Václav Havel

Rozklady prvků ve svazech splňujících podmínku pro klesající řetězce

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 1, 1--16

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117143`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 80 * PRAHA, 31. III. 1955 * ČÍSLO 1

ČLÁNKY

ROZKLADY PRVKŮ VE SVAZECH SPLŇUJÍCÍCH PODMÍNKU PRO KLESAJÍCÍ ŘETĚZCE

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 16. března 1954.) DT: 519.5

ϱ-rozkladem je nazváno spojení $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ $n \geqq 2$ prvků daného svazu, když platí $a_i \varrho \bigvee_{a_j \in \bar{A}} a_i$ pro každé i a pro každou neprázdnou množinu $\bar{A}$, obsaženou v množině $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ (ϱ je symetrická binární relace mezi prvky svazu). V tomto článku zkoumá autor takovéto ϱ-rozklady ve svazech s podmínkou pro klesající řetězce. Obecné vlastnosti jsou užity na některé speciální typy zmíněných rozkladů.

§ 1. Úvod. V tomto článku jsou zkoumány vzájemné vztahy mezi t. zv. vlastními, direktními a silnými rozklady prvků ve svazech s minimální podmínkou. V § 2 je zaveden pojem ϱ-rozkladu, který všecky tři typy rozkladů zahrnuje a skýtá možnost vysloviti některé obecné věty, jež se dají specialisovat pro jednotlivé případy rozkladů. V § 3 jsou vyšetřovány vlastní rozklady. § 4 je věnován direktním rozkladům; je odvozena nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval právě jeden ϱ-rozklad za jistých omezujících podmínek. Theorémy 3 a 4 ukazují, jaký je rozdíl mezi direktními rozklady v modulárních a nemodulárních svazech. Kromě t. zv. silných rozkladů, jež jsou zkoumány v § 5, jsou studovány ještě v jistém smyslu k nim duální ϱ_4-rozklady a ukázána vzájemná souvislost mezi posledními dvěma typy rozkladů.

V dodatku jsou zkoumány některé podmínky pro to, aby Zassenhausova konstrukce, užitá na dané dva řetězce, neposkytovala vlastní zjemnění a jsou provedeny dvě jednoduché aplikace na ϱ-rozklady.

§ 2. Základní definice. Všude v tomto článku (s výjimkou první části dodatku) předpokládáme svazy, splňující podmínku pro klesající řetězce ([1], str. 37). Proto existuje nulový prvek O.

Relací ϱ budeme rozumět symetrickou binární relaci, definovanou mezi prvky svazu. Výraz

(1) $$c = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \quad (n \geqq 2)$$

nazveme rozkladem prvku c ve složky $a_1, \ldots, a_n$. Označme ještě $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $A_i = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$.

Definice 1. *Platí-li* $\bigvee_{a_j \in A_i'} a_j \, \varrho \, a_i$ *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, n \geqq 2$, *a pro každou neprázdnou množinu* $A_i' \subset A_i$, *pak nazveme* (1) *ϱ-rozkladem.*

Definice 1'. *Platí-li* $\bigvee_{a_i \in A_I} a_i \, \varrho \bigvee_{a_j \in A_{II}} a_j$ *pro každé dvě neprázdné disjunktní množiny* $A_I, A_{II} \subset A$, *pak* (1) *nazveme význačným ϱ-rozkladem.*

Důsledek. Každý význačný ϱ-rozklad je ϱ-rozkladem. Je-li (1) ϱ-rozklad, resp. význačný ϱ-rozklad, pak také $\bigvee_{a_i \in A'} a_i$ (kde $A' \subset A$ je alespoň dvouprvková) je ϱ-rozklad, resp. význačný ϱ-rozklad.

Definice 2. *Relace ϱ je typu I, když platí implikace:* $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_i \, \varrho \, a_{i+1}$ (*pro* $i = 1, \ldots, n - 1$) $\Rightarrow$ (1) *je ϱ-rozklad.*

Lemma 1. *Je-li ϱ typu I, pak každý ϱ-rozklad je význačný ϱ-rozklad.*

Důkaz. Nechť (1) je ϱ-rozklad. Buďte A_I, A_{II} dvě neprázdné disjunktní podmnožiny v A. Protože nezáleží na očíslování prvků a_j, lze předpokládat, že $A_I = \{a_1, \ldots, a_j\}$, $A_{II} = \{a_{j+1}, \ldots, a_{j+k}\}$, $j + k \leqq n$. Podle definice 1 je

$$[(a_1 \vee \ldots a_j) \vee a_{j+1} \vee \ldots \vee a_{j+i}] \, \varrho \, a_{j+i+1} \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, k - 1 \, .$$

Odtud dostaneme užitím definice 2, že $(a_1 \vee \ldots \vee a_j) \vee a_{j+1} \vee \ldots \vee a_{j+k}$ je ϱ-rozklad (pro $j, k \geqq 2$), takže jest

$$\bigvee_{a_i \in A_I} a_i \, \varrho \bigvee_{a_l \in A_{II}} a_l \, .$$

Pro $j = 1$ nebo $k = 1$ platí předchozí relace rovněž.

Definice 3. *Relace ϱ je typu II, když platí implikace:* $x \, \varrho \, y \Rightarrow$ *pro každé nenulové* $x' \leqq x$ *platí* $x' \, \varrho \, y$.

Uvažujme dále tuto implikaci:

(2) Jsou-li $\bigvee_{\substack{j=1,\ldots,k \\ j \neq \alpha}} x_j$ ϱ-rozklady pro každé $\alpha = 1, 2, \ldots, k$ a platí-li dále $\bigvee_{j=1}^{k-1} x_j \, \varrho \, x_k$, pak $\bigvee_{j=1}^{k} x_j$ je ϱ-rozklad.

Lemma 3. *Nechť ϱ je typu II a splňuje* (2). *Nechť* x non ϱ *0 pro každé* x. *Pak platí implikace z definice* 2.

Důkaz. Nechť platí $a_1 \, \varrho \, a_2$, $a_1 \vee a_2 \, \varrho \, a_3, \ldots, a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1} \, \varrho \, a_n$. Protože ϱ je typu II a protože x non ϱ *0*, platí také

(3) $\bigvee_{a_l \in A^*} a_l \ \varrho \ a_{i+1}$ pro každou neprázdnou množinu $A^* \subset \{a_1, \ldots, a_i\}$. Nechť všecky rozklady, utvořené z každých k prvků množiny A jsou ϱ-rozklady. Podle (3) platí pro každý takový rozklad $a_{\beta_1} \vee \ldots \vee a_{\beta_k}$ (kde $k, \beta_1, \ldots, \beta_k$ jsou přirozená čísla, pro něž platí $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k \leq n$) nutně $a_{\beta_1} \vee \ldots \vee a_{\beta_{k-1}} \ \varrho \ a_{\beta_k}$. Tedy podle (2) je ϱ-rozkladem každý rozklad, utvořený z $k + 1$ prvků množiny A. Podle (3) plyne $a_i \ \varrho \ a_j$ pro kterékoliv prvky s různými indexy. Tedy úplnou indukcí podle k dostaneme, že (1) je ϱ-rozklad, což bylo dokázat.

Předpoklad x non $\varrho \ 0$ byl podstatný, jak plyne z následujícího příkladu: Nejprve definujme relaci ϱ. Nechť a_1, a_2 jsou atomy. Nechť platí $0 \ \varrho \ a_1$, $a_1 \ \varrho \ 0$, $a_1 \ \varrho \ a_2$, $a_2 \ \varrho \ a_1$; pro kteroukoliv jinou dvojici nechť relace ϱ neplatí. Relace ϱ je symetrická, je typu II a splňuje (2) (předpoklad v implikaci je zde prázdný). Platí $0 \ \varrho \ a_1$, $0 \vee a_1 \ \varrho \ a_2$, přesto však $0 \vee a_1 \vee a_2$ není ϱ-rozklad, neboť 0 non $\varrho \ a_2$.

Lemma 3. *Nechť ϱ je typu I. Jsou-li* a) *rozklady* $a_i = \bigvee_{j=1}^{r_i} a_{ij}$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$ *ϱ-rozklady anebo je-li* $r_i = 1$ *a je-li* b) *rozklad* (1) *ϱ-rozkladem, pak také* $c = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{r_i} a_{ij}$ *je ϱ-rozklad.*

Dokážeme nejprve *pomocnou poučku:*

Nechť ϱ je typu I. Nechť rozklady $c = a \vee b$, $a = \bigvee_{i=1}^{r} a_i$, $b = \bigvee_{j=1}^{s} b_j$ *jsou ϱ-rozklady. Pak také* $c = \bigvee_{i=1}^{r} a_i \vee \bigvee_{j=1}^{s} b_j$ *je ϱ-rozklad.*

Důkaz. Poněvadž $c = a \vee b$, $b = \bigvee_{j=1}^{s} b_j$ jsou ϱ-rozklady, plyne z definice 1 $b_s \ \varrho \ b_{s-1}$, $b_s \vee b_{s-1} \ \varrho \ b_{s-2}, \ldots, b_s \vee b_{s-1} \vee \ldots \vee b_2 \ \varrho \ b_1$, $b \ \varrho \ a$. Tedy podle definice 2 je také $c = a \vee b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_s$ ϱ-rozklad.

Poněvadž $a = \bigvee_{i=1}^{r} a_i$ je ϱ-rozklad, platí podle definice 1 vztahy $a_1 \ \varrho \ a_2$, $a_1 \vee a_2 \ \varrho \ a_3, \ldots, a_1 \vee \ldots \vee a_{r-1} \ \varrho \ a_r$.

Protože $c = a \vee b_1 \vee \ldots \vee b_s$ je ϱ-rozklad, platí podle definice 1 $a \ \varrho \ b_1$, $a \vee b_1 \ \varrho \ b_2$, $a \vee b_1 \vee b_2 \ \varrho \ b_3, \ldots, a \vee b_1 \vee \ldots \vee b_{s-1} \ \varrho \ b_s$. Tedy podle definice 2 také $c = \bigvee_{i=1}^{r} a_i \vee \bigvee_{i=1}^{s} b_j$ ϱ-rozklad, což bylo dokázat.

Z pomocné poučky plyne ihned úplnou indukcí tvrzení lemmatu 3.

§ 3. Relace ϱ_1. Definice 4. *Prvek c je ϱ-(ne)rozložitelný, (ne)existuje-li ϱ-rozklad* (1).

Definice 5. *Symetrická relace ϱ_1 nechť je dána takto:*

$$x \ \varrho_1 \ y \Leftrightarrow x \text{ non} \gtreqless y$$

([1], str. 93; [3], kap. 1, oddíl 4) *O. Ore* nazývá ϱ_1-rozklady vlastními rozklady.

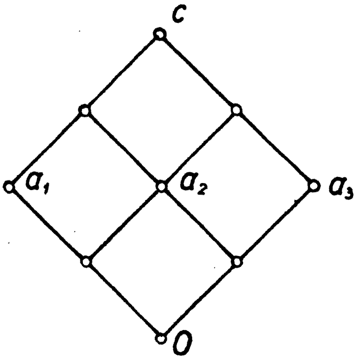
Lemma 4. 1. *Každý ϱ_1-rozklad je význačným ϱ_1-rozkladem.*

2. *Existuje svaz, v němž ϱ_1 není typu I (typu II).*

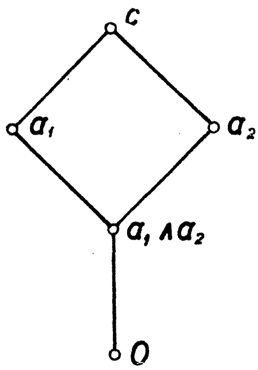
3. *Platí ekvivalence* $x \,\varrho_1\, y \Leftrightarrow \begin{cases} x \vee y > x \\ x \vee y > y \end{cases}.$

4. *Každý ϱ_1-rozložitelný prvek je možno ϱ_1-rozložit v ϱ_1-nerozložitelné složky.*

5. *Platí-li* $a_i \,\varrho_1 \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n \geqq 2$, *pak* (1) *je ϱ_1-rozklad.*



Obr. 1.



Obr. 2.

Důkaz. 1. Nechť je dán ϱ_1-rozklad (1). Není-li to význačný ϱ_1-rozklad, pak existují neprázdné disjunktní množiny $A_I, A_{II} \subset A$ tak, že platí $\bigvee_{a_\alpha \in A_I} a_\alpha \leqq \bigvee_{a_\beta \in A_{II}} a_\beta$. Pak ale platí $a_\alpha \leqq \bigvee_{a_\beta \in A_{II}} a_\beta$ pro každé $a_\alpha \in A_I$, což odporuje předpokladu, že (1) je ϱ_1-rozklad.

2. Uvažujme svaz, jehož diagram je na obr. 1. Platí $a_1 \,\varrho_1\, a_2$, $a_1 \vee a_2 \,\varrho_1\, a_3$. Protože $a_2 < a_1 \vee a_3$, není $c = a_1 \vee a_2 \vee a_3$ ϱ_1-rozkladem. Tedy v uvažovaném svazu není ϱ_1 typu I.

Dále uvažujme svaz, jehož diagram je na obr. 2. Platí $a_1 \,\varrho_1\, a_2$. Pro prvek $a_1 \wedge a_2$ platí $0 < a_1 \wedge a_2 < a_1$, neplatí však $a_1 \wedge a_2 \,\varrho_1\, a_2$. Tedy v uvažovaném svazu není ϱ_1 typu II.

3. Důkaz je zřejmý.

4. Důkaz bude proveden v rámci důkazu theorému 1.

5. Nechť platí $a_i \,\varrho_1 \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ pro $i = 1, 2, \ldots, n \geqq 2$. Kdyby (1) nebyl ϱ_1-rozklad, pak by existovala neprázdná množina $A' \subset A_i$ tak, že by platilo buď $a_i \leqq \bigvee_{a_\gamma \in A'} a_\gamma$ anebo $a_i \geqq \bigvee_{a_\gamma \in A'} a_\gamma$. První nerovnost ihned odporuje předpokladu, ze druhé pak plyne $a_i \geqq a_\gamma$ pro každé $a_\gamma \in A'$, což je opět ve sporu s předpokladem.

Theorém 1. *Relace ϱ nechť je typu I a nechť $x \varrho y \Rightarrow x \varrho_1 y$. Pak každý ϱ-rozložitelný prvek se dá ϱ-rozložit ve vesměs ϱ-nerozložitelné složky.*

Důkaz. Nechť je dána relace ϱ a nechť platí $x \varrho y \Rightarrow x \varrho_1 y$. Dále budiž dán ϱ-rozložitelný prvek e a jeho libovolný ϱ-rozklad $e = \bigvee_{i=1}^{r} e_i$. Podle tvrzení 3 lemmatu 4 platí pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$ nerovnost $e_i < e$. Prvek e_i je buďto ϱ-nerozložitelný, pak jej vybereme, anebo existuje ϱ-rozklad $e_i = \bigvee_{j=1}^{\tau_i} e_{ij}$, kde $e_{ij} < e_i$ pro všecka $j = 1, 2, \ldots, \tau_i$. Buďto je prvek e_{ij} ϱ-nerozložitelný, pak jej vybereme, anebo existuje ϱ-rozklad $e_{ij} = \bigvee_{k=1}^{\sigma_{ij}} e_{ijk}$, kde $e_{ijk} < e_{ij}$ pro $k = 1, 2, \ldots, \sigma_{ij}$. V tomto procesu pokračujeme. Poněvadž daný svaz splňuje podmínku pro klesající řetězce, má tento proces nutně konečný počet kroků. Ze všech vybraných ϱ-nerozložitelných prvků utvoříme rozklad. Nechť za prvé platí $x \varrho y \Leftrightarrow x \varrho_1 y$. V uvažovaném rozkladu vyškrtneme všecky složky, obsažené ve spojení ostatních. Zbylý rozklad je nutně ϱ_1-rozklad. Tím je dokázáno tvrzení 4 z lemmatu 4.

Nechť za druhé ϱ je typu I. Pak dle lemmatu 3 je uvažovaný rozklad ϱ-rozkladem. Theorém je dokázán.

§ 4. Relace ϱ_2. Věta o unicitě.

Definice 6. *Relace ϱ_2 nechť je charakterisována takto: $x \varrho_2 y \Leftrightarrow x \wedge y = 0$ pro nenulové x, y; x non ϱ_2 0 pro každé x.*

Birkhoff ([1], str. 94) užívá pro ϱ_2-rozklady symboliky $c = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$. ϱ_2-rozklady bývají nazývány direktní. Srovnej také *Ore* ([3], kap. 2, oddíl 1)!

Z definice 6 plyne, že 0 nemůže být složkou žádného ϱ_2-rozkladu a že $x \varrho_2 y \Rightarrow x \varrho_1 y$.

Lemma 5. *Relace ϱ_2 je ekvivalentní s relací ϱ_1 typu II.*

Důkaz. 1. Nechť platí $x \varrho_2 y$, takže $x, y \neq 0, x \wedge y = 0$. Tedy platí x non $\gtreqless y$. Nechť $0 < x' < x$. Pak $x' \wedge y = 0$, tedy $x' \varrho_2 y$, a tudíž i $x' \varrho_1 y$.

2. Nechť ϱ_1 je typu II a $x \varrho_1 y$, takže $x, y \neq 0$, $x \wedge y < x$. Kdyby platilo $x \wedge y > 0$, pak (protože ϱ_1 je typu II) by bylo $x \wedge y \varrho x$, což je spor. Proto $x \wedge y = 0$, čili $x \varrho_2 y$.

Důsledek. Platí-li pro nenulové prvky $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ rovnice $0 = a_i \wedge (\bigvee_{a_j \in A_i} a_j)$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, pak (1) je ϱ_2-rozklad.

Lemma 6. *Existuje svaz a v něm ϱ_1-rozklad, jenž není ϱ_2-rozkladem.*

Důkaz. Mějme opět svaz, jehož diagram je na obr. 2. Platí $a_1 \varrho_1 a_2$. Rozklad $a_1 \vee a_2$ je tedy ϱ_1-rozklad, není to však ϱ_2-rozklad, neboť $a_1 \wedge a_2 > 0$.

Pro další nazveme zjemněním rozkladu (1) rozklad $c = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{\tau_i} a_{ij}$, kde $a_i = \bigvee_{j=1}^{\tau_i} a_{ij}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Theorém 2. *Relace ϱ nechť je typu I a splňuje implikaci $x \varrho y \Rightarrow x \varrho_1 y$.*

Tvrzení 1. *Existuje-li právě jeden (až na uspořádání složek) ϱ-rozklad prvku c v ϱ-nerozložitelné složky*

(4) $c = e_1 \vee e_2 \vee \ldots \vee e_n$, *pak pro každé dva ϱ-rozklady*

(5a) $c = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_r$,

(5b) $c = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_s$ *platí rovnice*

(6a) $a_i = \bigvee_{j=1}^{s} (a_i \wedge b_j)$ *pro* $i = 1, \ldots, r$,

(6b) $b_j = \bigvee_{i=1}^{r} (a_i \wedge b_j)$ *pro* $j = 1, \ldots, s$.

Tvrzení 2. *Je-li ϱ typu II a platí-li pro každé dva ϱ-rozklady* (5a), (5b) *rovnice* (6a), (6b), *pak existuje ϱ-rozklad, který je společným zjemněním rozkladů* (5a), (5b). *Speciálně existuje právě jeden ϱ-rozklad prvku c v ϱ-nerozložitelné složky.*

Důkaz tvrzení 1. Nechť jsou splněny zmíněné předpoklady.

Nejprve dokážeme pomocnou poučku:

Pro každý ϱ-rozklad $c = \bigvee_{i=1}^{l} g_i$ platí $g_i = \bigvee_{e_\mu \in M_i} e_\mu$ (pro $i = 1, \ldots, l$) kde $M_1 \cup \cup M_2 \cup \ldots \cup M_l$ je rozklad množiny $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ na neprázdné disjunktní části.

Prvek g_i je totiž buďto ϱ-nerozložitelný anebo existuje jeho ϱ-rozklad v ϱ-nerozložitelné složky (podle theorému 2) $g_i = \bigvee_{\gamma=1}^{\tau_i} p_\gamma$. V případě, že g_i je ϱ-nerozložitelný, položme $\tau_i = 1$. Podle lemmatu 3 musí být $p_\gamma \in E$ pro každé $\gamma = 1, \ldots, \tau_i$. Tedy při vhodném označení lze psát $p_\gamma = e_{(i,\gamma)}$ ($\gamma = 1, \ldots, \tau_i$; dvojice $(i, 1), (i, 2), \ldots, (i, \tau_i)$ jsou přirozená čísla, pro něž platí $1 \leqq (i, 1) < < (i, 2) < \ldots < (i, \tau_i) \leqq n$). Bez omezení obecnosti nechť platí $e_1 \leqq g_1 \wedge g_2$. Nechť $1 < (1, 1)$. Pak $e_1 \leqq \bigvee_{\gamma=1}^{\tau_1} e_{(1,\gamma)}$. To ale odporuje předpokladu, že (4) je ϱ_1-rozklad. Tedy $1 = (1, 1)$ a obdobně $1 = (2, 1)$.

Sestrojme rozklad $c = e_1 \vee e_{(1,2)} \vee \ldots \vee e_{(1,\tau_1)} \vee e_1 \vee e_{(2,2)} \vee \ldots \vee e_{(2,\tau_2)} \vee g_3 \vee \vee \ldots \vee g$. Toto zjemnění ϱ-rozkladu $c = \bigvee_{i=1}^{l} g_i$ je dle lemmatu 3 opět ϱ-rozkladem. Avšak tento rozklad není ϱ_1-rozkladem, neboť obsahuje dvakrát tutéž složku e_1. Tedy neplatí $e_1 \leqq g_1 \wedge g_2$. Máme celkem výsledek, že e_i non$\leqq g_j \wedge g_k$ pro $i = 1, \ldots, n$ a pro různá i, j, nabývající hodnot $1, 2, \ldots, l$. Pomocná poučka je dokázána.

Nechť (5a), (5b) jsou ϱ-rozklady. Předně platí $\bigvee_{j=1}^{s} (a_i \wedge b_j) \leq a_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Za druhé nechť $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$ je ten rozklad množiny E v neprázdné disjunktní části, pro něž $a_i = \bigvee_{e_\alpha \in A_i} e_\alpha$. Budiž $\bigcup_{i=1}^{s} B_i$ ten rozklad množiny v neprázdné disjunktní části, pro něž platí $b_i = \bigvee_{e_\beta \in B_i} e_\beta$ pro $i = 1, \ldots, s$. Je-li $A_i \cap B_j \neq 0$, pak platí $a_i \wedge b_j = (\bigvee_{e_\alpha \in A_i} e_\alpha) \wedge (\bigvee_{e_\beta \in \beta_j} e_\beta) \geq \bigvee_{e_\delta \in A_i \cap B_j} e_\delta$. Je-li $A_i \cap B_j = 0$, pak položíme $\bigvee_{e_\delta \in A_i \cap B_j} e_\delta = 0$. Dále platí $\bigcup_{j=1}^{s} (A_i \cap B_j) = A_i \cap (\bigcup_{j=1}^{s} B_j) = A_i \cap E = A_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Tedy dále $\bigvee_{j=1}^{s} (a_i \wedge b_j) = \bigvee_{j=1}^{s} \{(\bigvee_{e_\alpha \in A_i} e_\alpha) \wedge (\bigvee_{e_\beta \in B_j} e_\beta)\} \geq \bigvee_{j=1}^{s} \bigvee_{e_\delta \in A_i \cap B_j} e_\delta = \bigvee_{e_\delta \in A_i} e_\delta = a_i$.

Máme výsledek $\bigvee_{j=1}^{s} (a_i \wedge b_j) \geq a_i$. Tedy celkem $\bigvee_{j=1}^{s} (a_i \wedge b_j) = a_i$. Platí tedy rovnice (6a). Obdobně dokážeme rovnice (6b).

Důkaz tvrzení 2. Nechť platí předpoklady pro tvrzení 2. Pro jisté pořadí $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,r}$ prvků $1, 2, \ldots, r$ a pro jistý index $\tau_i = 1, 2, \ldots, r$ platí pak $a_i \wedge b_{\alpha_{i,h}} > 0$ (pro $h = 1, 2, \ldots, \tau_i$) a dále $a_i \wedge b_{\alpha_{i,h}} = 0$ pro $h = \tau_i + 1, \ldots, r$. Je-li $\tau_i = r$, pak rovnice nepřichází v úvahu. Máme nyní dva případy:

Buďto je $\tau_i = 1$, a pak $a_2 = a_i \wedge b_{\alpha_{i,1}}$, z čehož plyne $a_i \leq b_{\alpha_{i,1}}$, anebo je $\tau_i \neq 1$, a pak z toho, že (5b) je ϱ-rozklad a že ϱ je typu II dostáváme, že také $c = \bigvee_{i=1}^{r} \bigvee_{h=1}^{\tau_i} (a_i \wedge b_{\alpha_{i,h}})$ je ϱ-rozklad.

Předpokládejme dále, že prvky $a_1, a_2, .., a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s$ jsou ϱ-nerozložitelné, což lze učinit podle věty 2. Pak platí $\tau_i = 1$, $a_i \leq b_{\alpha_{i,1}}$ pro každé $i = 1, \ldots, r$. Dále platí $c = \bigvee_{j=1}^{s} b_j \geq \bigvee_{j=1}^{r} b_{\alpha_{j,1}} \geq \bigvee_{j=1}^{r} a_j = c$. Tedy $\bigvee_{j=1}^{s} b_j = \bigvee_{j=1}^{r} b_{\alpha_{j,1}}$. Kdyby platilo $s > r$, pak by existoval index w (různý od $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_r$, a rovný některému z čísel $1, 2, \ldots, s$) tak, že $b_w \leq \bigvee_{j=1}^{r} b_{\alpha_{j,1}}$. Rozklad (5b) by nebyl ϱ_1-rozkladem. Tedy platí $s = r$. Při vhodném označení platí pak rovnost $i = \alpha_{i,1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$. Při tomto označení tedy jest $a_i \leq b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$.

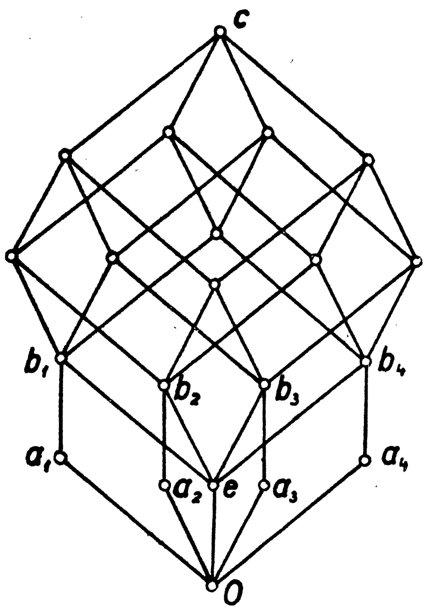
Provedeme-li předchozí úvahy při záměně obou rozkladů (5a), (5b), dostaneme $a_i \geq b_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Tedy celkem $a_i = b_i$ pro $i = 1, \ldots, r$, čímž je tvrzení 2 dokázáno. Je otázka, do jaké míry lze zeslabit předpoklad, že ϱ je typu II.

Theorém 3. *Existuje konečný nemodulární svaz S s ϱ_2-rozkladem $c = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4$ tak, že platí*

(7) $e = (a_i \vee a_j) \wedge (a_k \vee a_l) > 0$ *pro jakoukoliv permutaci i, j, k, l z prvků 1, 2, 3, 4.*

Důkaz. Na obrazci 3 je diagram svazu S. Množina prvků $x \geqq e$ tvoří v S podsvaz S', který je Booleovou algebrou, vytvořenou prvky $b_1, \ldots, b_4$.

Pak zřejmě platí vztahy (7). Z diagramu je patrné, že $a_i \wedge (\bigvee_{j \neq i} a_j) = 0$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Tedy $c = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4$ je ϱ_2-rozklad.



Obr. 3.

Dokázaná věta se dá vyslovit také takto: v nemodulárním svazu nemusí být ϱ_2-rozklad význačným ϱ_2-rozkladem. V další části článku omezíme se na *modulární* svazy a nebudeme to zvláště zdůrazňovat.

Theorém 4. *Každý ϱ_2-rozklad je význačným ϱ_2-rozkladem.*

Důkaz. Buď dán ϱ_2-rozklad (1). Máme ukázat, že platí

(8) $(\bigvee_{a_\alpha \in A_I} a_\alpha) \wedge (\bigvee_{a_\beta \in A_{II}} a_\beta) = 0$

pro každé dvě neprázdné disjunktní množiny A_I, A_{II}, obsažené v A. Vyšetřujme nyní tyto dva výroky:

(M_i) (8) platí, když jedna z množin A_I, A_{II} má právě i prvků.

Zde jest $i = 1, 2, \ldots, n-1$ a zřejmě $M_i \Leftrightarrow M_{n-i}$.

(N_i) Jsou-li A', A^i, A neprázdné navzájem disjunktní množiny obsažené v A, při čemž A^i obsahuje právě i prvků, pak

(9) $(\bigvee_{a_\alpha \in A'} a_\alpha \vee \bigvee_{a_\xi \in A^i} a_\xi) \wedge (\bigvee_{a_\alpha \in A'} a_\alpha \vee \bigvee_{a_\beta \in A''} a_\beta) = \bigvee_{a_\alpha \in A'} a_\alpha$ (pro $i = 1, \ldots, n-2$).

(M_1) platí, protože (1) je ϱ_2-rozkladem. Dokážeme

(10,1) $(M_i) \Rightarrow (N_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

Dle (M_i) platí $\bigvee a_\xi \wedge (\bigvee a_\alpha \vee \bigvee a_\beta) = 0$. Užijeme modularity. Ze vztahu $\bigvee a_\alpha \leq \bigvee a_\alpha \vee \bigvee a_\beta$ ihned plyne (9) pro dané i. Dále dokážeme implikaci

(10,2) $(N_i) \Rightarrow (M_{i+1})$ pro $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

Nechť platí (N_i). V (9) volme $A' = \{a_k\}$, takže $a_k = (a_k \vee \bigvee a_\xi) \wedge (a_k \vee \bigvee a_\beta)$. Z modularity plyne $a_k = a_k \vee [(\bigvee a_\xi) \wedge (a_k \vee \bigvee a_\beta)]$, a tedy $a_k \geq (\bigvee a_\xi) \wedge \wedge (\bigvee a_\beta \vee a_k)$.

Vyberme nyní z A'' libovolný prvek a_l a nahraďme jej prvkem a_k. Ostatní prvky z A'' ponechme. Dostaneme tak množinu A'''. Aplikujme (9), kde za množiny A', A'', A^i vezmeme množiny $\{a_l\}$, A''', A^i. Platí $a_l = (a_l \vee \bigvee a_\xi) \wedge \wedge (a_l \vee \bigvee_{a_\gamma \in A'''} a_\gamma)$; z modularity opět plyne $a_l \geq (\bigvee a_\xi) \wedge (a_l \vee \bigvee a_\gamma)$, kde ovšem $a_l \vee \bigvee a_\gamma = a_k \vee \bigvee a_\beta$. Poněvadž platí $a_k \wedge a_l = 0$, jest $(\bigvee a_\xi) \wedge (a_k \vee \bigvee a_\beta) = 0$. Označení zřejmě neomezuje obecnost. Implikace (10,2) je dokázána.

Poněvadž (10,1), (10,2) implikují $(M_i) \Rightarrow (M_{i+1})$ a poněvadž platí (M_1), je dle úplné indukce věta dokázána. Z ní plyne tento důsledek:

(1) *je ϱ_2-rozklad, když a jen když prvky $a_1, \ldots, a_n$ vytvořují Booleovu algebru délky n.*

Důkaz. Existuje-li uvažovaná Booleova algebra, pak zřejmě (1) je ϱ_2-rozklad. Nechť tedy naopak (1) je ϱ_2-rozklad. Považujme prvky $a_1, \ldots, a_n$ za neprázdné disjunktní množiny. Svazové spojení lze považovat za sjednocení a také svazový průsek lze považovat za průnik na základě (M_i), (N_i). Tím je důkaz proveden.

Theorém 5. *Platí-li pro nenulové prvky $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$*

(11_i) $(a_1 \vee \ldots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$ pro $i = 1, \ldots, n-1$, *pak* (1) *je ϱ_2-rozklad. — Jinými slovy, relace ϱ_2 je typu I.*

Důkaz. Podle lemmatu 5 je ϱ_2 typu II. Lze tedy užít lemmatu 2. Předem nutno však dokázat implikaci (2), která v našem případě zní: Je-li $\bar{a}_i = \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ ϱ_2-rozklad pro každé i, pak také (1) je ϱ_2-rozklad. Důkaz hned provedeme.

Nechť platí předpoklad a neplatí závěr. Pak platí bez omezení obecnosti $a_1 \wedge \bar{a}_1 > 0$. Vyšetříme dvojím způsobem průsek $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n$. Dle modularity platí $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n = (\bar{a}_1 \wedge a_1) \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Nyní musí být $(\bar{a}_1 \wedge a_1) \vee (a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}) > < a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$, neboť v opačném případě platí místo nerovnosti rovnost a z té plyne $\bar{a}_1 \wedge a_1 \leq a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. To ale není možné, neboť $a_1 \wedge (a_2 \vee \vee \ldots \vee a_{n-1}) = 0$ podle předpokladu, že rozklad $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}$ je ϱ_2-rozklad (viz obr. 4).

Podle modularity platí $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n = (a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} \vee (a_n \wedge \bar{a}_n)$. Avšak podle (11_1) je $a_n \wedge \bar{a}_n = 0$, tedy $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n = a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$, což je spor s předchozím výsledkem, podle něhož místo rovnosti platí nerovnost. Implikace je dokázána, a tím i celá věta.

Poznámka. Věty 4, 5 jsme dokázali nezávisle na sobě. Jejich vzájemný poměr popisuje lemma 1, aplikované na ϱ_2. Z něho a z theorému 5 vyplývá theorém 4.

Podle theorému 1 je každý ϱ_2-rozložitelný prvek ϱ_2-rozložitelný na vesměs ϱ_2-nerozložitelné složky.

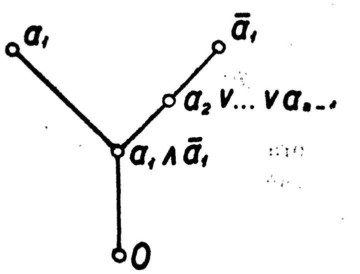
§ 5. **Relace ϱ_3.** Zavedeme mezi prvky svazu symetrickou binární relaci ϱ_3 touto definicí:

Definice 7. *Pro nenulová x, y jest $x\ \varrho_3\ y \Leftrightarrow (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$ pro každé p; x* non *$\varrho_3\ 0$ pro každé x.*

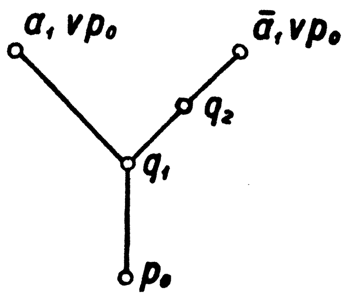
Srovnej ([3], kap. II, oddíl 3).

Důsledek: Položíme-li $p = 0$ dostaneme $x\ \varrho_3\ y \Rightarrow x\ \varrho_2\ y$.

Theorém 6. *Relace ϱ_3 je typu II i typu I.*



Obr. 4.



Obr. 5.

Důkaz. Nechť $x\ \varrho_3\ y$, $0 < x' \leq x$. Pak pro každé p platí $p \leq (x' \vee p) \wedge (y \vee p) \leq (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$, tedy platí $(x' \vee p) \wedge (y \vee p) = p$, a tedy $x'\ \varrho_3\ y$, takže relace ϱ_3 je typu II. Nechť za druhé platí $a_1\ \varrho_3\ a_2$, $a_1 \vee a_2\ \varrho_3\ a_3$ $\ldots$, $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}\ \varrho_3\ a_n$. Podle lemmatu 2 stačí dokázat implikaci: Je-li každý rozklad $\bar{a}_i = \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ ϱ_3-rozklad ($i = 1, \ldots, n$), pak také (1) je ϱ_3-rozklad.

Nechť platí premisa z implikace a neplatí její závěr. Pak existuje jistý prvek p_0 tak, že platí $p_0 < (a_1 \vee p_0) \wedge (\bar{a}_1 \vee p_0)$ (bez omezení obecnosti). Položme $q = (\bar{a}_1 \vee p_0) \wedge (\bar{a}_n \vee p_0)$, $q_1 = (\bar{a}_1 \vee p_0) \wedge (a_1 \vee p_0)$, $q_2 = p_0 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Z modularity plyne $q = q_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Kdyby dále platilo $q_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} = q_2$, pak $q_1 \leq q_2$, $q_1 \leq a_1 \vee p_0$, a tedy $q_1 \leq (a_1 \vee p_0) \wedge q_2$. Na druhé straně je zřejmá nerovnost $q_1 \geq q_2 \wedge (a_1 \vee p_0)$. Tedy celkem $q_1 = q_2 \wedge (a_1 \vee p_0)$. Dle předpokladu však $p_0 < q_1$, tedy $p_0 < q_2 \wedge (a_1 \vee p_0)$. To ale není možné, neboť $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}$ je ϱ_3-rozklad. Tedy platí $q_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} > q_2$ (viz obr. 5). Tedy konečně $q > q_2$.

Podle modularity platí dále $q = [(\bar{a}_n \vee p_0) \wedge (a_n \vee p_0)] \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Podle $\bar{a}_n\ \varrho_3\ a_n$ plyne z předchozího $q = q_2$, což je spor s předešlým $q > q_2$. Tedy ϱ_3 je typu I.

Poznámka. Podle lemmatu 1 je každý ϱ_3-rozklad význačným ϱ_3-rozkladem. Podle theorému 1 dá se každý ϱ_3-rozložitelný prvek ϱ_3-rozložit v ϱ_3-nerozložitelné složky.

Nyní dokážeme tuto *ekvivalenci* (viz [2], kap. I, odd. 4, věta 3):

(12) $(a_1 \wedge a_2) \vee a_3 = (a_1 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_3) \Leftrightarrow (a_1 \vee a_2) \wedge a_3 = (a_1 \wedge a_3) \vee \vee (a_2 \wedge a_3)$.

Důkaz. Z levé strany plyne ihned $[(a_1 \wedge a_2) \vee a_3] \wedge a_1 = (a_1 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee \vee a_3) \wedge a_1$. Z modularity a z toho, že $a_1 \wedge (a_1 \vee a_3) = a_1$, dostaneme $(a_1 \wedge a_2) \vee \vee (a_1 \wedge a_3) = a_1 \vee (a_2 \wedge a_3)$. Zcela obdobně dostaneme $(a_2 \wedge a_1) \vee (a_2 \wedge a_3) = = a_2 \wedge (a_1 \vee a_3)$. Z rovnice $(a_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) = a_1 \wedge (a_2 \vee a_3)$ plyne $(a_1 \wedge \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) \vee a_2 = [(a_2 \vee a_3) \wedge a_1] \vee a_2$. Na základě modularity a podle toho, že $(a_1 \wedge a_2) \vee a_2 = a_2$, dostaneme $(a_1 \wedge a_3) \vee a_2 = (a_2 \vee a_1) \wedge \wedge (a_2 \vee a_3)$. Obdobně dostaneme rovnost $(a_2 \wedge a_3) \vee a_1 = (a_1 \vee a_2) \wedge (a_1 \vee \vee a_3)$. Z kterékoliv z obou posledních rovnic plyne konečně $(a_1 \vee a_2) \wedge a_3 = = (a_1 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_3)$. Vzhledem ke svazové dualitě je ekvivalence dokázána.

Lemma 7. *Platí-li* $(x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$ *pro každé* p, *pak platí pro každé* p $(x \vee y) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y \wedge p)$.

Důkaz. Pro $p = 0$ dostaneme z předpokladu $x \wedge y = 0$. Tedy platí rovnost $(x \wedge y) \vee p = (x \vee p) \wedge (y \vee p)$. Dle (12) plyne hledaný závěr.

Theorém 7. *Každý* ϱ_3*-rozložitelný prvek dá se* ϱ_3*-rozložit právě jedním způsobem (až na uspořádání složek) v* ϱ_3*-nerozložitelné složky.*

Důkaz. Uvažujme ϱ_3-rozklady (5a), (5b). Pak platí rovnice (6a), (6b). Z (5b) totiž plyne dle lemmatu 7 $(a_i \wedge b_1) \vee (a_i \wedge b_2) = a_i \wedge (b_1 \vee b_2)$, $[a_i \wedge (b_1 \vee b_2)] \vee (a_i \wedge b_3) = a_i \wedge (b_1 \vee b_2 \vee b_3), \ldots, [a_i \wedge (b_1 \vee \ldots \vee b_{s-1})] \vee \vee (a_i \wedge b_s) = a_i \wedge c = a_i$.

Podobně pro (6b). Poněvadž platí $x \varrho_3 y \Rightarrow x \varrho_1 y$ a poněvadž ϱ_3 je typu I i typu II, plyne z druhého tvrzení theorému 2 hledaný závěr o unicitě.

§ 6. Relace ϱ_4. Definice 8. $x \varrho_4 y \Leftrightarrow x \varrho_1 y, (x \vee y) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y \wedge p)$ *pro každé* p.

Poznámka. Dle (12) platí spolu s rovností $(x \vee y) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y \wedge p)$ také rovnost $(x \wedge y) \vee p = (x \vee p) \wedge (y \vee p)$.

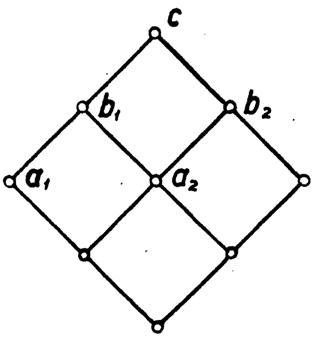
Theorém 8. *Platí-li* $a_i \varrho_4 \bigvee_{a_j \in A_i} a_j = \bar{a}_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n \geq 2$, *pak* (1) *je* ϱ_4*-rozklad.*

Důkaz. Nechť tedy platí $a_i \varrho_4 \bar{a}_i$ pro $i = 1, \ldots, n \geq 2$. Nechť platí (1). Tedy $c \wedge p = (\bar{a}_1 \wedge p) \vee (a_1 \wedge p)$. Nechť $d = \bigvee_{a_\omega \in A_2'} a_\omega$, kde $a_1 \in A_2' \subset A$. Jest $c \wedge p \wedge d = [(\bar{a}_1 \wedge p) \vee (a_1 \wedge p)] \wedge d$. Pro pravou stranu této rovnice platí podle modularity: $[(\bar{a}_1 \wedge p) \vee (a_1 \wedge p)] \wedge d = (a_1 \wedge p) \vee (\bar{a}_1 \wedge p \wedge d)$.

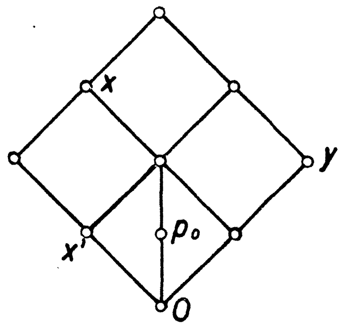
Z modularity plyne dále, že $d \wedge \bar{a}_1 = \bigvee_{a_\tau \in A_2''} a_\tau$, kde A_2'' vznikne z A_2' odebráním prvku a_1. Pro levou stranu uvažované rovnice platí $c \wedge p \wedge d = p \wedge d$, neboť $c > d$. Máme výsledek: $d \wedge p = (a_1 \wedge p) \vee (\bigvee_{a_\tau \in A_2''} a_\tau \wedge p)$, kde $d = a_1 \vee \bigvee_{a_\tau \in A_2''} a_\tau$. Protože označení indexy 1, 2 neomezuje obecnost, je tím věta dokázána.

Lemma 8. *Existuje svaz, v němž ϱ_4 není typu I (typu II).*

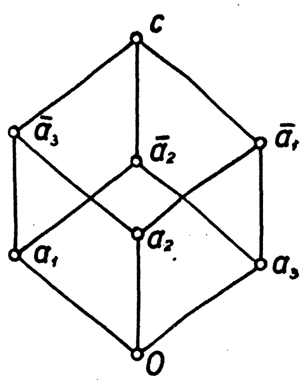
Důkaz. Dán svaz s diagramem na obr. 6. Pro libovolné tři prvky tohoto svazu platí distributivní zákony, tedy $c = b_1 \vee b_2$, $b_1 = a_1 \vee a_2$ jsou ϱ_4-rozklady (vztahy $b_1 \varrho_1 b_2$, $a_1 \varrho_1 a_2$ jsou splněny). Avšak $c = a_1 \vee a_2 \vee b_2$ není ϱ_4-rozklad, neboť $a_2 < b_2$. První tvrzení je tím dokázáno.



Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

Uvažujme nyní modulární svaz, jehož diagram je na obr. 7. Odstraníme-li prvek p_0, zbude distributivní podsvaz; platí v něm tedy $(x \wedge p) \vee (y \wedge p) = (x \vee y) \wedge p$, kde p je libovolný prvek tohoto podsvazu. Z diagramu se přesvědčíme, že platí také $(x \wedge p_0) \vee (y \wedge p_0) = (x \vee y) \wedge p_0$. Poněvadž je $x \varrho_1 y$, jest tedy $x \varrho_4 y$.

Prvek x' splňuje nerovnost $0 < x' < x$. Z diagramu je patrné, že $x' \wedge p_0 = 0$, $y \wedge p_0 = 0$, $(x' \vee y) \wedge p_0 = p_0$, a tedy $(x' \vee y) \wedge p_0 > (x' \wedge p_0) \vee (y \wedge p_0)$. Neplatí tedy $x' \varrho_4 y$. Druhé tvrzení je dokázáno.

Poznámka. Existují-li ϱ_4-rozklady (5a), (5b), pak platí rovnice (6a), (6b). Důkaz provedeme na základě rovnic (12) obdobně jako důkaz theorému 7. Je-li ϱ_4 typu II, pak platí $x \varrho_4 y \Rightarrow x \varrho_3 y$. Důkaz je zřejmý, neboť je $x \wedge y = 0$.

Dokážeme ještě jednu existenční větu:

Theorém 9. *Existuje relace ϱ taková, že ačkoliv platí $a_i \varrho \bar{a}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n \geqq 2$, přesto (1) není ϱ-rozkladem.*

Důkaz. Dán konečný distributivní svaz, jehož diagram je na obr. 8. Označíme symbolem $\mathrm{d}(x)$ dimensi prvku x.

Relaci ϱ definujme takto: $x \varrho y \Leftrightarrow x \varrho_1 y$, $|\mathrm{d}(x) - \mathrm{d}(y)| = 1$.

Tato relace je symetrická. Platí $a_i \varrho \bar{a}_i$ pro $i = 1, 2, 3$. Avšak $\mathrm{d}(a_i) = \mathrm{d}(a_j)$, a tedy a_i non $\varrho\, a_j$. Tedy $a_1 \vee a_2 \vee a_3$ není ϱ-rozklad. Věta je dokázána.

Dodatek

O nezjemněných Zassenhausových řetězcích

Věta 1. *Mějme v modulárním svazu S řetězce*

(1a) $a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b$,

(1b) $a = b_0 > b_1 > \ldots > b_n = b$.

Zassenhausova konstrukce, provedená na (1a), (1b) *nedává vlastní zjemnění, když a jen když existuje permutace τ čísel* 0, 1, ..., $n - 1$ *tak, že platí*

(2,1) $a_i \wedge b_{\tau(i)+1} = a_{i+1} \wedge b_{\tau(i)}$,

(2,2) $a_i \vee b_{\tau(i)+1} = a_{i+1} \vee b_{\tau(i)}$ pro $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Důkaz. Nechť Zassenhausova konstrukce neposkytuje vlastního zjemnění. Pak z [4], (věta 1.2, 1.6, 1.7) plyne existence permutace τ takové, že

$$a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/a_{i+1} \wedge b_{j+1} \overset{d}{\sim} b_j/b_{j+1},$$

$$a_i/a_{i+1} \overset{d}{\sim} a_i \vee b_j/a_{i+1} \vee b_{j+1} \underset{d}{\sim} b_j/b_{j+1},$$

kde $j = \tau(i)$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Odtud a z [5], (věta 2.8 a věta k ní duální) plyne (2,1), (2,2).

Nechť naopak platí (2,1), (2,2). Pak $a_{i,\tau(i)} = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_{\tau(i)}) = a_i \wedge (a_{i+1} \vee b_{\tau(i)}) = a_i$ podle (2,2) a $a_{i,\tau(i)+1} = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_{\tau(i)+1}) = a_{i+1}$ podle (2,1), takže Zassenhausova konstrukce nezjemní řetězec (1a), a tudíž ani (1b).

Věta 2. *Ve větě 1 jest $\tau(i) = n - i + 1$ (pro $i = 0, 1, \ldots, n - 1$), právě když místo rovnic* (2,1), (2,2) *platí rovnice*

(3,1) $a_{i+1} \wedge b_{n-i-1} = b$,

(3,2) $a_{i+1} \vee b_{n-i-1} = a$ *pro* $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Důkaz. Je-li $\tau(i) = n - i - 1$, pak (3,1), (3,2) dokážeme z (2,1), (2,2) snadno úplnou indukcí podle i.

Platí-li (3,1), (3,2), platí i (2,1), (2,2) pro $\tau(i) = n - i - 1$.

Věta 3. *Nechť S' je podsvaz, vytvořený v modulárním svazu S řetězci* (1a), (1b). *S' je konečná Booleova algebra délky n, právě když platí rovnice* (3,1), (3,2).

Důkaz. a) Z [1], (věta 5, str. 72) vyplývá, že S' je konečný distributivní podsvaz v S.

Nechť platí rovnice (3,1), (3,2). Z těchto rovnic a z modularity plyne

$\bigvee_{j=0}^{i} (a_j \wedge b_{n-j-1}) = b_{n-i-1}$,

$$\left(\bigvee_{j=0}^{i} (a_j \wedge b_{n-j-1})\right) \wedge (a_{i+1} \wedge b_{n-i-2}) = b_{n-i-1} \wedge a_{i+1} \wedge b_{n-i-2} =$$
$$= a_{i+1} \wedge b_{n-i-1} = b.$$

Podle theorému 5 jest rozklad $\bigvee_{i=0}^{n-1} (a_i \wedge b_{n-i-1})$ ϱ_2-rozklad. Z předchozího a z rovnice (3,2) snadno plyne, že je to rozklad prvku a.

Z předchozího plyne, že prvky $a_i \wedge b_{n-i-1}$ jsou generátory svazu S'. Tedy podle důsledku z theorému 4 je S' Booleovou algebrou délky n.

b) Předpokládejme, že S' je Booleova algebra délky n a že (1a), (1b) jsou její vytvořující řetězce. Snadno dokážeme toto tvrzení: Lze určit pořadí $c_1, \ldots, c_n$ atomů z S' tak, že $a_i = c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_{n-i}$, $b_i = c_{i+1} \vee c_{i+2} \vee \ldots \vee c_n$ pro $i = 1, \ldots, n-1$. Z tohoto tvrzení ihned plyne platnost rovnic (3,1), (3,2).

Nakonec provedeme dvě jednoduché aplikace. V modulárním svazu s podmínkou pro klesající řetězce buďte dány ϱ-rozklady

(4v) $u = v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_r$,

(4w) $u = w_1 \vee w_2 \vee \ldots \vee w_r$,

kde všecky složky jsou ϱ-nerozložitelné a kde platí buď $\varrho = \varrho_1$ nebo $\varrho = \varrho_2$.

Pak lze sestrojit řetězce

(5v) $u > v_2 \vee \ldots \vee v_r > v_3 \vee \ldots \vee v_r > \ldots > v_r \geqq w_1 \vee v_r$,

(5w) $u > w_1 \vee \ldots \vee w_{r-1} > w_1 \vee \ldots \vee w_{r-2} > \ldots > w_1 \geqq w_1 \vee v_r$.

Protože platí Kurošova-Oreova, resp. Oreova věta o náhradě (viz [1], str. 93—95), lze při vhodném očíslování sestrojit ϱ-rozklady

(6i) $u = w_1 \vee \ldots \vee w_i \vee v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r$ pro $i = 1, \ldots, r-1$.

Platí-li $\varrho = \varrho_2$, pak z theorému 4 plyne $(w_1 \vee \ldots \vee w_i) \wedge (v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r) = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, r-1$. Podmínky věty 2 jsou tedy splněny a můžeme vyslovit tuto větu:

Věta 4. *Jsou-li ϱ_2-rozklady (6i) odvozeny z ϱ_2-rozkladů (4v), (4w) s ϱ_2-nerozložitelnými složkami, pak Zassenhausova konstrukce, provedená na (5v), (5w), nedává vlastní zjemnění.*

V dalším budeme ještě vyšetřovat relaci ϱ_1.

Věta 5. *Nechť ϱ_1-rozklady (6i) jsou odvozeny z ϱ_1-rozkladů (4v), (4w) s ϱ_1-nerozložitelnými složkami a nechť*

a) *platí pro každé $i = 1, \ldots, r-1$*

(7i) $(w_1 \vee \ldots \vee w_i) \wedge (v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r) = w_1 \wedge v_r$.

Pak Zassenhausova konstrukce, užitá na (5v), (5w), neposkytuje vlastní zjemnění.

b) *Zassenhausova konstrukce, provedená na (5v), (5w) nedává vlastní zjemnění. Pak platí rovnice (10i) pro každé $i = 1, \ldots, r-1$.*

D ů k a z. Případ a) je zřejmý. Obraťme se tedy k případu b). Z rovnice (6,1) plyne $\tau(1) = r - 1$. Z rovnic (9, 2), ..., (9, $r-1$) plyne $\tau(i) \leqq r - i$. Kdyby platilo $\tau(i) < r - i$, pak $v_i \vee \ldots \vee v_r \leqq w_1 \vee \ldots \vee w_{r-\tau(i)} \vee v_{i+1} \vee \ldots \vee$

$\vee v_r$, a tedy buď $v_i \leqq w_1 \vee \ldots \vee w_{r-\tau(i)} \vee v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r$ (pro $i = 1, \ldots, r - 1$), což odporuje tomu, že ($6i$) je ϱ_1-rozklad anebo $v_r \leqq w_1 \vee \ldots \vee w_{r-\tau(r)}$, což odporuje tomu, že $(9, r - 1)$ je ϱ_1-rozklad. Tedy platí $\tau(i) = r - i$ pro každé $i = 1, \ldots, r$.

LITERATURA

[1] *G. Birkhoff*, Lattice theory, rev. edition, New York 1948.

[2] *O. Ore*, On the foundation of abstract algebra I, Ann. of Math. *36* (1935), str. 406 až 437.

[3] *O. Ore*, On the foundation of abstract algebra II, Ann. of Math. *37* (1937), str. 265 až 292.

[4] *L. Jánoš*, Свойства уплотнения Цассенхауза, Чехосл. мат. ж. *3* (*78*), str. 159—182.

[5] *Vl. Kořínek*, Svazy, v nichž platí obecně věta Jordan-Hölderova, Rozpravy II. tř. české akademie, ročník LIX, číslo 23.

Резюме.

РАЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СТРУКТУРЫ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ

Вацлав Гавел (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 16. III. 1954 г.)

В работе определяется симметрическое бинарное отношение ϱ для элементов данной структуры с условием минимальности. Соединение

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \quad (n > 1)$$

называется ϱ-разложением, если

$$a_i \varrho (a_{k_1} \vee a_{k_2} \vee \ldots \vee a_{k_j})$$

справедливо для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ и для каждого набора взаимно различных индексов $k_1, k_2, \ldots, k_j$ из $\{1, 2, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n\}$.

Мы получим *собственные ϱ-разложения*, если будет выполняться условие

$$x \varrho y \Leftrightarrow x \operatorname{non} \gtreqless y ,$$

прямые ϱ-разложения, если будет

$$x \varrho y \Leftrightarrow x \operatorname{non} \gtreqless y , \quad x \wedge y = 0 ,$$

и *сильные ϱ-разложения*, если

$$x \varrho y \Leftrightarrow x \operatorname{non} \gtreqless y , \quad (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$$

для всякого p из данной структуры.

В работе изучаются общие свойства ϱ-разложений и связи между тремя сверху определенными специальными типами ϱ-разложений.

Summary.

THE DECOMPOSITIONS OF ELEMENTS OF THE LATTICE WITH MINIMAL CONDITION

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Received March 16, 1954.)

In the preceding paper a symmetrical binar relation ϱ between the elements of a given lattice with minimal condition is introduced. The join $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ $(n > 1)$ is called ϱ-decomposition, if $a_i \ \varrho\ (a_{k_1} \vee a_{k_2} \vee \ldots \vee a_{k_j})$ holds for every $i = 1, \ldots, n$ and for every choice of the various $k_1, \ldots, k_j$ from $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$.

We obtain the proper decompositions for $[x \ \varrho\ y \Leftrightarrow x \ \mathrm{non}\gtreqless y]$, the direct decompositions for $[x \ \varrho\ y \Leftrightarrow x \ \mathrm{non}\gtreqless y,\ x \wedge y = 0]$, the strong decompositions for $[x \ \varrho\ y \Leftrightarrow x \ \mathrm{non}\gtreqless y,\ (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$ for every p of a given lattice$]$.

In the paper some general properties of the ϱ-decompositions and some connections between the special types of ϱ-decompositions are investigated.