\,|v| > \varepsilon$ pro $|x| > x_0$;

5. je splněna jedna z těchto podmínek:

a) $f(x, v) + f(x, -v) \geqq 0$ pro $|x| + |v| \geqq R$,

b) $f(x, v) + f(x, -v) \geqq 0$ pro $|x| \geqq 0$ a libovolné v, a kromě toho existují čísla a, b $(0 < a \leqq b)$ taková, že $\int_a^b f(x, v)\,\mathrm{d}x \geqq \alpha > 0$ pro všechny funkce $v(x)$ takové, že $|v(x)| > N$, kde N je libovolně velké.

Abychom do tohoto výsledku zahrnuli i dříve dokázanou Dragilevovu větu [7], je třeba podmínku (4) vyslovit v této formě: $f(x, v) \geqq 0$ pro $|x| > x_0$ a $xv \geqq 0$, a $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$. V případě, že koeficient u $\dot{x}$ nezávisí na $\dot{x}$, byla A. F. Filippovem [6] dokázána obecnější kriteria, v jistém smyslu blízká k nutným. Z metody důkazů Dragilevovy a Filippovovy věty mohou být odvozeny i odhady rozložení limitních cyklů. Pro Van-der-Polovu rovnici $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0$, jak ukázal Gomory a Richmond [9], lze sestrojit úzkou prsténcovou oblast, v jejímž vnitřku leží limitní cykl. Svého výsledku dosáhli tito autoři užitím srovnávací metody, obdobné známé Čaplyginově metodě. V explicitním tvaru byl tento princip sformulován v již vzpomenuté Dragilevově práci a spočívá v tomto:

Nechť jsou dány dvě soustavy

$$\dot{v} = -f(x, v)\,v - g(x)\,, \quad \dot{x} = v\,; \tag{A}$$

$$\dot{v} = -f^*(x, v)\,v - g(x)\,, \quad \dot{x} = v\,. \tag{B}$$

Jestliže 1. $f(x, v)$ a $f^*(x, v)$ jsou spojité a lipschitzovské v libovolné ohraničené oblasti ležící vně osy x, 2. $f(x, v) < 0$ v okolí počátku, 3. $xg(x) > 0$ pro $|x| > 0$, 4. $f(x, v) \geqq f^*(x, v)$, potom z existence periodického řešení soustavy (B) plyne existence periodického řešení soustavy (A) ležícího uvnitř oblasti ohraničené periodickým řešením soustavy (B). Soustavněji užíval srovnávací metody M. I. Jelšin [10].

Často bývá důležité určit podmínky existence jediného limitního cyklu nebo naopak většího počtu limitních cyklů v dané prsténcové oblasti. Jednoduchá kriteria lze nalézt ve všech shora zmíněných pracích; jsou založena na tom, že se na funkce $f(x, v)$ a $g(x)$ kladou podmínky, které zaručují, že v oblastech, v nichž mohou ležet periodická řešení, všechna řešení se k sobě přibližují a tedy nemohou existovat dvě periodická řešení. Zajímavé jsou pokusy o udání takových podmínek pro funkce $f(x, v)$ a $g(x)$, aby existoval jistý (předem daný) počet limitních cyklů. V tomto směru na sebe upozorňují práce DUFFOVA a LEVINSONOVA [11] a ECKWEILEROVA [12]. V prvé z uvedených prací je vyšetřována rovnice

$$\ddot{x} + \varepsilon f(x)\,\dot{x} + x = 0 \tag{3}$$

a je zkonstruován takový polynom šestého stupně, že rovná-li se $f(x)$ tomuto polynomu, má rovnice (3) tři limitní cykly. Metoda autorů umožňuje zvolit polynom $f(x)$ tak, aby rovnice (3) měla libovolný předem daný počet limitních cyklů. Poznamenejme, že nalezený výsledek se vztahuje ke klasickému problému Hilberta a Poincarého o určení počtu limitních cyklů soustavy (1), jejíž pravé strany jsou polynomy. K řešení téhož problému připojme ještě tento výsledek DILIBERTŮV [13]. Nazvěme limitní cykl silně stabilním nebo silně nestabilním podle toho, zda $P'_x + Q'_y > 0$ nebo $P'_x + Q'_y < 0$ podél tohoto cyklu. Diliberto dokázal, že počet periodických řešení, která jsou buď silně stabilní nebo silně nestabilní, je menší než $\frac{1}{2}(n - 2)(n - 3) + 1$, kde n je vyšší ze stupňů obou polynomů $P(x, y)$ a $Q(x, y)$. V Eckweilerově práci je problém počtu limitních cyklů položen čistě geometricky. Opět se vyšetřuje rovnice (3), a to tak, že se graficky zobrazuje křivka $x = \varepsilon f(\dot{x})$ nazývaná charakteristickou podle analogie s její rolí v teorii samobuzených kmitů. Eckweiler ukazuje, že je možné sestrojit příklady takových soustav, v nichž existuje několik limitních cyklů. Poznamenejme, že zcela nedávno student mechanicko-matematické fakulty M. I. VOJLOKOV ukázal jistý obecný princip rozložení i velikosti rozpětí maxim a minim charakteristiky, z něhož plyne existence takového či jiného počtu limitních cyklů.

Dosud jsme vyšetřovali soustavy, jejichž fázovým prostorem je rovina, avšak v aplikacích hrají velkou úlohu soustavy, jejichž fázovým prostorem je válec. V podobných soustavách mohou existovat periodická řešení, z jejichž existence neplyne existence singulárních bodů. Tak je tomu při kvalitativním vyšetřování rovnice tvaru

$$y'' = F(y, y'), \tag{4}$$

kde funkce $F(y, y')$ je periodická vzhledem k y; do této třídy patří rovnice $y'' + Ay' + B \sin y = C$, mající velký význam pro vyšetření chodu synchronních motorů. V této souvislosti připomeňme AMERIOVU práci [14]. Zapišme vyšetřovanou rovnici ve tvaru

$$y'' + R(y, y') = F(y)\,, \tag{5}$$

kde $R(y, y') = F(y, 0) - F(y, y')$ a $F(y) = F(y, 0)$. Potom můžeme $F(y)$ interpretovat jako vnější sílu a $R(y, y')$ jako odpor (tření). Řešení, jež se redukují na konstanty, představují polohy statické rovnováhy, a jelikož $R(y, 0) = 0$, jsou to kořeny rovnice $F(y) = 0$. Proto, přejdeme-li do fázového Liénardova prostoru, t. j. napíšeme-li rovnici (5) ve tvaru $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \dfrac{F(y) - R(y, p)}{p}$, pak singulární body rovnice (5) definují rovnovážné polohy a jejich charakter bude určovat stabilitu nebo nestabilitu těchto poloh statické rovnováhy. AMERIO, vyšetřuje rovnici ve fázové rovině, nalézá dále podmínky vzniku limitních periodických režimů a v některých případech udává úplnou analysu asymptotického chování řešení rovnice.

Na závěr přehledu kvalitativního vyšetřování nelineárních kmitů připomeňme práce M. L. CARTWRIGHTOVÉ a REUTEROVY [15], [16], které se mi svou thematikou zdají velmi podstatné. Speciálně, Reuter vyšetřuje rovnici

$$\ddot{x} + k\Phi(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = kp(t) \tag{6}$$

a nazývá její řešení *konečná v limitě*, jestliže existují takové konstanty B_1 a B_2 nezávisící na k, $0 \leqq k \leqq 1$, že libovolné řešení pro $t > t_0$ vyhovuje podmínkám $|x(t)| < B_1$, $|\dot{x}(t)| < B_2$; užijeme-li terminologie obecné teorie dynamických soustav, můžeme říci, že ve fázové rovině $(x, \dot{x})$ jsou tato řešení stabilní v Lagrangeově smyslu. Reuter odvozuje řadu postačujících podmínek pro to, aby řešení byla konečná v limitě a speciálně dokazuje tuto větu: Rovnice (6) má všechna řešení konečná v limitě, jestliže $\Phi(x, \dot{x})$ je spojitá, $\Phi > -A_1$ pro všechna x a y a $\Phi > A_2$ pro $|x| \geqq a_1$ a $|y| \geqq b_1$, kde A_1 a A_2 jsou kladné konstanty a jestliže $p(t)$ je spojitá a ohraničená; kriteria lze tedy speciálně užít, jestliže $p(t) \equiv 0$, nebo je-li $p(t)$ periodická funkce.

Problém, zda všechna řešení jsou konečná v limitě je těsně spjat s problémem stability „ve velkém". Sem patří dva klasické problémy: problém centra, spočívající v určení podmínek, z kterých plyne existence jistého okolí, v němž jsou všechna řešení periodická, a problém odhadu oblasti přitahování singulárního bodu. V prvém problému se jako nový výsledek objevuje odhad velikosti té oblasti, v níž všechna řešení jsou periodická. V řešení tohoto problému nebylo uděláno mnoho: lze pouze uvést práci A. F. Filippova [6]. Pokud jde o druhý problém, pak ten byl v SSSR velmi intensivně studován. Již LJAPUNOVEM bylo dokázáno, že existuje-li positivně definitní funkce $V(x_1, x_2)$, jejíž derivace podle pole vzhledem k dané soustavě, t. j. výraz $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i$, je záporně definitní, pak počátek je asymptoticky stabilní v Ljapunovově smyslu. Jestliže však zkoumáme soustavu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2x}{1+x^2} + 2y\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{2y}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

a za funkci V zvolíme výraz $V(x, y) = y^2 + \dfrac{x^2}{1+x^2}$, je $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^4} - \dfrac{4y^2}{(1+x^2)^4}$ záporně definitní; avšak, jak ukázali E. A. BARBAŠIN a N. N. KRASOVSKIJ v práci [17], z níž je také vzat tento příklad, existuje taková oblast v rovině, že integrální křivky vycházející z této oblasti při $t \to +\infty$ ubíhají do nekonečna, t. j. počátek souřadnic není stabilní ve velkém. V téže práci bylo dokázáno následující tvrzení: Jestliže k dříve vysloveným podmínkám připojíme ještě požadavek, aby ke každému A bylo možno určit takové číslo N, že z podmínky $\Sigma x_i^2 > N$ plyne $V(x_1, x_2, \ldots) > A$ (Ljapunovova funkce V je nekonečně velká), pak počátek souřadnic je stabilní ve velkém. Tato podmínka je nutná, jestliže řešení soustavy jsou prodlužitelná i pro $t \to -\infty$. Jak upozornili titíž autoři, počátek souřadnic bude také stabilní ve velkém, jestliže $\frac{dV}{dt} \leqq 0$, při čemž znaménko rovnosti může platit pouze na takové množině, na níž neleží ani jedna kladná polotrajektorie. Tyto jednoduché věty dovolují udat celou řadu kriterií stability ve velkém v konkretních případech. Ovšem, v každém případě je třeba vynaložit nemálo ostrovtipu na to, abychom konstruovali potřebnou Ljapunovovu funkci. Obzvlášť podrobně je v tomto směru vyšetřena soustava tvaru

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + \varphi_1(y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + \varphi_2(y),$$

jejíž speciální případy mají aplikace v teorii automatické regulace. Touto thematikou se zabývají práce N. P. Jerugina [18], [19] a I. G. Malkina [20].

Pro poněkud obecnější soustavy užil téže metodiky B. A. Jeršov v práci [21]. Obtíže spojené se sestrojováním Ljapunovových funkcí nás nutí uchylovat se i k jinému způsobu vyšetřování stability ve velkém, který je založen na dávno známé (již od dob Poincaréových) metodě isoklin a na metodě oblouku bez dotyku. Často samo rozložení a forma dvou isoklin, na př. isokliny „nuly" a isokliny „nekonečna", dovolují usoudit na stabilitu rovnovážné polohy. Jestliže pravé strany, t. j. funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ nemají společných činitelů, pak, jak ukázal N. P. Jerugin, mohou být tímto způsobem odvozena definitivní analytická kriteria stability ve velkém. V práci S. A. Stebakova [22] je ukázán velmi důvtipný způsob konstrukce dvou lomených čar, vycházejících z daného bodu A, mezi nimiž leží integrální křivka vycházející z bodu A (autor posud z této metody neodvodil daleko jdoucí důsledky). Na závěr lze poznamenat, že všechny tyto metody mohou jen v řídkých případech dát úplný kvalitativní obraz chování integrálních křivek ve fázové rovině. Přesto však, jak se mi zdá, je zde už obsaženo zrno budoucí kvalitativní teorie ve velkém.

Na ukončení přehledu výsledků z kvalitativní teorie v rovině je třeba byť i jen několika slovy se zmínit o vyšetřování závislosti integrálních křivek na parametru, který vystupuje v pravých stranách rovnic. Tyto otázky byly zkoumány jak v SSSR tak v zahraničí. Především se snad zmíním o De Baggissově práci [23], v níž jsou úplně vyloženy (s některými doplňky) věty Pontrjaginovy a Andronovovy, uveřejněné již v roce 1937 ve stručné poznámce bez podrobných důkazů. Nejdůležitějším z konkretních themat vyšetřování závislosti řešení na parametrech[1]) je otázka o vzniku limitních cyklů ze singulárních bodů nebo ze separatrix. Metoda vyšetřování byla rozpracována v článku A. A. ANDRONOVA a E. A. LEONTOVIČE, uveřejněném v časopise Учённые записки Горьковского университета *6* (1939). Naznačme tuto metodu.

V dané soustavě

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

přejdeme k polárním souřadnicím; tak dostaneme rovnici

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \varrho R_1 + \varrho^2 R_2 + \varrho^3 R_3 + \dots .$$

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru $\varrho = \varrho_0 v_1(\varphi, \lambda) + \varrho_0^2 v_2(\varphi, \lambda) + \dots$, kde λ je parametr, na němž závisejí funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$. Koeficienty tohoto rozvoje hledáme metodou neurčitých součinitelů. Položíme-li v rozvoji $\varphi = 2\pi$, dostaneme rovnici

$$\varrho = \varrho_0 v_1(2\pi, \lambda) + \varrho_0^2 v_2(2\pi, \lambda) + \dots . \tag{7}$$

Vyšetřme funkci $f(\varrho_0, \lambda) = \varrho - \varrho_0$, t. j.

$$f(\varrho_0, \lambda) = [v_1(2\pi, \lambda) - 1]\, \varrho_0 + v_2(2\pi, \lambda)\, \varrho_0^2 + \dots .$$

Jestliže $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ jsou polynomy, pak kladné kořeny této funkce odpovídají limitním cyklům. Abychom zjistili, zda takové kořeny existují, vyšetřujeme přímo nalezenou funkci.

Tímto způsobem se děje vyšetřování v nedávno publikované práci N. N. BAUTINA [24], v níž je vyšetřena otázka existence limitních cyklů v okolí počátku v případě, že $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ jsou polynomy druhého stupně; dokazuje se v ní, že počet limitních cyklů není větší než 3, a jsou sestrojeny takové polynomy, pro něž tento počet je právě roven třem. Téže metody užívá ve své poslední práci [25] E. A. LEONTOVIČ, když vyšetřuje vznik limitních cyklů ze separatrice.[2]) Je třeba říci, že tato metoda, kterou je možno nazvat přímou, při všech svých možnostech sotva může sloužit k získání poněkud obecnějších zákonů vzniku limitních cyklů; spíše se hodí ke konstrukci různých příkladů.[3]) V zahraničí se touto thematikou zabývá práce DUFFOVA [26]. V ní se vyšetřuje soustava rovnic

$$\dot{x} = P(x, y, \alpha), \quad \dot{y} = Q(x, y, \alpha),$$

---

[1]) Nedotýkáme se zde důležité otázky o závislosti řešení na parametrech vystupujících v levých stranách soustavy.

[2]) Poznamenejme, že konstrukce funkce ϱ z rovnice (7) ve vyšetřovaném případě je ovšem mnohem obtížnější.

[3]) Zcela nedávno se v časopisu Matematičeskij sbornik 34: 1 (1954) objevila s touto thematikou práce *N. F. Otrokova.*

kde α je nějaký reálný parametr, při čemž P a Q jsou periodické funkce α s periodou 2π vyhovující těmto podmínkám:

1. $P(x, y, \alpha + \pi) = - P(x, y, \alpha)$, $Q(x, y, \alpha + \pi) = - Q(x, y, \alpha)$.
2. Soustava rovnic má pouze isolované singulární body.

Takový systém diferenciálních rovnic se nazývá úplným systémem, jestliže má tyto vlastnosti:

a) singulární body jsou pevné, jestliže α nabývá hodnot z intervalu $0 \leqq \alpha \leqq \pi$;

b) ve všech regulárních bodech je splněna nerovnost $P \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha} - Q \dfrac{\partial P}{\partial \alpha} > 0$.

Dvě soustavy rovnic

$$\frac{dx}{dt} = X_1, \quad \frac{dy}{dt} = Y_1 \quad \text{a} \quad \frac{dx}{dt} = X_2, \quad \frac{dy}{dt} = Y_2$$

jsou tehdy a jen tehdy prvky téhož úplného systému, jestliže $X_1Y_2 - X_2Y_1 > 0$. Duff ve své práci vyšetřuje změnu limitních cyklů při změně α a zánik i vznik limitních cyklů ze singulárních bodů v daném úplném systému. Avšak při této metodě se doposud nepodařilo odvodit efektivní kriteria, dovolující analysovat konkretní rovnice.

Prostorové problémy kvalitativní teorie

Výsledků kvalitativního vyšetřování soustav diferenciálních rovnic pro $n > 2$ je mnohem méně než pro $n = 2$. Dokonce ani vyšetření chování integrálních křivek v okolí singulárního bodu není úplně ukončeno. Úplně je vyšetřena pouze soustava

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ \varphi_i(0, 0, \ldots, 0) = 0),$$

v níž determinant $|a_{ik}| \neq 0$, žádný kořen charakteristické rovnice není ryze imaginární a pravé strany mají spojité parciální derivace v okolí singulárního bodu.

Vyloučené případy musíme považovat za „kritické" proto, že libovolně malými změnami koeficientů u lineárních členů se ostře mění topologický obraz chování integrálních křivek. V nekritickém případě byly definitní formulace vysloveny D. M. Grobmanem [27], [28]. Jím speciálně bylo dokázáno toto: Jestliže mezi kořeny charakteristické rovnice je alespoň jedna dvojice kořenů s reálnými částmi různých znamének, pak všechna řešení, až na ta, která vyplňují varietu nižší dimense, opustí dostatečně malé okolí počátku jak pro $t \to \infty$ tak pro $t \to -\infty$. Jestliže reálné části všech kořenů mají stejné znaménko a jsou různé od nuly, pak všechny integrální křivky buď pro $t \to \infty$

nebo pro $t \to -\infty$ ústí do počátku. Celou množinu integrálních křivek můžeme rozložit do konečného počtu tříd podle jejich asymptotického chování, t. j. podle toho, které z invariantních rovin matice A se dotýkají pro $t \to \infty$.[4])

Nebudu uvádět další přesné formulace; zmíním se pouze o výsledku, které téměř za těchže předpokladů odvodil také WAŻEWSKI [30].

Nechť reálné části kořenů charakteristické rovnice vyhovují nerovnostem

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_{k-1} \leqq \alpha_k < \alpha_{k+1} \leqq \alpha_{k+2} \leqq \ldots \leqq \alpha_{k+p} < \alpha_{k+p+1} \leqq \ldots$$
$$\ldots \leqq \alpha_n ;$$

potom souřadnicovou rovinu $(x_{k+1}, \ldots, x_{k+p})$ nazýváme nezávislou.

Ważewského věta praví, že množina integrálních křivek dotýkajících se v počátku této roviny, má dimensi $k + p$.[5]) Tyto výsledky nepopisují úplně chování všech integrálních křivek v okolí singulárního bodu. Je známo, že bez dalších požadavků na „malost" $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takový popis nelze ani učinit; z vyšetřování I. G. Petrovského je také známo, že mnohé výsledky známé pro lineární soustavy v případě, že kořeny charakteristické rovnice nemají nulové reálné části, se zachovávají, jestliže $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| \leqq M \sum_{k=1}^{n} |x_k|^\alpha$ $(i, j = 1, 2, \ldots, \ldots, n$; M a α jsou kladná čísla). D. M. Grobman ve své práci [28] udal takové podmínky pro poruchy $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, při nichž forma integrálních křivek soustavy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + \varphi$ a $\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = A\bar{x}$, kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, je asymptoticky ekvivalentní. Tyto podmínky se v obecném případě (při existenci nulových reálných částí) kladou na asymptotické chování funkce $g(t)$, kde

$$|\varphi(t, \bar{x}) - \varphi(t, \bar{\bar{x}})| \leqq g(t)\, |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| ,$$

a proto nemohou být aplikovány při studiu autonomních soustav; jestliže se však snažíme zachovat pouze formu těch integrálních křivek, které mají záporné charakteristické exponenty v Ljapunovově smyslu, pak lze tyto podmínky nahradit charakterisací velikosti vektoru φ v závislosti na $|x|$. Jak ukázal D. M. Grobman, integrální křivky vyšetřovaných soustav, mající záporné charakteristické exponenty, jsou asymptoticky ekvivalentní, jestliže

$$|\varphi(t, \bar{x}) - \varphi(t, \bar{\bar{x}})| \leqq \beta(r)|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| , \quad \beta(r) \leqq \frac{k}{|\lg r|^{2m+1+\varepsilon}} ,$$

kde $m + 1$ je maximální řád polí matice, které odpovídají kořenům charakteristické rovnice se zápornými reálnými částmi, $r = \max\{|\bar{x}|, |\bar{\bar{x}}|\}$, k a ε jsou kladná čísla.

[4]) Zmiňme se o práci HAAGOVĚ [29] z r. 1950. V této práci autor ve skutečnosti jen znovu dokazuje výsledky I. G. PETROVSKÉHO, publikované v časopise Matematičeskij sbornik již v roce 1934 (svazek 41: 1, strana 107—156).

[5]) O matici lineárních členů předpokládáme, že je v Jordanově kanonickém tvaru.

Jestliže existují nulové kořeny, pak máme co činit se singulárními body vyššího řádu a dostáváme se tím na pole, kde se můžeme jen ztěží orientovat. Avšak i zde byly v posledních letech zaznamenány jisté pokroky. Za prvé připomeňme Haagovu práci [31]. V ní je vyšetřován případ, kdy lze zkoumanou soustavu zapsat ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \frac{dx_j}{dt} = r_j(x_j + x_{j-1}) + \varphi_j,$$

kde r_j jsou konstanty, $\varphi = Af(x) + F(x, x_k)$, při čemž $f(x) > 0$ je malá řádu $\omega > 1$ a $\varphi_j = f_j(x) + F_j(x, x_k)$; při tom je $\lim_{x \to 0} \frac{f_j(x)}{f(x)} = A_j$, $\lim_{x \to 0} \frac{F(x, x_k)}{f(x)} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{F_j(x, x_k)}{f(x)} = 0$. O stabilitě či nestabilitě rozhodují znaménka čísel A_j a znaménko výrazu $Af(x)$. Analogické, avšak poněkud dále jdoucí výsledky uveřejnil A. A. Šestakov [32], [33] v případě jednoduchých kořenů zkrácené charakteristické rovnice. Ve své poznámce [34] z roku 1949 ukázal A. A. Šestakov, že obecnější případ může být převeden na dříve vyšetřovaný případ lineární transformací proměnných. Jestliže si neklademe za úkol úplné kvalitativní vyšetření v okolí singulárního bodu a zajímáme se pouze o určení stability v Ljapunovově smyslu, pak klasická přímá metoda vyšetřování stability zůstává nadále základní metodou pro vyšetření konkretních problémů důležitých v aplikacích. Na dotvrzení stačí připomenout práce Lurjeho [35] a Ajzermana [36] z teorie automatické regulace. Z teoretického hlediska se jeví velmi důležitými „obrácené věty". Tím myslíme odvození nutných a postačujících podmínek, kterým musí vyhovovat Ljapunovova funkce, aby stabilita měla ten nebo onen charakter. V posledních letech byla nalezena téměř definitivní řešení těchto problémů, zvláště pak Masserou [37] a Barbašinem [38] nezávisle na sobě byly odvozeny obrácené Ljapunovovy věty pro asymptotickou stabilitu. Uvedu nejobecnější z těchto výsledků pocházející od Barbašina.

Jestliže kompaktní souvislá invariantní množina F má tu vlastnost, že dělí své dostatečně malé okolí pouze na konečný počet částí a je současně asymptotickou množinou, pak v jistém okolí množiny F existuje spojitá funkce v mající spojitou derivaci podle času v oblasti U, vyhovující podmínkám $v > 0$ a $\frac{dv}{dt} < 0$ a rovnající se nule na množině F. Tyto podmínky, jimž má vyhovovat funkce v, jsou také postačující k tomu, aby soustava byla stabilní.

Upozorňuji, že E. A. Barbašin byl prvý, kdo se začal zabývat podmínkami asymptotické stability nikoli vzhledem k bodu, ale vzhledem k množině. Zatím ještě nikdo neužil těchto vět ke studiu konkretních dynamických soustav s invariantní podmnožinou, avšak nepochybuji o tom, že je možné to učinit. Konečně, úplně nedávno I. G. Malkin odvodil nutné a postačující podmínky pro stejnoměrnou stabilitu v Ljapunovově smyslu.

Přejděme nyní ke kvalitativnímu vyšetření ve velkém soustav s větším počtem stupňů volnosti. Je nutno říci, že zde byly ve skutečnosti učiněny teprve prvé kroky. Již jsem se zmínil o práci Barbašinově a Krasovského [17], v níž jsou odvozené postačující podmínky pro stabilitu ve velkém formulovány pomocí vlastností Ljapunovovy funkce. Faktické sestrojení ljapunovských funkcí pro některé třídy soustav a pro některé rovnice třetího řádu je provedeno v řadě prací Barbašinových [39] a Krasovského [40]. V poslední z uvedených prací byla vyšetřena soustava tvaru

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + a_{12}y + a_{13}z\,, \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + a_{22}\,y + a_{23}z\,,$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x) + a_{32}y + a_{33}z\,.$$

Touž thematikou se zabývají práce Ajzermanovy [36] a Lurjeho [35].

Kromě stability ve velkém byl vyšetřován také problém existence periodických řešení a jiných kmitavých režimů. Jestliže pravé strany soustavy $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou periodické funkce t, pak nalezení periodických řešení s periodou identickou s periodou pravých stran je klasickým thematem. Rozhodující výsledky v rozpracování této thematiky pocházejí od A. N. Ljapunova a týkají se otázky vyjádření řešení ve tvaru řad. Tyto otázky vystupují z rámce té thematiky, které se dotýká tento přehled. V případě autonomních soustav nejrozšířenější metodou hledání periodických řešení je Poincarého metoda malého parametru. Výsledky dosažené touto metodou také netvoří předmět mého přehledu. Současný stav tohoto problému je výborně vyložen v Malkinově knize „Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний" (Гостехиздат, 1949). Všechny tyto metody nedovolují nalézt periodické režimy v podstatně nelineárních neautonomních soustavách v případě, že hledáme řešení s periodou nesouměřitelnou s periodou pravých stran. Mimochodem podotkněme, že Massera [41] ukázal, že taková řešení mohou existovat pouze v tom případě, když podél odpovídajících integrálních křivek nezávisí pravé strany na t. Již dávno vznikla idea zobecnit na prostorový případ princip mezikruží platící pro rovinu, avšak to se nepodařilo. V roce 1952 uveřejnil Fuller [42] záporné řešení tohoto problému, t. j. byl jím sestrojen čtyřdimensionální torus, jehož hraničními body vcházejí všechna řešení do vnitřku toru, avšak tento torus neobsahuje (ani uvnitř ani na hranici) ani singulární body ani periodická řešení. V této práci Fuller poznamenává, že vektorové pole jím sestrojené může být uvnitř toru spojitě deformováno v takové pole, že jeho trajektorie jsou periodické. Tato okolnost ukazuje, jak on sám správně podotýká, že sotva mohou existovat čistě topologická kriteria existence periodických řešení. Avšak tato okolnost není podkladem k pesimismu v tomto směru. Důkaz existence periodických řešení je třeba provést bezprostředním užitím Brouwerovy věty o pevném bodu. Je totiž třeba zjistit, že pole uvnitř toru je takové, že poledníkový řez toru přechází při pohybu po trajektorii spojitě v sebe. Takovým způsobem se v obecném případě převádí problém na vyšetření jistého bodového zobrazení a na určení pevných bodů tohoto bodového zobrazení. Právě tímto způsobem A. A. ANDRONOV [43] ve své klasické práci z roku 1946 rozřešil problém Vyšněgradského z teorie nepřímé regulace. Přímo bylo principu toru k určení periodických řešení užito v pracích K. O. FRIEDRICHSE [44] a L. L. RAUCHA [45]. V poslední práci je vyšetřena rovnice třetího řádu

$$k_1\dddot{x} + [k_2 + k_3 g(x)]\,\ddot{x} + k_3 g'(x)\,\dot{x}^2 + x = 0\,.$$

Při některých vztazích mezi parametry k_1, k_2 a k_3 a funkcí $g(x)$ je dokázána existence periodického řešení. To jsou prvé a nesmělé kroky, které učinila kvalitativní teorie při vyšetřování soustav n rovnic pro $n > 2$ ve velkém.

Lineární soustavy s proměnnými koeficienty

Poslední otázkou, u níž se zastavíme v tomto přehledu, je kvalitativní vyšetření lineárních rovnic s proměnnými koeficienty. Při tom se omezím pouze na uvedení obecných vět, nedotýkaje se těch speciálních výsledků, které jsou známy pro lineární rovnice druhého řádu. Tedy nechť je dána soustava rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)\,. \tag{8}$$

Jedním z nejrozšířenějších způsobů vyšetřování soustavy (8) je užití srovnávacích vět. Ty spočívají v tom, že zkoumaná soustava se porovnává s jinou soustavou

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\,\bar{x}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)\,.$$

V tomto směru jdou nejdále výsledky odvozené pro případ, že pomocná soustava

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij},\bar{x}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

má konstantní koeficienty. V tomto směru je velmi zajímavá práce Grobmanova [28].

Nechť $g(t) = \|a_{ij}(t) - b_{ij}\|$ a $m_k + 1$ je řád maximálního pole matice (b_{ij}) v Jordanově kanonické formě, odpovídajícího vlastní hodnotě této matice s reálnou částí ω_k; potom z podmínky $\int\limits_{t_0}^{\infty} t^{2m_k} g(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ plyne, že mezi integrály lineární soustavy s konstantními koeficienty, odpovídajícími kořenům charakteristické rovnice majícím reálnou část ω_k, a mezi integrály soustavy rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j\,,$$

majícími charakteristický exponent ω_k, je možno definovat vzájemně jednoznačnou a vzájemně spojitou korespondenci, při níž pro odpovídající integrály platí vztah $|x - y| = o(e^{\omega_k t})$, t. j. pro integrály x platí asymptotické vyjádření $x = y + o(e^{\omega_k t})$. Z této formule zřejmě plyne, že $x = y + o(|x|)$.

Avšak poslední asymptotická formule je méně přesná. Jak ukázal E. Levi [46], k platnosti této poslední asymptotické formule stačí předpoklad $\int\limits_{t_0}^{\infty} t^{\mu-1} g(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, kde μ je řád největšího pole Jordanovy matice.

Dosud jsme vyšetřovali integrální blízkost porovnávaných soustav. Avšak v případě lineárních soustav mohou být zavedeny i jiné formy blízkosti [47]. Snad nejobecnější výsledek v tomto směru odvodil Levinson [48].

Budiž dána soustava $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (A + \Phi + R)\, x$, kde A je konstantní matice, pro níž všechny kořeny charakteristické rovnice jsou jednoduché; matice $\Phi(t)$ je taková, že prvky $\Phi_{ij}(t)$ této matice konvergují k nule pro $t \to \infty$ a $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t}\right| \mathrm{d}t < \infty$. Prvky matice R vyhovují podmínkám $\displaystyle\int^{\infty} |r_{ij}(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Kořeny charakteristické rovnice $|A + \Phi - \lambda E| = 0$ označme $\lambda_i(t)$. Nechť $\lim \lambda_i(t) = \mu_i$ pro $t \to \infty$. Jestliže reálné části μ_i nejsou všechny různé, pak zaveďme označení $D_{ij}(t) = \mathrm{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_j(t))$ a předpokládejme, že pro každé i a j je splněna jedna z těchto podmínek:

$$\limsup_{t\to\infty} \left|\int_{t_0}^{t} D_{ij}(t)\,\mathrm{d}t\right| < \infty\,,$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} D_{ij}(t)\,\mathrm{d}t = \infty\,, \quad \int_{B}^{A} D_{ij}(t)\,\mathrm{d}t > -c\,, \quad A > B\,;$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} D_{ij}(t)\,\mathrm{d}t = -\infty\,, \quad \int_{B}^{A} D_{ij}(t)\,\mathrm{d}t < c\,, \quad A > B\,;$$

kde c je jistá konstanta. Potom pro velká t existuje n nezávislých vektorů $x^{(k)}(t)$, které jsou integrály vyšetřované soustavy a to takovými, že pro $t \to \infty$ platí $x^{(k)}(t) \sim c^{(k)} e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_k(t)\,\mathrm{d}t}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, kde $c^{(k)}$ je lineárně nezávislá soustava vektorů. Každý z vektorů $c^{(k)}$ je charakteristickým vektorem matice A, t. j. $Ac^{(k)} = \mu_k c^{(k)}$.

Jestliže nesměřujeme k odvození asymptotických formulí a zajímáme se pouze o stabilitu řešení, pak je možné udat i méně omezující podmínky. Již dávno bylo známo, že jestliže reálné části všech kořenů charakteristické rovnice $|A - \lambda E| = 0$ jsou záporné, pak z podmínky $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$ plyne stabilita limitní soustavy. Nevyšetřeným zůstává případ, kdy reálné části kořenů charakteristické rovnice $|A - \lambda E| = 0$ se mohou rovnat nule.

V této souvislosti připomeňme Demidovičovy práce [49], [50]. V nich je vyšetřován případ jednoho nulového kořenu, při čemž soustavu lze napsat ve tvaru $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + \Phi(t)\,x$. B. P. Demidovič hledá „lineární aproximaci" toho kořenu charakteristické rovnice, který má za limitu nulu. Tuto aproximaci můžeme napsat ve tvaru $\varrho_n^0(t) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ii}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}\varphi_{ij}(t)$, kde A_{ij} jsou minory determinantu matice A a $\varphi_{ij}(t)$ jsou prvky matice $\Phi(t)$ a kde kriteria stability hledáme při jistých předpokladech o asymptotickém chování funkce $\varrho_n^0(t)$.

K rozbíranému thematu se vztahuje také nedávno publikovaná práce Gavrilovova [51]. V ní je formulováno bez důkazu toto velmi silné tvrzení:

Budiž dána soustava $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_k a_{ik}x_k + \sum\limits_k \omega_{ik}(t)\,x_k$, kde a_{ik} jsou konstanty a $\omega_{ik}(t)$ jsou spojité pro $t \geqq t_0$. Jestliže $i \geqq k$, pak $\omega_{ik}(t)$ jsou buď absolutně integrovatelné na $\langle t, \infty)$ nebo $\omega_{ik}(t) \to 0$ pro $t \to \infty$. Jestliže $i < k$, pak $\omega_{ik}(t)$ jsou spojité ohraničené funkce pro $t \geqq t_0$. O matici A předpokládáme, že je v Jordanově kanonickém tvaru. Triviální řešení je stabilní v Ljapunovově smyslu, je-li splněna jedna z těchto dvou podmínek:

1. Jestliže λ_s je vícenásobný kořen charakteristické rovnice a elementární dělitel je l_s-násobný, při čemž $l_s > 1$, pak $\operatorname{Re} \lambda_s < 0$.

2. Jestliže λ_s je jednoduchý nebo více násobný kořen, avšak $l_s = 1$, pak $\operatorname{Re} \lambda_s \leqq 0$; při tom, jestliže $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$, žádáme ještě, aby $\int\limits_{t_0}^{t} |\omega_{jk}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty$ pro $k \neq s$ z toho řádku, v němž je dané λ_s, pro něž $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$, a aby existovalo $N > 0$ takové, že $\int\limits_{t_0}^{t} \omega_{ss}(\tau)\,\mathrm{d}\tau < N$ pro $t \geqq t_0$.

V případě, že matice pomocné soustavy má nekonstantní koeficienty, je problém stability málo prostudován. Odděleně se studuje problém ohraničenosti řešení při různých pravých stranách rovnic. Je jasné, že problém by byl v jistém smyslu řešen, kdyby se charakteristické exponenty řešení lineárních soustav měnily spojitě při spojité změně koeficientů. Avšak podmínky takové spojité změny nejsou vyjasněny. Dlouho panovala hypotesa, že je-li daná soustava $\frac{dx}{dt} = A(t)\,x$ regulární v Ljapunovově smyslu, pak že se charakteristické exponenty málo mění při dostatečně malých změnách pravých stran; ukázalo se však, že tento předpoklad je nesprávný dokonce i pro soustavu dvou rovnic. Takový příklad nedávno konstruoval R. E. VINOGRAD [52]. Obtíže řešení obecného případu přiměly matematiky zabývat se otázkou zachování ohraničenosti řešení. V tomto směru připomeňme dvě práce ASCOLIHO [53]. Ascoli místo regularity soustavy a nekladnosti charakteristických exponentů předpokládá existenci ohraničené fundamentální matice, a to nikoliv jen pro samotnou soustavu $\frac{dx}{dt} = A(t)\,x$, nýbrž i pro soustavu s ní konjugovanou. Je zajímavé si uvědomit, že tato podmínka je splněna, jestliže každé řešení soustavy $\dot{x} = A(t)\,x$ je v okolí počátku ohraničené jak shora, tak zdola.

Všechny uvedené práce se týkaly vyšetření lineárních soustav s proměnnými koeficienty srovnávacími metodami; nepochybnou důležitost má však také vyšetření „koeficientních kriterií“, t. j. takových kriterií, která by dovolila z vlastností koeficientů soudit na kvalitativní chování řešení. K takovým koeficientním kriteriím lze přičíst na př. klasické Ljapunovovy odhady možného růstu řešení, Floquetovu teorii řešení rovnic s periodickými koeficienty atd.

Poslední leta přinesla i v tomto směru celou řadu nových výsledků a nových metod. V následujícím shrnutí ponechám úplně stranou důležitá a velmi důmyslná vyšetřování ohraničenosti řešení rovnice s periodickými koeficienty, jelikož ta vyžadují speciálního přehledu a jsou těsně spjata s vyšetřením jedné rovnice druhého řádu s periodickými koeficienty. Zastavím se pouze u obecných metod vyšetřování integrálů lineárních soustav. Uvedu nedávno publikované práce GORBUNOVOVY [54], [55], [56] a VINOGRADOVY [57], [58]. Práce Gorbunovovy představují další rozvinutí druhé Ljapunovovy metody aplikované na lineární soustavy. Přejděme k výkladu o těchto pracích.

Budiž dána soustava rovnic $\dot{x} = E(t)\,x$, kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je matice o jednom sloupci a $E(t)$ je spojitá čtvercová matice, a nechť je dána jistá kvadratická forma $G(t, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$, při čemž $a_{ik} = a_{ki}$. Vyšetřme formu $g(t, x) = \frac{d}{dt}\,G(t, x)$ rovnou derivaci formy $G(t, x)$ podle pole vzhledem k dané soustavě, a nechť $N_g(t) = \max_{G(t,x)=1} g(t, x)$. Zaveďme nyní označení

$$A_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

a A^s_{n-1} pro ten determinant, který dostaneme z determinantu $A_n = |a_{ij}|$ vyškrtnutím s-tého sloupce a s-té řádky; potom platí odhad

$$|x_s| \leqq \left[G(t_0, x_0) \frac{A^s_{n-1}(t)}{A_n(t)} e^{\int_{t_0}^{t} N_g(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Tento odhad je, jak je ukázáno v Gorbunovově práci [55], v jistém smyslu nejlepší.

Budiž dána nehomogenní soustava $\dot{y} = L(t)\, y + f(t)$. Jestliže nyní spolu s kvadratickou formou $g(t, y) = y' \left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + L'A + AL \right] y$ zavedeme ještě formu $h(t, y) = f'Ay + y'Af = 2 \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)\, y_j f_k$ a zavedeme-li označení

$$N_g(t) = \max_{G(t,x)=1} g(t, y) , \quad Q_g(t) = \max_{G(t,x)=1} h(t, y) ,$$

pak pro $t \geqq t_0$ dostaneme pro složky řešení tyto odhady:

$$|y_s| \leqq \left[G(t_0, y_0) \frac{A^s_{n-1}(t)}{A_n(t)} e^{\int_{t_0}^{t} N_g(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \right]^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{A_{n-1}(t)}{A_n(t)} \right)^2 \int_{t_0}^{t} Q_g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\, e^{\frac{1}{2}\int_{\xi}^{t} N_g(\tau)\, \mathrm{d}\tau} .$$

Tyto odhady dovolují pro celou řadu případů zvolit oblasti hodnot parametrů, na nichž závisí koeficienty soustav rovnic, tak, aby řešení byla stabilní. V práci Vinogradově je podrobně kvalitativně vyšetřena soustava dvou lineárních diferenciálních rovnic. Kriteria stability a nestability jím zde odvozená zobecňují známá kriteria o existenci uzlu a sedla pro soustavy s konstantními koeficienty.

Na konec svého přehledu musím říci, že vyloženými směry bádání nejsou vyčerpány problémy kvalitativní teorie, na nichž se pracovalo v posledních letech. Speciálně jsem se nedotkl dvou důležitých oblastí: teorie lineárních rovnic druhého řádu a z ní plynoucích zobecnění a obecné teorie dynamických soustav. Na široké možnosti užití poslední teorie k vyšetření konkretních dynamických soustav poukázal ve své nedávné přednášce v Moskevské matematické společnosti A. N. Kolmogorov. Obě tyto oblasti vyžadují speciálního přehledu.

CITOVANÁ LITERATURA

[1] *A. Wintner:* Vorteces and nodes, Amer. Journ. of Math. *69*: 4 (1947), 815—820.

[2] *Н. Б. Хаимов:* Некоторые теоремы об особых точках первой группы. Ученые записки Сталинабадского государственного объединенного педагогического и учительского института *I* (1952), 45—113.

[2a] *Н. Б. Хаимов:* Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены. Ученые записки Сталинабадского государственного объединенного педагогического и учительского института *II* (1952), 3—31.

[3] *Г. Е. Шилов:* Интегральные кривые однородного уравнения первого порядка, УМН *5*: 5 (1950).

[4] *Ю. К. Солнцев:* О предельном поведении интегральных кривых одной системы дифференциальных уравнений, ИАН *9*: 3 (1945).

[5] *Р. Э. Виноград:* О предельном поведении неограниченной интегральной кривой, Ученые записки МГУ, вып. 135, Математика, т. *V* (1952), 94—136.

[6] *А. Ф. Филиппов:* Достаточное условие существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка, Матем. сб. *30* (72): 1 (1952), 171—180.

[7] *А. В. Драгилев:* Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний, ПММ *16*: 1 (1952), 85—88.

[8] *A. de Castro:* Soluzioni periodiche di una equazione differenziale del secondo ordine, Boll. Unione mat. italiana, ser. 3, *8*: 1 (1953), 26—29.

[9] *R. Gomory, D. E. Richmond:* Bounderies for the limit cycle of Van der Pol's equation, Quart. Appl. Math. 9: 2 (1951), 205—209.

[10] *М. И. Ельшин:* Метод сравнения в качественной теории неполного дифференциального уравнения второго порядка, Матем. сб. *4*: 2 (1954).

[11] *Duff, Levinson:* On the non-uniqueness of periodic solutions for an asymmetric Liénard equation, Quart. Appl. Math. *10*: 1 (1952).

[12] *H. J. Eckweiler:* Nonlinear differential equations of the Van der Pol type with a variety of periodic solutions, Studies in nonlinear vibration theory, New York University (1946), 4—64.

[13] *S. P. Diliberto:* On systems of ordinary differential equations, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton University Press (1950), 1—38.

[14] *L. Amerio:* Studio asintotico del moto di un ponto su una linea chiusa, per azione di forze indipendenti dal tempo, Ann. scuola normale super. di Pisa, ser. III (1950), 19—58.

[15] *M. L. Cartwright:* Forced oscillations in nonlinear systems, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton (1950), 149—262.

[16] *G. E. H. Reuter:* Boundedness theorems for non linear differential equation of the second order, Journ. London Math. Soc. *27*, *1*, No 105 (1952).

[17] *Е. А. Барбашин* и *Н. Н. Красовский:* Об устойчивости движения в целом, ДАН *86*: 3 (1952), 453—456.

[18] *Н. П. Еругин:* О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом, ПММ *14*: 5 (1950), 459—512.

[19] *Н. П. Еругин:* Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения, ПММ *15*: 2 (1951).

[20] *И. Г. Малкин:* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ *16*: 3 (1952).

[21] *Б. А. Ершов:* Об устойчивости в целом для некоторой системы автоматического регулирования, ПММ *17*: 1 (1953), 61—72.

[22] *С. Стебаков:* Качественное исследование системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ при помощи изоклин, ДАН *82*: 5 (1952), 676—680.

[23] *H. F. De Baggis:* Dynamical systems with stable structures, Contributions to the theory of nonlinear oscillations II, 37—59 (1952).

[24] *Н. Н. Баукин:* О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или цёнтра, Матем. сб. *30* (72): 1 (1952), 181—195.

[25] *Ё. А. Леонтович:* О рождении предельных циклов от сепаратрисы, ДАН *78*: 4 (1951), 641—644.

[26] *G. F. Duff:* Limit cycles and rotated vector fields, Ann. Math. *57*: 1 (1953).

[27] *Д. М. Гробман:* Характеристические показатели систем, близких к линейным, Матем. сб. *30*: 1 (1952), 121—166.

[28] *Д. М. Гробман:* Системы дифференциальных уравнений, аналогичные линейным, ДАН *86*: 1 (1953), 19—22.

[29] *J. Haag:* Cols, noeuds et foyers, Bull. Sci. Math. *84* (1950), 167—192.

[30] *T. Ważewski:* Sur les intégrales d'un système d'equations différentielles tangeantes aux hyperplans caractéristiques issues do point singulier, Ann. de la Soc. Pol. Math., Krakow, *21*, t. II (1949), 277—297.

[31] *J. Haag:* Sur la stabilité des solutions de certains systèmes d'équations différentielles, Bull. Sci. Math. *70*: 1 (1946), 21—36.

[32] *A. A. Шестаков:* О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, ДАН *62*: 2 (1948).

[33] *A. A. Шестаков:* Поведение интегральных кривых системы вида $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = X_1(x)$, $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ДАН *62*: 5 (1948).

[34] *A. A. Шестаков:* О поведении интегральных кривых системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки высшего порядка, ДАН *65*: 2 (1949).

[35] *A. И. Лурье:* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М.—Л., (1951).

[36] *М. А. Айзерман:* Теория автоматического регулирования двигателей, Гостехиздат, М.—Л., 1952.

[37] *J. L. Massera:* On Liapounoff's conditions of stability, Ann. Math. *50*: 1 (1949), 705—720.

[38] *Е. А. Барбашин:* Метод сечений в теории динамических систем, Матем. сб. *29* (71): 2 (1951), 233—280.

[39] *Г. А. Барбашин:* Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, ПММ *16*: 5 (1952), 629—632.

[40] *Н. Н. Красовский:* Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной системы трех уравнений, ПММ *17*: 3 (1953), 339—350.

[41] *J. L. Massera:* Remarks on the periodic solutions of differential equations, Bol. Fac. Ingen. Montevideo *2* (1950), 43-53.

[42] *F. B. Fuller:* Note on trajectories on a solid torus, Ann. Math. *56*: 3 (1952), 438—439.

[43] *A. A. Андронов, А. Г. Майер:* Задача Вишнеградского в теории прямого регулирования, Автоматика и телемеханика *8*: 5 (1947).

[44] *K. O. Friedrichs*: On nonlinear vibrations of third order, Studies in non linear vibration theory, New York University (1946), 65—103.

[45] *L. L. Rauch:* Oscillation of a third order nonlinear autonomous system, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton (1950), 39—88.

[46] *E. Levi:* Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei systemi di equazioni differenziali lineari omogene, Atti Ac. d. Lincei *8* (1950), 465—470; *9* (1950), 36—51.

[47] *И. М. Рапопорт:* Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений, ДАН *78*: 6 (1951), 1097—1100.

[48] *N. Levinson:* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, Duke Math. Journ. *15* (1948), 111—126.

[49] *Б. П. Демидович:* Об одном критическом случае устойчивости в смысле Ляпунова, ДАН *82*: 6 (1950), 1005—1008.

[50] *Б. П. Демидович:* Об устойчивости в смысле Ляпунова линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. сб. *28* (70): 3 (1951), 659—684.

[51] *Н. И. Гаврилов:* Об устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений, ДАН *84*: 2 (1952), 425—429.

[52] *Р. Э. Виноград:* Неустойчивость характеристических показателей правильных систем, ДАН *91*: 5 (1953), 999—1002.

[53] *G. Ascoli:* Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità, Atti Acad. d. Lincei *9* (1950), 129—134.

[54] *А. Д. Горбунов:* Об одном получении оценок решений системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений, Вестник Московского университета, ч. *10* (1950), 19—26.

[55] *А. Д. Горбунов:* О некоторых свойствах решений системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений, Вестник Московского университета, ч. *6* (1951), 3—15.

[56] *А. Д. Горбунов:* О некоторых свойствах решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Вестник Московского университета ч. *12* (1952), 3—15.

[57] *Р. Э. Виноград:* Некоторые критерии ограниченности решений системы двух линейных дифференциальных уравнений, ДАН *82*: 2 (1952), 265—268.

[58] *Р. Э. Виноград:* Об одном критерии неустойчивости в смысле Ляпунова, ДАН *84*: 2 (1952), 501—504.

Přeložil *Otto Vejvoda,* Praha.