

Otto Vejvoda

O stabilitě integrálů soustavy diferenciálních rovnic v komplexním oboru

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 81 (1956), No. 3, 355

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117197>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

REFERÁTY

O STABILITĚ INTEGRÁLŮ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC V KOMPLEXNÍM OBORU

(Vlastní referát o přednášce prosloušené v Matem. obci pražské dne 13. února 1956.)

Budiž dána soustava

$$\dot{z}_j = \sum c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, \dots, z_n), \quad (1)$$

kde  $z_j$  jsou komplexní funkce reálné proměnné  $t$ ,  $c_{jk}$  jsou komplexní konstanty a komplexní funkce  $Z_j$  vyhovují těmto podmínkám:

- a)  $Z_j$  jsou definovány a jsou spojité v oboru  $D: \|z\| \leq H$  ( $H > 0$ ),  $t \geq 0$ ,
- b)  $\|Z_j\| \leq K\|z\|$  ( $K > 0$ ) (odtud již plyne  $Z_j(t, 0, \dots, 0) = 0$ ),
- c)  $\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{Z_j}{\|z\|} = 0$  pro  $\|z\| \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

Soustavou (1) se za těchž předpokladů zabýval již PERRON a odvodil věty teorie prvního přiblížení, t. j. věty, které nám dovolují rozhodnout o stabilitě triviálního řešení soustavy (1) na základě soustavy prvního (lineárního) přiblížení  $\dot{z}_j = \sum c_{jk} z_k$ .

Takové věty se nám podaří odvodit, jestliže buď všechny kořeny charakteristické rovnice

$$|c_{jk} - \rho \delta_{jk}| = |C - \rho E| = 0$$

mají záporné reálné části (pak je triviální řešení soustavy (1) asymptoticky stabilní), nebo má-li alespoň jeden kořen kladnou reálnou část (pak je triviální řešení nestabilní).

Perron k odvození vět z teorie prvního přiblížení užil vět o závislosti integrálů soustavy (1) na pravých stranách a na počátečních podmínkách (při této metodě nehraje žádnou roli, zda jsou  $z_j$  reálné nebo komplexní).

V přednášce bylo naznačeno, jakým způsobem lze týchž výsledků dosáhnout pomocí druhé Ljapunovovy metody.

Případy, kdy kořeny charakteristické rovnice mají vedle kořenů se zápornou reálnou částí alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a žádný kořen s kladnou reálnou částí, jsou „kritické“, t. j. nerozhodnutelné pomocí vět teorie prvního přiblížení. Tyto případy v komplexním oboru zatím nebyly studovány.

V dalším budeme předpokládat, že  $Z_j$  jsou holomorfní funkce  $z_1, \dots, z_n$  začínající členy alespoň 2.st., nezávislé na  $t$ . Ukazuje se, že v případě jednoho nulového kořene je triviální řešení soustavy (1) (až na jistý výjimečný případ, kdy je stabilní) vždy nestabilní. (To plyne snadno odtud, že triviální řešení rovnice  $\dot{z} = c_k z^k + \dots$ , ( $c_k \neq 0$ ) je vždy nestabilní.) V případě jednoho ryze imaginárního kořenu je naopak triviální řešení vždy stabilní. To opět snadno plyne odtud, že triviální řešení rovnice  $\dot{z} = i\mu z + c_2 z^2 + \dots$  ( $\mu$  je reálné) je stabilní; dokonce platí, že všechna řešení v dostatečně malém okolí počátku jsou periodická s touž periodou  $2\pi/\mu$ . Částečně se podařilo též rozřešit případ dvou ryze imaginárních kořenů, ale výsledek je příliš složitý na to, aby zde mohl být uveden.

*Otto Vejvoda, Praha.*