Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Kurzweil

O metrické teorii čísel

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 1, 92--94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117138

jeho rozpočet byl vyrovnán a přitom je s to zajistit vydání dostatečného počtu vědeckých monografií za poměrně nízkou cenu.

Na dotaz prof. VYČICHLA, informoval s. Rybkin přítomné o metodách práce redakce časopisu *Referativnyj žurnal.*

Obšírný a poučný referát G. F. Rybkina i jeho cenná vysvětlení, která podal na dotazy přednesené v diskusi, byly všemi přítomnými vyslechnuty s velikým zájmem a odměněny živým potleskem. *O. Vejvoda,* Praha.

O METRICKÉ TEORII ČÍSEL

(Referát o přednášce JAROSLAVA KURZWEILA, přednesené v matematické obci pražské dne 22. listopadu 1954.)

V přednášce jsem mluvil o výsledcích, které souvisejí s tímto problémem formulovaným H. STEINHAUSEM:

Nechť $B^{(0)}$ je množina obsahující všechny posloupnosti $\{b_q\}_{q=1}^{\infty}$ splňující podmínky

$$(1)\ b_q \geq 0,\quad (2)\ b_q \geq b_{q+1},\quad (3)\ \sum_{q=1}^{\infty} b_q = \infty .$$

Nechť K je kružnice v rovině (ξ, η) o poloměru $\frac{1}{2\pi}$ se středem v počátku. Je-li x reálné číslo, nechť $[x]$ je bod o souřadnicích

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x\,, \quad \eta = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\,.$$

Jsou-li a, b reálná čísla, $a \leq b$, nechť interval $I[a, b]$ je množina takových bodů $[x]$, že je $a \leq x \leq b$. Na kružnici K je zřejmým způsobem definována lineární Lebesgueova míra μ tak, že je $\mu(K) = 1$. H. Steinhaus položil tuto otázku:

Má každé reálné číslo x tu vlastnost, že zvolíme-li libovolnou posloupnost $\{b_q\} \in B^{(0)}$, skoro každý bod na kružnici K patří do nekonečně mnoho intervalů $I[qx - b_q, qx + b_q]$, $q = 1, 2, 3, \ldots$?

Abychom tuto otázku zodpověděli, připomeneme jednu definici z theorie diofautických aproximací.

Nechť nezáporná funkce $\varphi(q)$ je definovaná pro přirozená q. Říkáme, že reálné číslo x připouští aproximaci φ, jestliže ke každému Q existují celá čísla $p, q, q > Q$ tak, že platí nerovnost

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqq \varphi(q)\,.$$

Jak známo, každé číslo x připouští aproximaci $\frac{1}{q^2}$ a CHINČIN dokázal tuto větu:

Nechť funkce $q^2\, \varphi(q)$ monotonně klesá. Jestliže řada $\sum_{q=1}^{\infty} q\, \varphi(q)$ konverguje, potom množina těch reálných čísel x, která připouštějí aproximaci φ, má míru 0. Jestliže řada $\sum_{q=1}^{\infty} q\, \varphi(q)$ diverguje, potom množina těch reálných čísel x z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která připouštějí aproximaci φ, má míru 1.

Nyní je možno otázku H. Steinhause zodpovědět touto větou:

Věta 1. *Číslo x má tu vlastnost, že ať zvolíme libovolnou posloupnost $\{b_q\} \in B^{(0)}$, skoro každý* *bod na K patří do nekonečně mnoho intervalů $I[qx - b_q, qx + b_q]$, $q = 1, 2, 3, \ldots$ právě tehdy, existuje-li takové číslo $d > 0$, že číslo x nepřipouští aproximaci $\frac{1}{(dq)^2}$.*

Abychom usnadnili formulaci dalších výsledků, zavedeme tato označení:

Nechť B je neprázdná podmnožina množiny $B^{(0)}$. Reálné číslo x, $0 \leq x < 1$ patří do množiny $\alpha(B)$, jestliže pro každou posloupnost $\{b_q\} \in B$ množina těch bodů na K, které patří do nekonečně mnoha intervalů $I[qx - b_q, qx + b_q]$ má míru 1.

Z Chinčinovy věty a z věty 1 snadno vyplývá, že množina $\alpha(B^{(0)})$ má míru 0.

Nechť nyní množina B obsahuje jediný element $\{b_q\}$ množiny $B^{(0)}$; potom platí

Věta 2. *Množina $\alpha(\{b_q\})$ má míru 1.*

Označme

$$A = \underset{x,y}{E}\,[0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \text{ existuje nekonečně mnoho párů celých čísel } p, q,$$
$$q > 0 \text{ tak, že platí } |qx - y - p| \leq b_q]$$

pro pevně zvolenou posloupnost $\{b_q\} \in B^{(0)}$.

Nechť $A^{(x,\cdot)}$ ($A^{(\cdot,y)}$) znamená řez množiny A, který vznikne, zvolíme-li pevně souřadnici x (nebo y).

Věta 2 je ekvivalentní s tvrzením, že Lebesgueova míra v rovině množiny A je rovna 1, neboť číslo x patří do množiny $\alpha(\{b_q\})$ právě tehdy, jestliže (lineární) míra množiny $A(x,.)$ je 1.

Označme $P(\varphi)$ množinu těch čísel x z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, která připouštějí aproximaci $\varphi(q)$. Zřejmě je

$$P(\varphi) = \underset{x}{E}\,[0 \leq x < 1, \text{ existuje nekonečně mnoho párů celých čísel } p, q, q > 0 \text{ tak,}$$
$$\text{že platí } |qx - p| \leq q\,\varphi(q)]$$

a

$$P\left(\frac{b_q}{q}\right) = A^{(\cdot,0)}\,.$$

Chinčinova věta říká, že řez $A^{(\cdot,0)}$ množiny A má míru 1, jestliže je $\{b_q\} \in B^{(0)}$ a jestliže posloupnost qb_q neroste.

Z věty 2 plyne ještě dosti snadno tento důsledek:

Zvolme $\{b_q\} \in B^{(0)}$ a položme

$$D = \underset{u,v}{E}\,[-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty, \textit{ existuje nekonečně mnoho celých čísel}$$
$$p, q, q > 0 \textit{ tak, že platí } |qu + pv - 1| < b_q]\,.$$

Potom množina těch bodů v rovině, které nepatří do množiny D, má míru 0.

Budiž $0 \leq \beta \leq 1$. Nechť $B^{(\beta)}$ je množina obsahující všechny posloupnosti $\{b_q\}$, které splňují podmínky

$$(1)\ b_q \geq 0, \quad (2)\ q^\beta b_q \geq (q+1)^\beta\, b_{q+1}, \quad (3)\ \sum_{q=1}^{\infty} b_q = \infty.$$

Je-li $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$, pak je $B^{(\beta_1)} \supset B^{(\beta_2)}$, $\alpha(B^{(\beta_1)}) \subset \alpha(B^{(\beta_2)})$.

Platí

Věta 3. *Je-li $0 \leq \beta < 1$, je $\alpha(B)^{(0)} = \alpha(B)^{(\beta)}$.*

Množina $\alpha(B^{(1)})$ má míru 1.

Z věty 3 speciálně plyne, že množina $\alpha(B^{(\beta)})$, $0 \leq \beta < 1$, má míru 0.

Nechť funkce $\varphi(q)$, definovaná pro přirozená čísla q, je nezáporná a nechť funkce $q\,\varphi(q)$ neroste. Definujme množinu $Y(\varphi)$: číslo x, $0 \leq x < 1$ patří do množiny $Y(\varphi)$ existuje-li přirozené číslo n takové, že x nepřipouští aproximaci $\varphi(nq)$. Větu 1 lze stručně zapsat:

$$\alpha(B^{(0)}) = Y\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Lze dokázati, že platí

Věta 4. *K dané funkci $\varphi(q)$ existuje množina $B(\varphi(q)) \subset B^{(0)}$ tak, že platí*

$$\alpha(B(\varphi(q))) = Y(\varphi).$$

Podobné problémy lze formulovat pro vícerozměrný případ. V tomto směru jsem pouze dokázal, že platí věta obdobná k větě 1.

Jaroslav Kurzweil, Praha.

NÁVŠTĚVA PROF. KALMÁRA V PRAZE; REFERÁT O JEHO PŘEDNÁŠCE

Dne 25. XI. 1954 navštívil Prahu na návratu z NDR člen-korespondent Maďarské Akademie věd, profesor university v Szegedu, LÁSZLO KALMÁR, jeden z předních současných představitelů a znalců matematické logiky a theorie základů matematiky.

Profesor Kalmár přednesl večer v matematickém ústavu matem.-fys. fakulty KU přednášku na thema *Klasifikace spojitých funkcí na Baireově prostoru* (iracionálních čísel z intervalu $(0, 1)$).

Dříve, než podáme referát o vlastním obsahu přednášky, bude dobře objasnit, jak souvisí toto ryze matematické thema (vlastně patřící do theorie reálných funkcí) s otázkami matematické logiky.

Jak je dobře známo, Baireův prostor iracionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ je topologicky ekvivalentní (homeomorfní) s kartézským součinem spočetně mnoha diskretních prostorů celých kladných čísel. (Homeomorfismus možno nejlépe udat pomocí rozvoje iracionálního čísla v nekonečný řetězový zlomek.) — Je-li $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ libovolný bod Baireova prostoru B (nadále již považovaného za prostor posloupností celých kladných čísel) a je-li f libovolné zobrazení B do B, pak $f(x) = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je vlastně posloupností $f_j(x) = y_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ zobrazení prostoru B do diskretního prostoru N celých kladných čísel. Na místo tvoření „složek" $f_j(x)$ daného zobrazení f můžeme přibrat index j jako argument na první místo určitého zobrazení Φ prostoru B do N, které pak representuje vzájemně jednoznačným způsobem původní zobrazení f prostoru B do B takto:

$$\begin{aligned} \Phi(1, x_1, x_2, \ldots) &= y_1, \\ \Phi(2, x_1, x_2, \ldots) &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(Zřejmě také obráceně každé zobrazení Φ prostoru B do N představuje takto jediné zobrazení f prostoru B do B, jestliže definujeme „složky" $y_1, y_2, \ldots$ hodnot obrazu v zobrazení f jako hodnoty $\Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ pro $x_1 = 1, 2, \ldots$). Lze tedy redukovat theorii zobrazení prostoru B do B v tomto smyslu na theorii zobrazení prostoru B do N.

Tak na př. je snadno vidět, že zobrazení f prostoru B do B je spojité tehdy a jen tehdy, je-li příslušné („representující") zobrazení Φ prostoru B do N spojité.

Zobrazení Φ prostoru B do N se někdy nazývají *„aritmetickými funkcionálami"*, neboť „argument" probíhá „aritmetické funkce" $\varphi(i) = x_i$ (o argumentech a hodnotách celočíselných), hodnotou funkcionály je opět přirozené číslo $\Phi(\varphi)$.