Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Šlechta
Zakreslování projektovaných objektů do fotografie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 4, 321--332

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117133

ZAKRESLOVÁNÍ PROJEKTOVANÝCH OBJEKTŮ DO FOTOGRAFIE

JAROSLAV ŠLECHTA, Praha.

(Došlo dne 26. listopadu 1953.)

DT:526.918.51
72.012

Na několika běžněji se vyskytujících případech je v tomto článku naznačeno, jak lze použitím elementární geometrie poměrně přesně zakresliti jakýkoliv projektovaný objekt do fotografie. Všude jest uveden i konstruktivní postup, aby vlastní provedení zakreslení bylo z textu a z obrázků zřejmě patrno.

Při navrhování technických děl se někdy požaduje, aby bylo zjištěno pokud možno přesně, jak vhodně bude projektované dílo umístěno v terénu, do jaké míry bude v souladu s již postavenými objekty, resp. jak dalece poruší ráz města nebo krajiny.

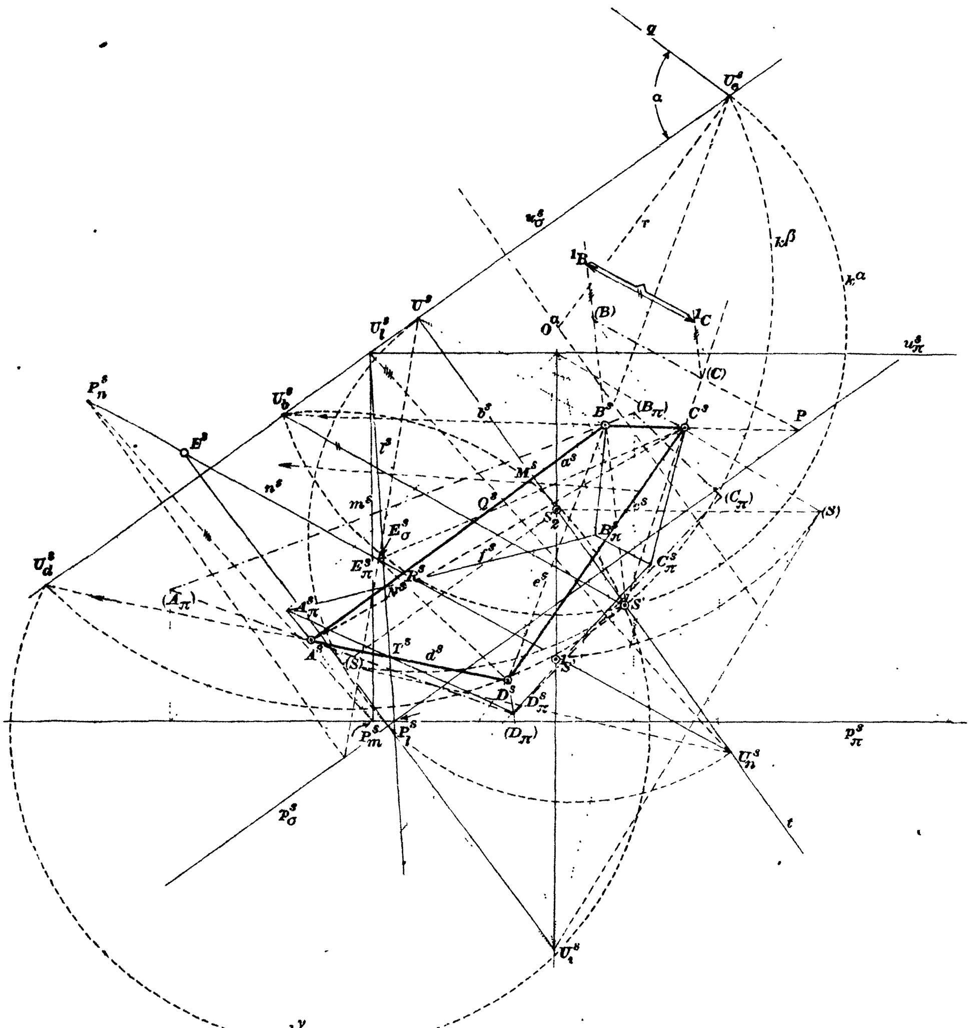
K posouzení projektovaného díla po této stránce, ať již jde o most, železnici, silnici, průmyslovou budovu nebo i celé sídliště, nejlépe se hodí zakreslení objektu do fotografie onoho území, na němž má být objekt zřízen. Má-li ovšem zakreslení poskytnouti správný obraz krajiny, jak bude tato vypadati po zřízení projektovaného objektu, musí býti provedeno přiměřeně přesně.

K řešení úlohy je především třeba si uvědomiti, jaké podklady pro řešení máme zpravidla k disposici, a pak úlohu formulovati geometricky. Pokud jde o podklady řešení, lze předpokládati, že je k disposici podrobný plán fotografovaného území včetně výškových kót, případně vrstevnic, že do tohoto plánu je zakreslena situace navrhovaného díla a že jsou přirozeně známy i výškové poměry díla. Dalším nutným předpokladem pro řešení je, že se nám podaří najíti na fotografii pět bodů, jichž situaci i výšky známe (jsou patrny v situačním plánu), a že z těchto pěti bodů leží čtyři v jedné rovině, která může mít jakoukoliv polohu; ale řešení je obzvláště jednoduché, je-li tato rovina horizontální.

Při zakreslování do fotografie nějaké části města lze řešení ještě dále zjednodušiti, neboť zmíněné čtyři body tvoří tu často obdélník, nebo dokonce čtverec. Když zmíněné body A, B, C, D, leží v rovině, která není horizontální, pak lze úlohu provést takto:

1. Máme dva průměty roviny $\sigma \equiv (ABCD)$, a to středový průmět $\sigma^s \equiv$

$\equiv (A^s B^s C^s D^s)$ na fotografii (obr. 1a) a orthogonální průmět (obr. 1b) na horizontální rovině π (situační plán) $\sigma \equiv (A^0 B^0 C^0 D^0)$. Kóty bodů jsou $A(-23)$, $B(+70)$, $C(+76)$, $D(+22)$. Mimo to známe na snímku i v plánu další bod E.

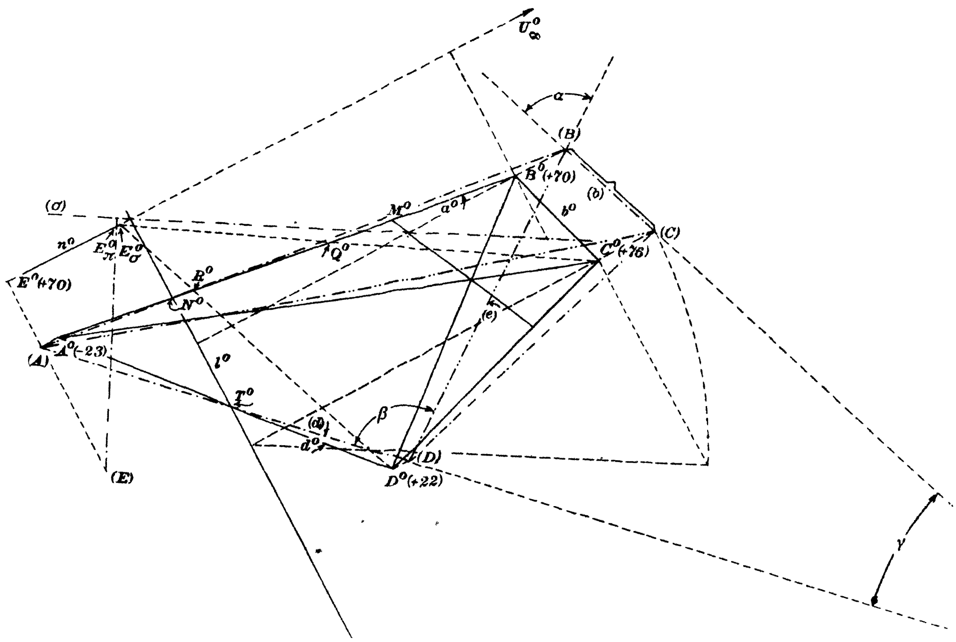


Obr. 1a.

Úlohou je sestrojiti střed promítání snímku, distanci promítání a úběžnici vodorovné roviny.

Ježto známe průměty bodů téže roviny, lze body A^s, B^s, C^s, D^s považovati za elementy bodového pole σ^s, jež jest kolineární s polem $\sigma^0 \equiv (A^0 B^0 C^0 D^0)$. Najdeme-li v této kolineaci k úběžné přímce u_σ^0 pole σ^0 odpovídající přímku

u_σ^s, je tato přímka úběžnicí roviny σ na fotografii. Určíme dále v situačním plánu území (obr. 1b) kolmý průmět pátého zvoleného bodu $E(+\,70)$ do roviny $\sigma \equiv (A^0B^0C^0D^0)$ a označíme E_σ^0. Rovněž k tomuto bodu lze najíti bod odpovídající v poli σ^s, a to nejlépe tak, že v situačním plánu (obr. 1b) vytkneme na spojnici bodů E^0B^0, t. j. v řadě bodů $a^0 \equiv (A^0B^0M^0)$ body Q^0 a R^0 (z nichž Q^0 dostaneme v průsečíku spojnice $E_\sigma^0C^0$ s a^0; R^0 pak vznikne v průsečíku přímky $E_\sigma^0D^0$ rovněž s a^0). K těmto dvěma bodům najdeme body odpovídající v promětné řadě $a^s \equiv (A^sB^sM^s)$ na fotografii (obr. 1a). Konstruktivně lze to



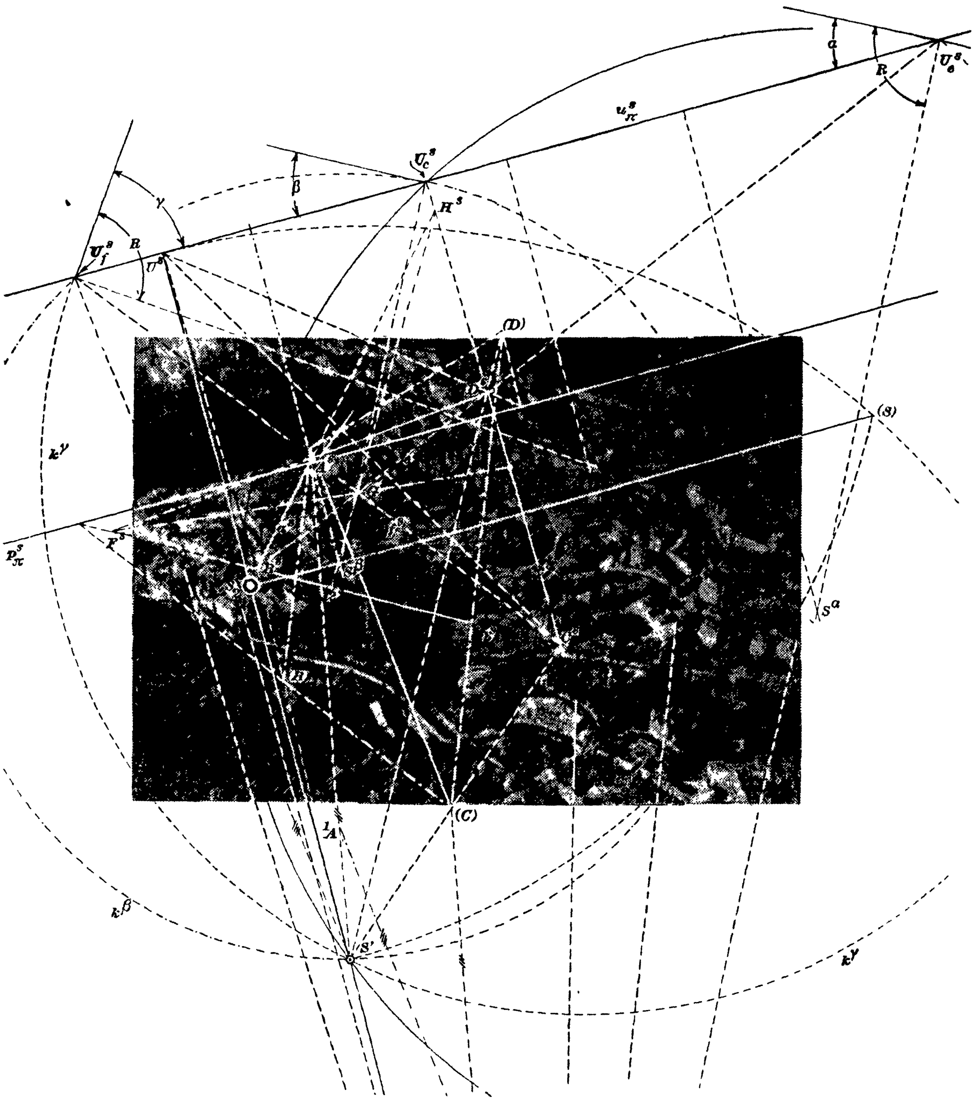
Obr. 1b.

provésti elementárně převedením řad do polohy perspektivní, nejlépe pomocí proužku papíru (koincidenční trojiny) — viz příklad v následujícím odstavci (obr. 2). Získali jsme tedy v obr. 1a již úběžnici u_σ^s a bod E_σ^s. V průsečíku přímek $b^s \equiv (B^sC^s)$, $d^s \equiv (A^sD^s)$ a $e^s \equiv (B^sD^s)$ s úběžnicí u^s jsou přístupné úběžníky U_b^s, U_d^s, U_e^s stran čtyřrohu $A^sB^sC^sD^s$ (zbývající tři úběžníky stran a^s, c^s, f^s vycházejí v obr. 1a mimo nákresnu). Při sestrojování středového průmětu dostali bychom úběžníky, jak známo, tak, že bychom středem S perspektivní kolineace mezi středovým průmětem a sklopením roviny vedli rovnoběžky se směry stran a, d, e.

Kdybychom tedy vedli obráceně zmíněnými úběžníky rovnoběžky se směry stran a, d, e, dostali bychom hledaný střed kolineace S. Označíme-li úhel přímek b, e písmenem α, úhel přímek e, d písmenem β a úhel přímek b, d písmenem γ (skutečné velikosti úhlů α, β, γ byly určeny ve sklopení v situačním plánku — obr. 1b), tu lze, jak patrno, sestrojiti střed kolineace S' jako společný průsečík kružnic k^α, k^β a k^γ které sestrojíme jako geometrická místa bodů, z nichž spatřujeme úsečky $U^s_b U^s_e$ pod úhlem α, $U^s_d U^s_e$ pod úhlem β a $U^s_d U^s_b$ pod úhlem γ.

Sestrojení kružnice k^α: Určíme symetrálu úsečky $U^s_b U^s_e$, naneseme úhel $qU^s_e = \alpha$ a vedeme bodem U^s_e přímku $r \perp q$, na symetrále úsečky $U^s_b U^s_e$ dostaneme pak střed O^α kružnice k^α. Obdobně sestrojíme k^β a k^γ. Spustíme-li dále ze středu kolineace S' kolmici t na úběžnici u^s_σ, dostaneme úběžník U^s přímek spádových roviny σ. V průsečíku přímky t se spojnicí $E^s E^s_\sigma$ dostaneme úběžník normál roviny σ, který jest v obr. 1a označen U^s_n. Opíšeme dále nad úsečkou $U^s U^s_n$ jako průměrem kružnici, kterou protneme kružnicí sestrojenou z bodu U^s poloměrem $U^s S'$, čímž vznikne bod (S). Na kolmici spuštěné z tohoto bodu na $U^s U^s_n$, dostaneme orthogonální průmět středu promítání S_2. Vzdálenost $S_2(S)$ je, jak patrno, distance středového průmětu (fotografie).

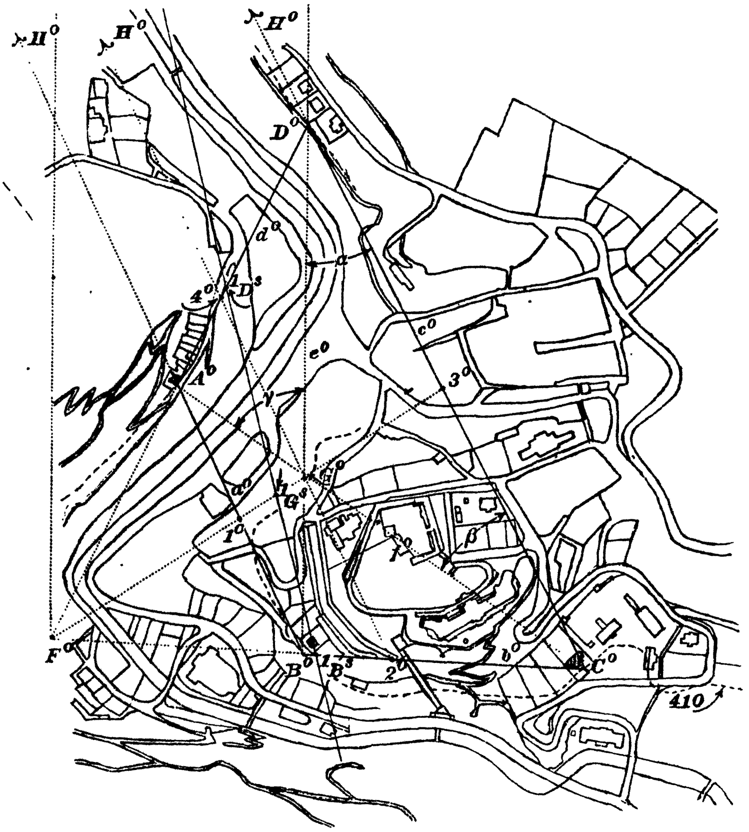
Polohu stopy p^s_σ roviny σ určíme z podmínky, že v perspektivní kolineaci mezi body fotografie a sklopenými body roviny musí ve sklopení vyjíti správné rozměry čtyřrohu $ABCD$ ve skutečné velikosti. Konstruktivně lze této podmínce vyhověti tak, že na paprsku $S'B^s$ zvolíme libovolný bod ${}^1B$ a tímto bodem vedeme ${}^1B^1C \parallel S'U^s_b$. Učiníme pak ${}^1B^1C$ rovno skutečné délce úsečky BC (získána ve sklopení v obr. 1b a označena svorkou jak v obr. 1b, tak po přenesení v obr. 1a). Dále vedeme, jak patrno v obr. 1a bodem ${}^1C$ rovnoběžkou s přímkou ${}^1BS'$ a na prodloužení úsečky $S'C^s$ dostaneme bod (C). Vedeme-li dále $(C)(B) \parallel {}^1B^1C \parallel S'U^s_b$, dostaneme v průsečíku $(B)(C)$ s $b^s \equiv (B^sC^s)$ bod P, jímž vedeme stopu p^s_σ rovnoběžně s u^s_σ. Kdyby body $ABCD$ byly vesměs v horizontální rovině, bylo by již nyní možno celou situaci z obr. 1b přenésti na fotografie podle pravidel středového promítání. Je-li však rovina bodů $ABCD$ nakloněna k horizontální rovině, pak by vynášení bylo velmi zdlouhavé a nepohodlné, proto zavedeme si do fotografie úběžnici a stopu horizontální roviny. Označme horizontální rovinu písmenou π (první průmětna kótovaného promítání — situačního plánu). Průsečnice roviny σ a π se sestrojí v situačním plánu snadno jako stopa roviny σ na první průmětně (v obr. 1b označena l^0). Středový průmět průsečnice l^s dostaneme nejkratčeji tak, že sestrojíme body N^s a T^s odpovídající bodům N^0 a T^0 na stranách a^0 a d^0 opět pomocí projektivní příbuznosti bodových řad. Tam, kde l^s protne u^s_σ, dostaneme úběžník U^s_l, kde protne l^s stopu p^s_σ, dostaneme stopník P^s_l. Známe tedy stopník a úběžník přímky l, jež leží v rovině π. K určení stopy a úběžnice roviny π potřebujeme ještě znáti jeden bod této roviny. Poměrně snadno lze určiti středový průmět bodu E^s_π, v němž normála $n \equiv EE_\sigma$ protíná rovinu π. Na řadách n^s (obr. 1a) a n^0 (obr. 1b) známe tři družiny vzájemně si odpovídajících bodů: Na n^0 jsou to body E^0, E^0_σ a úběžný bod normály U^0_∞. Těmto bodům odpovídají sdružené body E^s, E^s_σ a U^s_n. K bodu E^0_π řady n^0 najdeme pak odpovídající bod E^s_π zase nejlépe proužkem papíru (koincidenční trojiny). Středový obraz přímky n^s doplníme pak ještě stopníkem P^s_n: vedeme spojnici $U^s E^s_\sigma$, až protne p^s_σ, a tímto



Obr. 2a.

bodem vedeme rovnoběžku se spojnicí $U^s_n U^s$. Tato rovnoběžka vytne na n^s bod P^s_n, jak ostatně plyne ze zásad středového promítání. Vedeme-li dále přímku $m \parallel l$ a určíme její stopník P^s_m, dostaneme (v obr. 1a vedena spojnice bodu U^s_l

s bodem U^s a bodem P^s_n vedeno $P^s_n P^s_m \parallel U^s_l U^s_n$) ve spojnici $P^s_m P^s_l$ stopu p^s_π horizontální roviny a bodem U^s_n vedeme pak úběžnici u^s_π rovnoběžně. V obr. 1a sestrojen ještě úběžník normál horizontální roviny U^s_v a střed kolineace ${}^1S'$, dále spuštěny kolmice z bodů A, B, C, D, čímž vznikly průměty do roviny π: A_π, B_π, C_π a D_π. Sklopíme-li A_π, B_π, C_π a D_π, dostaneme čtyřroh (A_π), (B_π), (C_π) a (D_π), který je shodný se situačním plánem (kótovaným průmětem) $A^0B^0C^0D^0$.



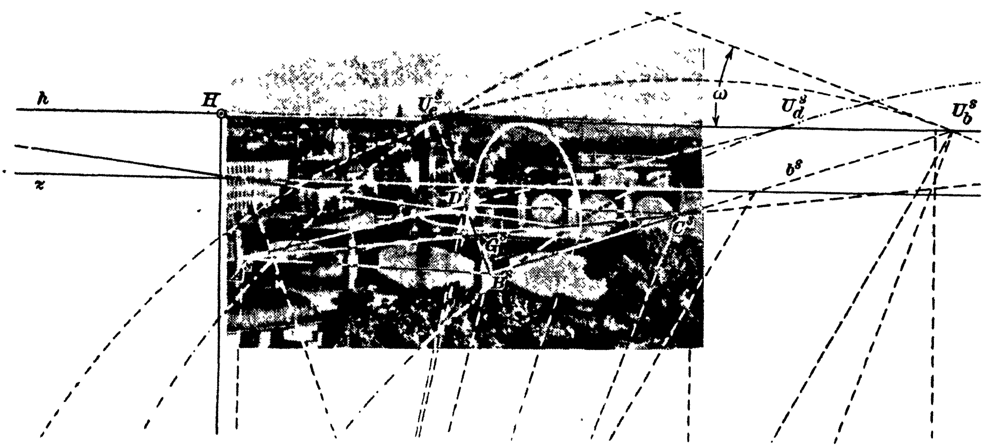
Obr. 2b.

Toto sklopení jest v obr. 1a provedeno tečkovaně, čtyřroh $(A^0)(B^0)(C^0)(D^0)$ proveden čerchovaně.

2. Konstrukce se značně zjednoduší, když body A, B, C, D leží v rovině horizontální, čili když roviny σ a π se ztotožní. Obvykle lze takové body vyhledati, takže při praktickém provádění se úloha vyskytuje spíše v této jednodušší formě. V obr. 2a je uvedena reprodukce leteckého snímku jistého území, v obr. 2b pak je schematický situační plán téhož území. Na fotografii vytyčeny body A^s, B^s, C^s, D^s, které leží v téže horizontální rovině a mají, jak patrno z obr. 2b, všechny nadmořskou výšku 410 m. Část vrstevnice 410 v okolí bodu A^0, B^0, C^0, D^0 v obr. 2b je vyznačena čárkovaně — kóta 410 připsána. K úběžnému bodu U_e^0 (obr. 2b) úhlopříčky $e^0 \equiv (E^0D^0G^0)$ určíme kolineárný bod (obr. 2a) v řadě $e^s \equiv (B^sD^sG^s)$ tak, že přeneseme body B^s, G^s, D^s na proužek papíru a v obr. 2b posunujeme tento papír tak dlouho, až příslušné body na proužku papíru budou na paprscích F^0D^0, F^0G^0, F^0B^0. Tato poloha proužku je v obr. 2b zakreslena plnou čarou a označena ${}^1e^s \equiv ({}^1D^s, {}^1G^s, {}^1B^s)$. Vedeme-li bodem F^0 rovnoběžku s e^0, vytneme, jak patrno, na ${}^1e^0$ bod ${}^1U_e^s$, jenž odpovídá úběžnému bodu řady e^0. Tento bod přeneseme na zmíněném proužku papíru do obr. 2a, čímž dostaneme na e^s bod U_e^s. Obdobně dostaneme na $c^s \equiv (C^sD^sB^s)$ bod U_c^s a na $f^s \equiv (A^sC^sG^s)$ bod U_f^s. Body U_e^s, U_c^s a U_f^s leží ovšem na jedné přímce, na úběžnici horizontální rovin u_π^s. Střed perspektivní kolineace mezi středovým průmětem (fotografií) a sklopením roviny π určíme tak, jak popsáno v předešlém oddíle pro rovinu σ, t. j. bod S' určíme jako společný průsečík tří kružnic k^α, k^β, k^γ. Kružnici k^α sestrojíme jako geometrické místo bodů, z nichž spatřujeme úsečku $U_c^sU_e^s$ pod úhlem α, který svírají strany c, e čtyřrohu $EBCD$ a tudíž též strany c^0, e^0 čtyřrohu $A^0B^0C^0D^0$. Obdobně určíme k^β jako geometrické místo bodů, z nichž spatřujeme úsečku $U_f^sU_c^s$ pod úhlem β, který svírají strany c^0, f^0. Kružnici k^γ stanovíme pak stejným postupem na základě úhlu γ, který svírají strany e^0, f^0. Dále postupujeme stejně jako v oddíle předchozím: Spuštěním kolmice z S' na u_π^s vznikne úběžník spádových přímek U^s. Polohu stopy p^s určíme pak z podmínky, že sklopená délka úsečky AC se musí rovnati A^0C^0. Naneseme tedy od libovolného bodu ${}^1A$ paprsku $S'A^s$ rovnoběžně s $S'U_f^s$ délku A^0B^0 do bodu ${}^1C$ a bodem ${}^1C$ vedeme s $S'A^s$ rovnoběžku, až protne paprsek $S'C^s$ v bodě (C). Pak vedeme $(C)(A)$ rovnoběžně s ${}^1A{}^1C$ a v průsečíku s A^sC^s dostaneme bod X, jímž vedeme $p_\pi^s \parallel u_\pi^s$. Abychom mohli sestrojiti orthogonální průmět středu promítání, jest nutno i zde určiti úběžník normál k horizontální rovině čili úběžník vertikál. Na fotografii tohoto území je patrna celá řada vertikálních hran, takže není nutno určovati vertikálu pomocí zvláštního bodu E ležícího mimo rovinu $ABCD$. V obr. 2a byly prodlouženy obrazy vertikálních hran (nároží) několika budov a získán tak na přímce $S'U^s$ úběžník vertikál U_v^s. Nad $U_v^sU^s$ jako průměrem opíšeme kružnici, kterou přetneme poloměrem U^sS' z bodu U^s. Tím dostáváme bod (S), z něhož vedeme $(S)S_2 \perp S'U^s$. Tak vznikne S_2 obdobně jako v obr. 1a.

Chceme-li pak zobraziti do fotografie nějaký objekt daný v situačním plánu, postupujeme již dále jako při konstrukci středového průmětu.

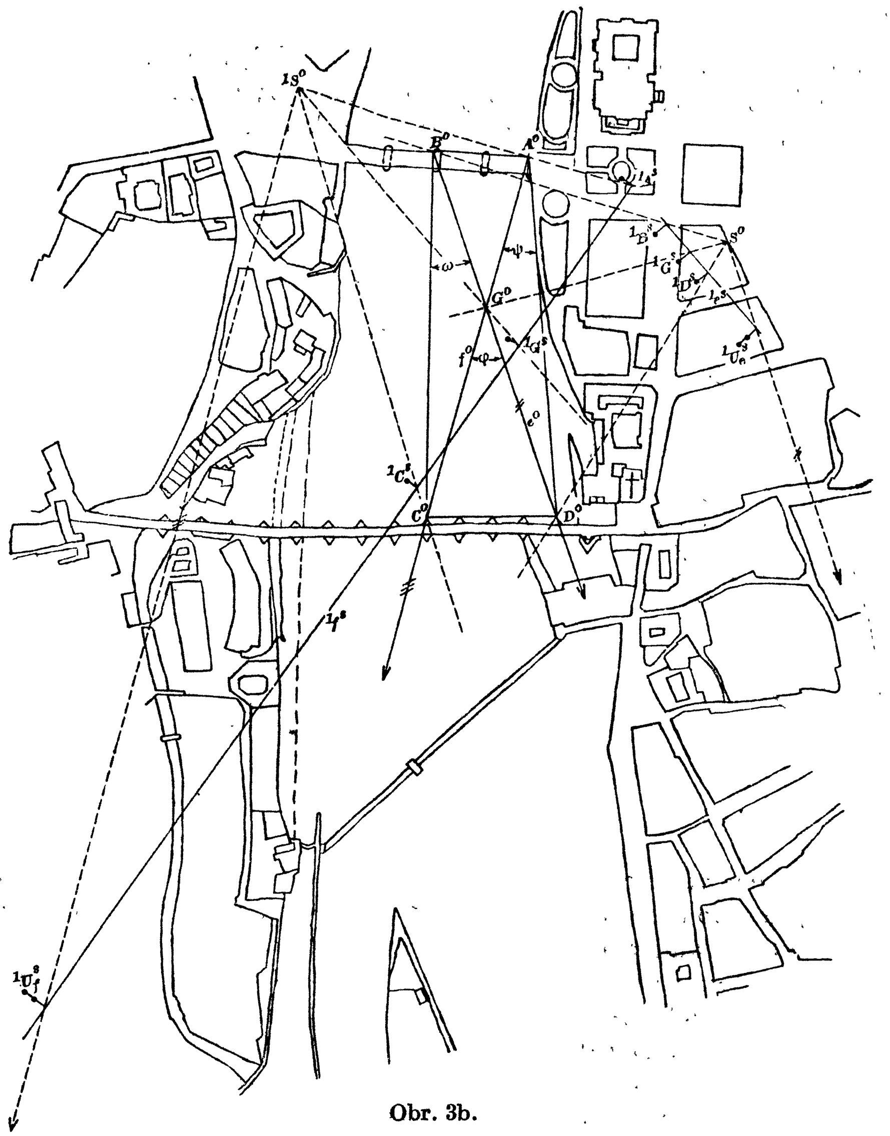
3. K dalšímu podstatnému zjednodušení konstrukcí dojde, když body A, B, C, D jsou v rovině horizontální a když úběžník vertikál je v nekonečnu, čili když obrazy vertikál na fotografii jsou svislé. (Rovina snímku je svislá.) Jako příklad tohoto případu je uvedena v obr. 3a fotografie pohlednice zobrazující několik pražských mostů, z nichž most Mánesův a Karlův jsou v popředí. Body A^s, B^s, C^s, D^s voleny na hladině Vltavy, a to body A^s a B^s pod lícem viditelných patek oblouků, body C^s a D^s pak rovněž na hladině, avšak v hrotech pátého, resp. prvého návodního pilíře. V obr. 3b je schematický snímek příslušné části katastrální mapy a vrcholy čtyřrohu odpovídající bodům A^s, B^s, C^s, D^s jsou v této situaci označeny A^0, B^0, C^0, D^0. Obdobně jako v případě předchozím i zde určíme k úběžnému bodu U_e^0 úhlopříčky $e^0 \equiv (B^0D^0G^0)$ kolineární bod v řadě $e^s \equiv (B^sD^sG^s)$ tak, že přeneseme body B^s, G^s, D^s na proužek papíru a v obraze 3b posunujeme proužkem papíru tak dlouho, až tyto body budou incidentní s paprsky, jimiž se promítá řada bodová $e^0 \equiv (B^0G^0D^0)$ z libo-



Obr. 3a.

volně zvoleného bodu S^0. Tato poloha proužku je v obr. 3b označena ${}^1e^s \equiv$ $\equiv ({}^1D^s, {}^1G^s, {}^1B^s)$. Vedeme-li bodem S^0 rovnoběžku s e^0, vytne tato rovnoběžka na ${}^1e^s$ bod ${}^1U_e^s$ a po přenesení proužku na e^s též bod U_e^s (obr. 3b). Obdobně dostaneme na $f^s \equiv (A^s, G^s, C^s)$ bod U_f^s — řada bodů f^0 v obr. 3b promítnuta z libovolného bodu ${}^1S^0$, koincidencí stanovena poloha ${}^1f^s$, dále bod ${}^1U_f^s$ a po přenesení do obr. 3a bod U_f^s. Spojnice bodů U_e^s a U_f^s dává úběžnici roviny horizontální u_π^s čili horizont obrazu h. Kontrolou správnosti konstrukce horizontu je to, že horizont takto určený musí vyjíti opravdu do horizontu fotografie čili do obrazu velmi vzdálených objektů.

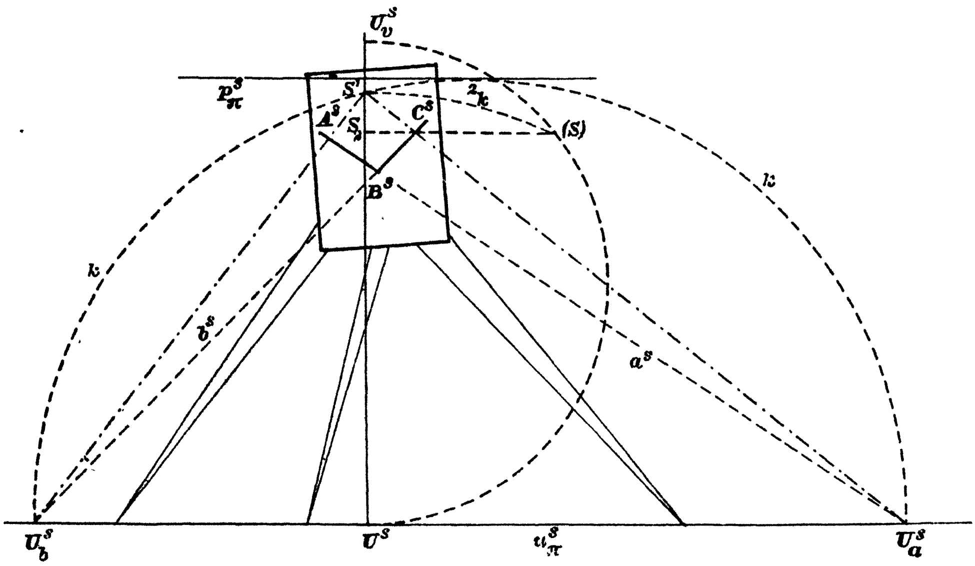
Střed perspektivní kolineace mezi středovým průmětem (fotografií) a sklopením roviny π určíme obdobně jako v oddílech 1 a 2, t. j. jako společný průsečík tří kružnic, z nichž spatřujeme úsečku $U_e^sU_f^s$ pod úhlem φ, $U_f^sU_d^s$ pod úhlem ψ a úsečku $U_e^sU_b^s$ pod úhlm ω. Ježto úběžník vertikál je, jak patrno, v nekonečnu, vznikne spuštěním kolmice z bodu S' na horizont v patě této kolmice hlavní bod H. Hlavní bod vychází mimo obrázek, což svědčí o tom, že pohlednice vznikla zvětšením části negativu, jehož střed nebyl příliš odchylný od bodu H. Rovněž poloha stopy horizontální roviny čili základnice obrazu z se určí obdobně jako v odst. 2: Z podmínky, že úsečka $\overline{(B)(C)}$ musí být rovnoběžná s $S'U_b^s$, při čemž $\overline{(B)(C)} = \overline{B^0C^0}$, a že současně musí body (B) a (C) ležeti na spojnici $S'B^s$ resp. $S'C^s$, určí se poloha bodů (B) a (C). Základni-



Obr. 3b.

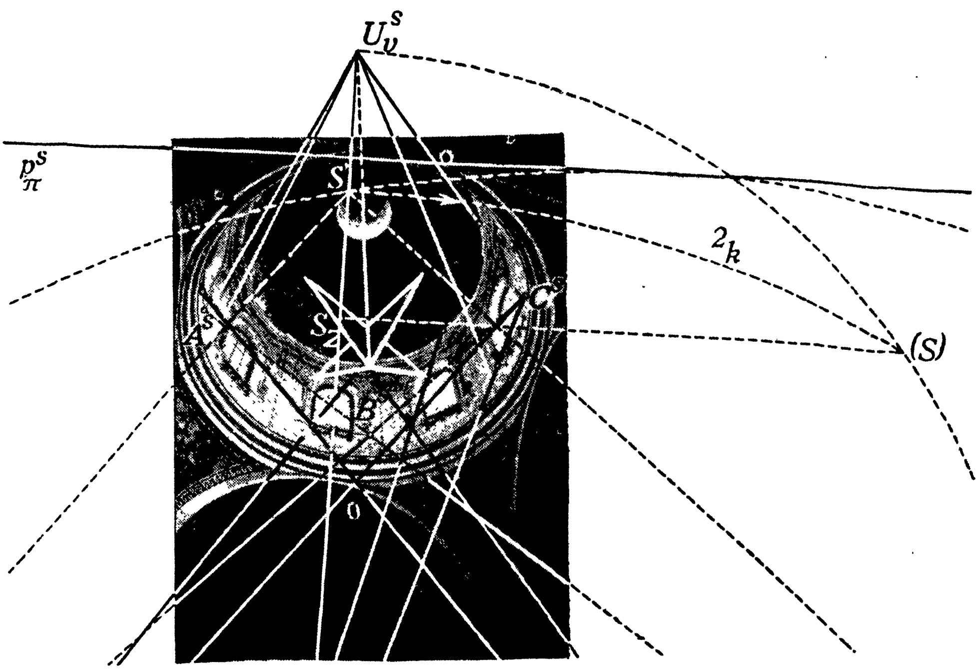
ce pak prochází průsečíkem spojnice $(B)(C)$ se spojnicí B^sC^s rovnoběžně s horizontem. Sklopení dalších bodů A^s, D^s se provede podle pravidel známých ze středového promítání (obr. 3a). Kontrolou správnosti konstrukce je, že čtyřroh $(A)(B)(C)(D)$ je shodný se čtyřrohem $A^0B^0C^0D^0$. V obraze 3b byla ve sklopení vytčena půlkružnice (k) o poloměru 50 m na hladině Vltavy a mimo to půlkružnice $({}^1k)$ v rovině vertikální. Středové průměty k^s i ${}^1k^s$ sestrojeny v obr. 3a podle pravidel středového promítání. Jak patrno, dotýká se ${}^1k^s$ právě horizontu, čili zjišťujeme, že bylo fotografováno s výšky as 50 m nad hladinou Vltavy.

4. Ještě další zjednodušení konstrukce nastane, když na fotografii je možno najíti objekt, jehož průmět do roviny horizontální je pravidelný mnohoúhelník. V obr. 4 jest uvedena fotografie vnitřku kupole chrámu sv. Kříže v Děčíně,



Obr. 4a.

která se tvarem velmi podobá známé kupoli chrámu sv. Petra v Římě. Na fotografii kupole bylo vyhledáno několik párů rovnoběžek, které určí přímo body na úběžnici horizontální roviny u_π^s. Zvolené body jsou na fotografii černě okroužkovány. Z vlastností pravidelného osmiúhelníka pak plyne, že úhel ABC je pravý. Přímky $a^s \equiv (A^sB^s)$ a $b^s \equiv (B^sC^s)$ určí pak na u_π^s body U_a^s resp. U_b^s. Potřebný střed kolineace S' bude pak zřejmě na kružnici opsané nad úsečkou $U_a^sU_b^s$ jako průměrem, neboť z bodů této kružnice spatřujeme uvedenou úsečku pod pravým úhlem. Mimo to musí ještě býti bod S' na kolmici spuštěné z úběžníka vertikál U_v^s na u_π^s. Úběžník U_v^s dostaneme v průsečíku obrazů prodloužených vertikálních hran. V průsečíku kolmice s kružnicí k je hledaný střed kolineace S'. Obdobně jako v obr. 3a i zde určíme bod (S) v průsečíku kružnice opsané nad $U_v^sU^s$. Označíme-li dále patu kolmice spuštěné s U_v^s na u_π^s písmenem U^s (úběžník přímek spádových horizontální roviny π), pak ze základních konstrukcí středového promítání vychází, že sklopený střed promítání (S) je v průsečíku kružnice ${}^1k$ opsané nad $U^s_v U^s$ jako průměrem a kružnice ${}^2k$ opsané ze středu U^s poloměrem $U^s S'$. Hlavní bod dostaneme pak, když vedeme $(S) S_z \perp U^s_v U^s$. Najdeme-li na fotografii obraz úsečky, ležící v horizontální rovině, a známe-li skutečnou velikost této úsečky, pak lze vždy určiti polohu stopy příslušné horizontální roviny způsobem popsaným v odst. 2. Neznáme-li takovou délku, lze p^s_π voliti libovolně, avšak rovnoběžnou s u^s_π. Z fotografie nelze pak



Obr. 4b.

dostati skutečné velikosti úseček, nýbrž pouze velikosti poměrné. Na obr. 4 zvolena stopa roviny obsahující patu válcové části kupole p^s_π jako tečna k obrazu příslušné pateční čáry na fotografii, a to rovnoběžná s u^s_π. V této rovině pak sestrojen jako příklad čtvercový základ tělesa, složeného ze čtyř rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků, jichž strany jsou rovny čtvrtině průměru válcové části kupole. (Těleso je ve svislé ose klenby.) Příslušné elementární konstrukce byly v obrázku vynechány, aby nebyl příliš zaplněn čarami.

Stejným způsobem bychom postupovali, kdyby šlo o objekt nad obdélníkem nebo čtvercem. Pro stanovení bodu S' použili bychom pak úhlu úhlopříček.

5. Kdyby na fotografii byl zobrazen objekt nad pravidelným mnohoúhelníkem, příp. čtvercem nebo obdélníkem, a kdyby mimo to byl úběžník vertikál v nekonečnu, pak využívajíce jednoho pravého úhlu a úhlu úhlopříček, sestrojili bychom dolní distančník v průsečíku dvou kružnic, z nichž spatřujeme vzdálenosti příslušných úběžníků na horizontu pod úhlem pravým, event. pod úhlem úhlopříček. Tento případ není doložen obrazem, neboť je tak jednoduchý, že jej lze na základě předchozího bezpečně zvládnout.