Recense článků a knih

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 1, 97--105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117140

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

L. Collatz, **Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen.** Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K-G, Leipzig 1949, 466 stran.

Jak říká autor v předmluvě, je cílem knihy uvésti do obsáhlé problematiky vlastních hodnot se zřetelem na aplikace a numerické metody. Můžeme hned říci, že tento cíl se autoru plně zdařil.

Jak matematická literatura o problémech vlastních hodnot, tak i literatura o fysikálně-technických aplikacích matematické theorie, je v dnešní době velmi rozsáhlá, takže úplné její zpracování není ani dost dobře možné. Autor se o to ani nepokouší, nýbrž vybírá si nejdůležitější úseky, totiž problematiku vlastních hodnot u obyčejných diferenciálních rovnic, zatím co o parciálních diferenciálních rovnicích a integrálních rovnicích se zmiňuje více méně pouze v poznámkách. Také výběr aplikací je omezen více méně na jeden obor, totiž na mechaniku. Toto zdůraznění mechanických problémů vedlo autora, kterému zřejmě z aplikovaných problémů mechanika je nejblíže, k tomu, aby přidal obsáhlou kapitolu o problémech vlastních hodnot u matic, které se často v mechanice vyskytují. Poznamenejme ještě, že právě touto kapitolou se tato Collatzova kniha liší od jeho první knihy o problémech vlastních hodnot, která vyšla v r. 1944 u téhož nakladatele pod názvem *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung.*

Podívejme se nyní blíže na obsah Collatzovy knihy. Začíná úvodem s historickou zmínkou o jednom z nejstarších problémů vlastních hodnot řešeném EULEREM a s portréty nejvýznamnějších matematiků, kteří pracovali v tomto oboru. Pak následuje osm kapitol vlastní látky a končí řadou velmi pěkných a praktických tabulek.

1. kapitola obsahuje zajímavé a cenné příklady technických otázek z mechaniky vedoucích na problémy vlastních hodnot. Ze stabilitních problémů je pak uveden především vzpěr u prutů za různých podmínek, dále torse a vybočení I-nosníků a z úloh o kmitání torsní a příčné kmity prutů a torsní kmity kotoučů. Kapitola tak jako všechny následující končí úlohami.

Ve 2. kapitole začíná vlastní matematická theorie a jsou probrány základní matematické prostředky, jichž se v dalším používá. Nejdříve jsou uvedeny základní pojmy.

Autor je však neuvádí jen pro speciální případ rovnice

$$L(y) = \lambda\, g(x)\, y\,,$$

nýbrž čerpaje z prací E. KAMKEHO uveřejněných v letech 1939—1942 zabývá se rovnicemi tvaru

$$M(y) = \lambda\, N(y)$$

(kde M a N jsou lineární diferenciální výrazy). Dále jsou dosti podrobně probrány vlastnosti Greenovy funkce u obyčejných dif. rovnic, vysvětlen pojem Greenovy funkce u parciálních dif. rovnic a konečně je ukázáno, jak souvisí problémy vlastních hodnot s integrálními rovnicemi.

K této kapitole musíme ještě udělat tuto poznámku: Theorii vlastních hodnot u obyčejných dif. rovnic lze rozvinout buďto na základě theorie integrálních rovnic nebo variačního počtu nebo theorie obyčejných dif. rovnic. Kamke ukázal, že posledně jmenovaná cesta je nejlepší. Této cesty používá také autor. Proto v integrálních rovnicích uvádí pouze základní výsledky a o variačním počtu nemluví vůbec. Tato cesta má také tu výhodu, že nepředpokládá žádné zvláštní předběžné znalosti čtenářovy.

Ve 3. kapitole, která má název *Krátký nárys matematické theorie*, jsou probrány minimální vlastnosti vlastních hodnot, Courantův maximo-minimální princip, věta o srovnání, jsou udány odhady zdola i shora pro vlastní hodnoty (Einschliessungssatz) a je dokázána věta o rozvoji funkcí podle vlastních funkcí.

4. kapitola je věnována metodě postupných aproximací a to i grafickému provedení této metody. Jsou uvedeny Schwartzovy konstanty a jejich vlastnosti. Tak jako ve všech kapitolách je připojena řada velmi pěkných numerických příkladů.

5. kapitola pojednává o dalších metodách k výpočtu vlastních hodnot a funkcí, tentokráte o metodách založených na minimálních vlastnostech vlastních hodnot. Je uvedena Ritzova metoda, Galerkinovy a Grammelovy rovnice a rovněž jejich grafické zpracování.

6. kapitola je dosti obsáhlá a týká se problémů vlastních hodnot u matic. Autor předpokládá, že čtenář něco již o maticích ví. Proto o základních pojmech mluví stručně a hned se obrací k vyšetřování extremálních charakteristických čísel, t. j. reciprokých hodnot vlastních hodnot. Je ukázána souvislost s úlohou nalézti hlavní osy křivek a ploch druhého stupně, dokázán Courantův maximo-minimální princip a jiné. Dále je k výpočtu charakteristických čísel použita metoda postupných aproximací, zaveden pojem hlavních vektorů, řešeny přibližně systémy lineárních rovnic a uvedeny odhady velikostí charakteristických čísel. Při tom je tato kapitola doplněna zvláště četnými a pěknými aplikacemi.

V předposlední kapitole se autor zabývá použitím metody diferencí, jak u obyčejných, tak u parciálních dif. rovnic, a uvádí některé zlepšené způsoby této metody. Poslední kapitola obsahuje další metody k výpočtu vlastních hodnot, jako na př. metodu perturbací nebo použití řetězových zlomků k výpočtu vlastních hodnot u Mathieuovy rovnice.

Kniha končí návodem pro volbu metody k přibližnému výpočtu vlastních hodnot, seznamem řešených příkladů a 15 tabulkami ulehčujícími značně práci při praktickém řešení problémů vlastních hodnot.

Závěrem lze říci, že kniha je krásným příkladem spojení theorie a aplikací a že z ní bude mít velký užitek jak každý theoreticky pracující technik, tak každý matematik.

Miloš Zlámal, Brno.

Jos. Schmidtmayer: **Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice.** Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1954, 244 stran, 97 obr., 5 příloh. Cena brož. 26,50 Kčs.

Tato kniha je určena převážně pracovníkům vývojových a výzkumných ústavů z oboru elektrotechniky. Je mezi knihami, směřujícími k aplikacím, do jisté míry dílem nového typu. Autor totiž neprobírá zde celou konstrukci theorie matic, nýbrž pouze její výsledky, t. j. uvádí věty až na některé výjimky bez důkazů. Definice a věty jsou však důsledně rozlišovány a uváděny vždy v přesném znění.

Takové pojetí celého spisu jistě nebude na závadu, neboť technikové zpravidla požadují pouze výsledky theorie. Sám autor píše v úvodu: „Taková úprava snad není zcela správná s hlediska čistě matematického; kniha však nebyla psána pro matematika, nýbrž pro pracovníky, jimž má umožnit — ve formě podrobného přehledu — spolehlivé použití elementárních výsledků maticového počtu (maticové algebry).“

Čtenář, který by se zajímal hlouběji o důkazy některých vět, najde je v literatuře, která je bohatě citována u každého odstavce.

Matematický aparát, který je požadován na čtenáři při studiu, je elementární až snad na některé věty o determinantech. Proto je XII. kapitola díla věnována theorii determinantu, zvláště pak methodám jejich numerického vyčíslení. Tím stává se kniha přístupnou nejširšímu okruhu čtenářů a dále též proto, že je psána velmi názorně. Výklad je doplněn četnými obrázky a příklady, vypočtenými v textu.

Celková problematika, kterou se kniha zabývá, je diktována její použitelností v elektrotechnice. Dílo je rozvrženo do dvou částí:

Prvá část se zabývá vlastní theorií matic, druhá je pak věnována theoretickému řešení soustav lineárních elektrických obvodů.

Prvá kapitola obírá se úvodními úvahami o n-dimensionálním vektorovém prostoru, zejména vlastnostmi systémů vektorů.

V kapitole druhé je definována matice, jejich rovnost a některé jejich speciální typy. Dále je tu definována hodnost matice, a vysloveny některé věty pro ni platné.

Ve třetí kapitole definuje autor základní algebraické operace s maticemi. Značná pozornost je věnována rozkladu regulární matice v součin dvou trojúhelníkových matic, a jsou probrány methody Banachiewiczova a Choleskiho.

Inversní matice k matici dané, její existence a vlastnosti jsou sledovány v kapitole IV.

Následující kapitola je pak věnována numerickým metodám výpočtu inversní matice (Gaussově, Banachiewiczově, Choleskiho).

V dalších dvou kapitolách je probrána aplikace theorie matic na transformace lineárních forem a řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

V poslední kapitole prvé části, osmé, zabývá se autor rozdělenými maticemi. Zejména je tu poukázáno na dílčí řešení soustavy lineárních nehomogenních rovnic.

Část druhá, tvořená kapitolami IX, X, XI je věnována theorii sítí, jak už bylo shora řečeno. Úvodem jsou osvětleny pojmy proudu, napětí a základních prvků elektrických obvodů. Dále jsou vysloveny základní zákony sítě, t. j. zákony Kirchhoffovy a zákon o elektromagnetické indukci. Poté je přikročeno k probrání topologických vlastností sítě a k tomu cíli jsou zde zavedeny pojmy uzlu, větve a smyčky. Je tu uvedena věta o souvislosti mezi maximálním počtem lineárně nezávislých smyček, počtem uzlů a větví souvislé sítě, a dosti důkladně je pak sledován komplex „úplného stromu“ a jeho vztah k soustavě lineárně nezávislých smyček.

V dalším je zavedena representace topologie sítě pomocí matic. Na tomto místě dopouští se autor té nedůslednosti, že neuvádí předpoklady, za kterých možno topologii sítě representovat pomocí $\mathbf{\Pi}$-matice. Jestliže totiž síť obsahuje větve, které začínají a končí v tomtéž uzlu, pak representace v uváděném smyslu není možná. To však není věci příliš na závadu, neboť v praxi se takové sítě málo kdy vyskytují.

Na základě probraných topologických výsledků je pak formulován vlastní problém řešení sítě. Zde nutno autorovi vytknouti to, že řádně nedefinuje, co nutno pod „řešením sítě“ respektive jeho existencí rozumět. Zaujmeme-li totiž přísně theoretické stanovisko, pak se může stát, že „řešení“ nějaké sítě, t. j. vektor proudů $\mathbf{I}$, který by splňoval Kirchhoffovy zákony, k danému vektoru napětí $\mathbf{U}_\nu$ vůbec neexistuje. Autor pojímá celou věc tak, jako kdyby vždycky takový vektor $\mathbf{I}$ existoval, a nadto jediný, neboť na př. na str. 171 dole píše: „Maticové rovnice (48.5) a (48.6) vyjadřují celkem m nezávislých lineárních rovnic pro m neznámých $\mathbf{I}_\mu$“, což obecně není pravda. Na obhajobu autora nutno však uvést to, že prakticky každá „fysikální“ síť má „řešení“, t. j. že pro každý vektor $\mathbf{U}_\nu$ existuje jediný vektor $\mathbf{I}$, splňující Kirchhoffovy zákony.

Dále jsou probírány methody postupu při řešení sítě, a to metoda smyčkových proudů a metoda uzlových napětí. Současně je proveden rozbor, kdy která z těchto method je méně pracná.

Bylo by vhodné, kdyby tato kapitola obsahovala stať, věnovanou některým determinantům, které se v theorii sítí vyskytují. Lze totiž odvodit řadu pravidel, která se opírají o topologii sítě a která dovolují tyto determinanty okamžitě vyčíslit, jestliže matice **Z** je diagonální. Praktický význam toho je nasnadě.

Kapitola X je věnována příkladům řešení elektrických obvodů. Zároveň je tu poukázáno na zajímavou souvislost mezi řešením jistých sítí a problémem dělení obdélníku resp. čtverce na konečný počet menších, různě velkých čtverců.

Závěrečná kapitola XI se zabývá lineárními čtyřpóly. Je tu osvětlen pojem čtyřpólu, jeho impedanční, admitanční a kaskádní matice. Současně jsou odvozeny vztahy mezi maticemi složeného čtyřpólu, vzniklého seriovým, paralelním nebo kaskádním řazením, a maticemi jednotlivých čtyřpólů. Pro snadné použití jsou vztahy mezi různými maticemi téhož čtyřpólu (admitanční, impedanční, kaskádní) srovnány do tabulky. Rovněž tak jsou v tabulkách uvedeny matice různých základních čtyřpólů.

Závěrem možno říci, že tato kniha bude jistě vítanou a užitečnou příručkou pro techniky. Matematikovi může pak sloužit jako úvod do teorie lineárních elektrických obvodů, pokud by se o věc zajímal. *Václav Doležal*, Praha.

Rudolf Bayer: **Matematický dodatek ke knize** *Fradin*, **Anteny pro centimetrové a decimetrové vlny.** Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1954, 44 stran, 9 obrázků. Cena 4,41 Kčs.

Tento spis klade si za úkol usnadnit technickým pracovníkům studium Fradinovy knihy, neboť v naší literatuře není díla, které by souborně pojednávalo o těch partiích matematické analysy, které jsou v theorii anten potřebné.

Jednotlivé partie analysy, které autor v díle uvádí, jsou vybudovány dosti formálním způsobem. Je to zřejmě způsobeno těmito okolnostmi:

1. rozsah dodatku je omezen,

2. světová literatura, zabývající se theorií anten, je psána většinou tímto „fysikálním" způsobem,

3. přesná výstavba matematického aparátu byla by pro svou rozsáhlost asi pro technika neúnosná.

Neběží tedy o dílo matematické a nemělo by smysl vypočítávat všechny nepřesnosti které se ve spisu vyskytují. Pro ilustraci budiž zde uveden pouze jeden příklad. Na str. 6. zavádí autor pojem řádu takto:

„Máme-li dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ definovány pro $x > a$, a předpokládáme-li, že $g(x) > 0$, $f(x)$ může býti i komplexní, pak říkáme, že $f(x) = O[g(x)]$ když,

$$O \leqq \limsup \frac{|f(x)| \doteq k}{g(x)} < +\infty\,, \quad k = \text{konst.}$$

(Zde jde zřejmě o tiskovou chybu.) Po této definici jsou uvedena „pravidla pro symbol O" jako:

$$c_1\, O[g(x)] + c_2\, O[g(x)] = O[g(x)]\,.$$

Partie matematické analysy, které jsou ve spisu probírány, jsou asi tyto: Greenova věta, použití komplexních vektorů v theorii elektromagnetického pole, vektorové operace v křivočaré pravoúhlé soustavě souřadnic, řešení vlnové rovnice v kartézských a cylindrických souřadnicích a konečně některé vlastnosti Besselových funkcí a Legendreových polynomů.

Závěrem možno říci, přestože spis má pouze informativní charakter, že může technickému čtenáři pro předběžné studium posloužit. *Václav Doležal*, Praha.

Stroje na zpracování informací. Sborník II, Nakladatelství ČSAV, 1954, str. 320, obr. 167, 36 Kčs.

Za vědecké redakce nedávno zemřelého prof. dr VÁCLAVA HRUŠKY vydala Laboratoř matematických strojů při ČSAV druhý Sborník, obsahující práce členů kolektivu LMS a jednu práci externí. Do Sborníku byl dodatečně vložen list s fotografií prof. Hrušky s posmrtnou vzpomínkou na tohoto československého průkopníka moderních početních metod.

Většina uveřejněných prací byla přednesena na II. celostátní pracovní konferenci v Domě vědeckých pracovníků J. E. Purkyně v prosinci 1953 a na pravidelných pátečních rozhovorech konaných Laboratoří.

Práce se dají rozdělit do tří skupin:

Do první skupiny patří práce, týkající se především čs. samočinného počitače „SAPO", po případě popisující hotové projekty matematických strojů. Jsou zde podrobně vysvětleny termíny a pojmy, s nimiž se musí seznámit každý, kdo chce alespoň trochu porozumět „nové matematické řeči". Jde na př. o termíny: slovo, instrukce, paměť, řadič, děrný štítek, operační jednotka atd. Autory prací této první skupiny jsou: Černý, Marek, Oblonský a Pokorný.

Stručný popis stroje SAPO je obsažen v úvodě na str. 13, z něhož vyjímáme: SAPO je reléový počitač s magnetickou bubnovou pamětí o kapacitě 1024 slov, která jsou složena ze 32 dvojkových číslic (0 nebo 1). (SAPO pracuje ve dvojkové soustavě číselné.) Stroj SAPO bude obsahovat asi 7000 relé a 400 elektronek. Ačkoliv autor základního návrhu Doc. dr A. SVOBODA dobře ví, že zahraniční projektanti podobných matematických strojů dávají přednost elektronkovým, které jsou rychlejší, před reléovými, rozhodl se přece pro princip reléový z těchto důvodů: Valná většina řešení problémů, které laboratoř matematických strojů bude zpracovávat, je proveditelná počitačem SAPO v několika hodinách, nanejvýše dnech. Kdyby byl k disposici v provozu nákladnější a choulostivější počitač elektronkový, bylo by řešení proveditelné během minut, po případě hodin. Přesto výkon laboratoře jako celku by se tím podstatně nezvýšil. Tento výkon je totiž dán počtem problémů, které kolektiv pracovníků laboratoře vyřeší za rok a to záleží na počtu problémů, které kolektiv dovede připravit za tuto dobu pro strojové zpracování. Laboratoř počítá zatím s počtem odborníků, který dovolí připravit pro samočinný počitač 2 až 4 problémy měsíčně (což je ve světovém měřítku veliký výkon, umožněný vhodnou volbou kodovacího systému samočinného počitače SAPO). Bude trvat několik let než této kapacity laboratoře naše věda a průmysl využije a bude dávat laboratoři 52 úkolů ročně. Předpokládáme-li, že zadaný úkol se dá rozřešit počitačem SAPO za den a elektronkovým počitačem za hodinu, docházíme k závěru, že v prvním případě odevzdá se vyřešený problém asi za týden a den, v druhém případě za týden. To je jeden z důvodů, proč je u počitače SAPO kladen důraz spíše na spolehlivost, snadnou údržbu, laciný provoz, než na operační rychlost, která s sebou přináší mnoho stinných stránek.

Stroj SAPO je mimo jiné opatřen trojnásobnou operační jednotkou, t. j. každá prováděná operace se provádí třikrát současně a nezávisle na druhých. „Hlasovací zařízení", t. zv. prověřovač, vybere z nich správný výsledek i když v některé operační jednotce je porucha. Předpokládá se, že nenastane případ, aby dvě operační jednotky měly v jednom okamžiku poruchu stejného druhu (případ s pravděpodobností prakticky zanedbatelnou).

I když další práce ve Sborníku nejsou tak rozsáhlé jako tato první, řadí se k ní svou originálností a zajímavostí. Jsou to tři práce: V. ČERNÝ, Kody logických operací počitače SAPO; Z. POKORNÝ, Sestavování instrukčních sítí z připravených celků a Instrukční sítě na transformaci čísel v počitači SAPO. Černého práce popisuje způsob, jak doplnit operační jednotku a kody počitače SAPO, aby bylo možno tímto strojem řešit také úlohy z logického počtu. První jmenovaná práce Pokorného ukazuje postup, jak včleňovat do širších instrukčních sítí „podsítě", které představují některou častěji přicházející úlohu na př. výpočet hodnot $y = \cos x$ a pod. Druhá práce Pokorného popisuje dvě instrukční sítě: první převádí čísla z desítkové soustavy do dvojkové, druhá obráceně.

Druhá skupina prací se zabývá metodami řešení problémů na samočinných počitačích (jde speciálně o SAPO a kalkulační děrovač). Tyto metody se zásadně liší od běžných numerických metod početních proto, že používají aritmetické i nearitmetické operace, jsou přizpůsobeny speciálním vlastnostem použitého stroje a nemusí se omezovat na malý počet operací.

Do této skupiny patří následující práce: O. Pokorná, Řešení soustav lineárních algebraických rovnic minimisací součtu čtverců residuí; v ní je popsána nová iterační metoda řešení lineárních algebraických rovnic, která zjednodušuje dříve navrženou metodu A. Svobody tím, že snižuje počet potřebných operací. Metoda souvisí s iterační metodou Gauss-Seidelovou a s relaxační metodou Southwellovou.

J. M. Marek, Interpolace na základě hodnot funkce uvnitř interpolačního intervalu. Ačkoliv práce je zaměřena na zjednodušení interpolace na kalkulačním děrovači, má širší národohospodářský význam — jak zdůraznil prof. Hruška — při vydávání tabulek, jejichž rozsah se touto interpolační metodou značně zredukuje proti dosavadnímu rozsahu a to přibližně při stejné přesnosti.

J. Reichl, Řešení prvé okrajové úlohy Laplaceovy rovnice na strojích na děrné štítky. Metoda převádí řešení diferenciální rovnice na diferenční pomocí sítí a upravuje toto řešení pro výpočet na kalkulačním děrovači Aritma. Dá se užít pro obory omezené libovolnou uzavřenou křivkou.

Do třetí skupiny patří práce theoretická (synthesa reléových obvodů, synthesa kloubových mechanismů, synthesa pasivních $2n$-pólů) a fysikálně technické (elektronkové počítací obvody, elektromagnetické relé).

V práci A. Svobody, Synthesa reléových sítí, je popsána metoda návrhu kontaktové sítě, u které jsou předepsány průchodnosti mezi všemi dvojicemi daných uzlů Booleovými funkcemi. Je užito nové symboliky a operací s konečnými množinami.

Práce F. Svobody, Užití dvouhodnotové Booleovy funkce na synthesu jednotaktních hradlových obvodů, popisuje metodu synthesy reléového obvodu, podle které by bylo možno navrhnout matematický stroj na řešení synthesy hradlových obvodů.

V práci A. Svoboda-V. Vyšín, Třífázové hysteresní obvody v elektronkových počitačích, je popsána nová technika návrhu elektronkových počitačů, slibující proti technikám známým větší jednoduchost a nižší poruchovost.

Práce J. Oblonského, Elektromagnetické relé s potlačenou induktivní vazbou mezi vinutími, pojednává o škodlivých zjevech v reléových počitačích, způsobených induktivní vazbou mezi vinutím pracovním a přídržným téhož relé a navrhuje způsob, jak tyto zjevy odstranit.

K. Ontlová a M. Valach popisují ve své společné práci nový druh statistického analysátoru, dovolujícího sledovat proměnu histogramu četnosti, sestrojeného pro n prvků základního statistického souboru.

Práce M. Valacha, Synthesa desetikloubového mechanismu jako generátoru funkce tří nezávisle proměnných, představuje první pokus o synthesu kloubového mechanismu a třech stupních volnosti tak, aby sledoval předem danou funkci tří nezávisle proměnných.

Poslední práce Z. Nenadála, Mnohopóly pro sčítání elektrických napětí složené z ohmických odporů, je cennou příručkou pro každého, kdo se zabývá analogovými stroji, sestavenými z ohmických odporů.

Ke konci bych chtěl říci, že práce celého kolektivu, vedená Doc. dr A. Svobodou, laureátem státní ceny pro rok 1954, dochází plného pochopení naší vrcholné instituce ČSAV.

Bohužel je smutné, že na př. výstavba SAPO nebyla pojata do plánovaných státních úkolů. Zdá se mi, že tato skutečnost může být příčinou, že ČSR bude v dohledné době předstiženo jinými státy, které mezi svými odborníky nemají žádného A. Svobodu ani nadšený a iniciativní kolektiv, jaký máme my v Laboratoři matematických strojů.

Mil. Hampl, Praha.

Emil Kraemer: **Analytická geometrie lineárních útvarů.** Praha 1954. Nakladatelství Československé akademie věd. Cena brožovaného výtisku 24 Kčs. Stran 240, obrázků 40, náklad 3300.

Autor rozvrhl svou Analytickou geometrii lineárních útvarů do čtyř kapitol. Jak již v předmluvě uvádí, chce seznámit čtenáře s principy analytické geometrie, jakožto metody studia geometrických útvarů a chce ho naučit této metody také obratně používat. Kniha je určena pro čtenáře — začátečníky, a jestliže v ní autor používá vektorové algebry (a to způsobem, který vypracoval a zavedl akademik Eduard Čech v dvojdílných Základech analytické geometrie) a kromě toho i metod klasické analytické geometrie, není možno s ním souhlasit v tom smyslu, že „poslání této knížky je docela skromné". Naopak je třeba hned zpočátku zdůraznit, že právě pro začátečníky je tato kniha nesporným přínosem. Také to, že autor vědomě staví svůj výklad na základních poznatcích elementární geometrie a že se vědomě opírá o geometrický názor, je — vzhledem k určenosti této knihy — dalším a významným kladem. Tento způsob výkladu je také jednou z cest, jak vzbudit hlubší zájem o studium tohoto odvětví matematiky i u širšího okruhu čtenářů, kteří pak již snadněji mohou vniknout do poměrně náročných učebnic analytické geometrie moderní (zvláště již citované knihy akademika Čecha) i klasické, z nichž zvláště cituji Úvod do analytické geometrie od akademika Bohumila Bydžovského.

V kapitole první, nadepsané „Úvod do lineární algebry" obsahuje Kraemerova kniha stručný — ale pro poslání knihy zcela postačující — výklad theorie determinantů a matic. Po metodické stránce, vzhledem k psychologii čtenáře-začátečníka, je zcela pochopitelné, proč autor provádí výklad nejprve na determinantech a čtvercových maticích druhého stupně a teprve v odstavci třetím (na straně 25) na determinantech a čtvercových maticích stupně třetího. Čtenář, kterému tato látka není ještě známa, tím snadněji vnikne do celé problematiky.

Vhodnější by však bylo, kdyby autor toto své stanovisko ještě zdůraznil formulací vět. Tak na příklad již ve větě první (na straně 10) čteme: „Překlopíme-li čtvercovou matici kolem její hlavní diagonály (t. j. vyměníme-li řádky za sloupce, neměníce jejich pořadí), dostaneme matici, která má týž determinant jako matice původní."

Nedá se jistě pochybovat o obecné platnosti této věty pro čtvercové matice n-tého stupně, ale chybné je, když se tato věta vysloví obecně a důkaz je pak prováděn na čtvercové matici druhého stupně. Zajisté by bylo správnější kdyby autor buď poznamenal (asi tou formou, jak velmi vhodně učinil v úvodu třetího odstavce na straně 25), že tato věta platí obecně, nebo kdyby větu první vyslovil takto: „Překlopíme-li čtvercovou matici druhého stupně kolem její diagonály... atd." Podobná poznámka se týká ovšem i vět 3, 4, 5 a 8. Vzhledem k tomu, že ve větách 6 a 7 je tento nedostatek odstraněn, a v nich se výslovně mluví o čtvercové matici (resp. determinantu) druhého stupně, jedná se zde patrně o přehlédnutí se strany autora nebo redakce. Je třeba mít totiž stále na zřeteli, že kniha je určena hlavně začátečníkům a že je má zároveň učit i matematické přesnosti. Rovněž tak v úvodu této kapitoly na straně 7 je dosti nepochopitelný předpoklad, proč se nesmějí čísla a_i, b_i rovnat nule, ač je zbytečnost tohoto předpokladu po několika řádcích konstatována.

V poznámce 3 na straně 12 by snad bylo vhodnější říci: ...avšak, je-li aspoň jedno z čísel $a_i \neq 0$, není první řádek nikdy násobkem druhého; ale to není již tak podstatné, neboť i v původním znění je poznámka správná. Definice 14 na straně 28 je zbytečně dlouhá a pro začátečníka nepřehledná. Uvážíme-li, že se zde ve skutečnosti definují tři pojmy, totiž subdeterminant, doplněk a parita, měla by se definice 14 rozložit aspoň v definice dvě a připojit poznámku: $M_{hk} = (-1)^{h+k} \cdot A_{hk}$ (jak se obyčejně definuje doplněk A_{hk} na základě subdeterminantu M_{hk}).

Tyto poznámky nechť však nebudí dojem, že by první kapitola této knihy byla špatná. Naopak třeba zdůraznit, že zde autor velmi vhodně a s nesporným pedagogickým talentem dosahuje vytčeného cíle. Již zde (jako ostatně v celé knize) je do výkladu vsunuta řada příkladů (v celé knize celkem 50) vhodných k okamžitému procvičení aktuální látky, právě tak jako na konci kapitoly jsou obdobné příklady na procvičení látky z celé statě. Již jejich počet (celkem 200) svědčí o svědomitosti autora, s jakou chce čtenáři látku dokonale objasnit.

V kapitole druhé, pojednávající o geometrii lineárních útvarů, osvětluje autor řadou definic pojem vektoru. Poněkud násilně však působí poznámka následující bezprostředně za větou 32 (na straně 51 a 52), kterou je zavedena rovnice

$$B = A + u\,. \tag{29}$$

Po věcné stránce je rovnice (29) ovšem opět naprosto správná (jak ji ostatně v jiné formě dokázal akademik Čech v již citované knize, rovnice (5.4), strana 20, I. díl), nedomnívám se však, že zavedena tak, jak je v Kraemerově Analytické geometrii, by mohla být čtenářem-začátečníkem správně pochopena. Autorova poznámka: „Uvidíme později, že rovnice (29) je velmi vhodně zvolena" celý problém ještě komplikuje. Snad by bylo správnější rovnici (29) — a případně i pravidla pro zacházení s ní — výslovně definovat. To je však jediný (a ne příliš podstatný) nedostatek této kapitoly, ostatně jinak bezvadné. V dalších odstavcích pak autor znovu potvrzuje své značné pedagogické nadání s jakou názorností, výstižností a při tom stručností postupuje ve výkladu.

V kapitole třetí již přechází k metrickým vlastnostem lineárních útvarů, což také výstižně uvádí na začátku této kapitoly. Třeba zde zvláště zdůraznit, s jakou pečlivostí ukazuje již předem čtenáři cíl, kterého chce dosáhnout, a to nejen v každé z kapitol, ale i ve většině vět a dokonce i v mnoha příkladech. Usnadňuje tím nejen čtenáři studium, ale zároveň ho i nenásilně seznamuje s logickou výstavbou celého matematického myšlení, třeba to bylo jen v omezené disciplině.

Poslední kapitola čtvrtá, pojednávající o transformacích rovnoběžkových souřadnic a jejich speciálních případech — transformacích orthogonálních, velmi účelně doplňuje výklad předcházejících kapitol. Čtenář se zde zároveň seznámí s pojmem invarinatu, jehož význam mohl snad být ještě více zdůrazněn. Konečně je třeba upozornit na velmi dobře volená cvičení k opakování, kterými si čtenář může sám ověřit, do jaké míry studium zvládl.

Hodnotíme-li závěrem Kraemerovu knihu, můžeme s plným uspokojením konstatovat, že autor nejen dosáhl vytčeného cíle, ale celkový význam jeho Analytické geometrie se ještě zvětšuje tím, že tato kniha byla již dávno v naší matematické literatuře postrádána, a to právě v takové formě, v jaké je napsána, nehledě ani k tomu, že analytická geometrie není v osnovách jedenáctiletých vzdělávacích škol, takže studenti a absolventi těchto ústavů v ní najdou skutečně nepostradatelnou pomůcku pro další studium.

Václav Metelka, Liberec.

Dodatkem k předchozí recensi poznamenává s. MILAN LUSTIG, posluchač matematiky přírodovědecké fakulty MU v Brně.

Věta 70 na str. 115 Kraemerovy knihy není správná, jak ihned vyplývá z tohoto příkladu:

Mějme dvě různoběžné roviny ϱ, σ, kde rovina ϱ je dána bodem A a dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ a rovina σ je dána bodem B a dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ tak, že vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ jsou rovnoběžné s průsečnicí rovin ϱ, σ.

Pak vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ jsou navzájem rovnoběžné, tudíž jsou kolineární. Poněvadž každé tři vektory, z nichž dva jsou kolineární, jsou komplanární, pak tedy vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ a vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ jsou komplanární, tudíž jsou lineárně závislé, a potom by podle výše citované věty byly roviny ϱ, σ rovnoběžné, což je ve sporu s předpokladem, že roviny ϱ, σ jsou různoběžné.

Aby věta byla správná je třeba ji doplniti na př. předpokladem, že žádné dva z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ nejsou lineárně závislé.

Poněvadž tento předpoklad ubírá větě na obecnosti, bylo by vhodnější větu vysloviti takto:

Budiž dána rovina ϱ bodem a dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ a budiž dána rovina σ také bodem a lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$. Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby tyto dvě roviny byly rovnoběžné je

1. v obecném případě, aby tři,

2. v případě, že žádné dva z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ nejsou kolineární, aby dvě ze všech možných trojic utvořených z $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ byly lineárně závislé.

Důkaz věty provedeme tak, že první část důkazu ponecháme shodnou s první částí důkazu Kraemerova na str. 115 knihy a druhou část rozdělíme na dva případy:

1. Označme trojice vektorů, které lze utvořit z $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ takto:

$$(1) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2),\ (2) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2),\ (3) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2),\ (4) \equiv (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)\ .$$

Mohou nastat právě tyto čtyři různé případy:

a) (1), (2), (3) jsou tři trojice komplanárních vektorů,
b) (1), (2), (4) jsou tři trojice komplanárních vektorů,
c) (1), (3), (4) jsou tři trojice komplanárních vektorů,
d) (2), (3), (4) jsou tři trojice komplanárních vektorů.

Platí-li a) nebo b) jsou vektory (1) komplanární, t. j. $\mathbf{u}_2 \parallel \varrho$; dále (2) jsou komplanární, t. j. $\mathbf{v}_2 \parallel \varrho$. Tedy $\sigma \parallel \varrho$.

Platí-li c) nebo d) jsou vektory (3) komplanární, t. j. $\mathbf{u}_1 \parallel \sigma$, a také vektory (4) jsou komplanární, t. j. $\mathbf{v}_1 \parallel \sigma$. Tedy $\varrho \parallel \sigma$.

2. Dokažme si nejdříve pomocnou větu:

Buďte $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ takové vektory, že žádné dva z nich nejsou kolineární a dvě trojice utvořené z nich jsou komplanární. Tvrdíme, že každé tři vektory vybrané z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ jsou komplanární.

Důkaz: Buďte na př. $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ dvě trojice komplanárních vektorů (můžeme zvoliti kterékoliv trojice, důkaz probíhá stejně). Libovolný bod M a vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$ určují rovinu τ, pak je $\mathbf{u}_1 \parallel \tau$, $\mathbf{v}_2 \parallel \tau$, a tedy všechny čtyři vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ jsou rovnoběžné s τ, a tedy každé tři z nich vybrané jsou komplanární. Další část důkazu je již zřejmá.

Milan Lustig, Brno.