Luděk Granát; Miroslav Fiedler

Racionální křivky s maximálním počtem reálných uzlových bodů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 2, 157--161

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117116

RACIONÁLNÍ KŘIVKY S MAXIMÁLNÍM POČTEM REÁLNÝCH UZLOVÝCH BODŮ

LUDĚK GRANÁT a MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 30. listopadu 1953.) 513.61,12

V soutěži studentské tvořivosti v r. 1952 podal *Luděk Granát* jednoduchý příklad (rovinné) racionální křivky n-tého stupně pro sudé kladné n, která má maximální počet, totiž $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, (reálných) uzlových bodů. Výsledek (bez důkazu) je uveden ve větě 1. Spoluautor, který Granátovu práci četl, nalezl rovněž jednoduchý příklad takové racionální křivky n-tého stupně, a to pro každé přirozené n. O tom jednají věty 2 a 3.

V celém článku předpokládáme, že je dána rovina a v ní pravoúhlá soustava souřadnic x, y. Pod pojmem racionální křivky n-tého stupně, kde n je přirozené číslo, rozumíme množinu všech bodů (x, y), pro něž pro nějaké reálné číslo t je

$$x = \frac{f(t)}{h(t)}, \quad y = \frac{g(t)}{h(t)}, \quad h(t) \neq 0\ ,^{1)} \tag{1}$$

kde $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ jsou reálné polynomy nejvýše n-tého stupně bez společných nulových bodů, z nichž alespoň jeden je právě n-tého stupně, a přitom platí: alespoň jeden bod (x_0, y_0), $x_0 = \frac{f(t_0)}{h(t_0)}$, $y_0 = \frac{g(t_0)}{h(t_0)}$, $h(t_0) \neq 0$, odpovídá jen parametru t_0, při čemž matice

$$\begin{Vmatrix} f(t_0), & g(t_0), & h(t_0) \\ f'(t_0), & g'(t_0), & h'(t_0) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

má hodnost 2 (f' atd. jsou derivace podle t).

Uzlovým bodem křivky (1) je pak bod (x, y), který odpovídá právě dvěma různým číslům t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, a to reálným (t. j. $x = \frac{f(t_1)}{h(t_1)} = \frac{f(t_2)}{h(t_2)}$, $y = \frac{g(t_1)}{h(t_1)} = \frac{g(t_2)}{h(t_2)}$, $h(t_1) \,.\, h(t_2) \neq 0$), a přitom

[1]) Tato množina se doplňuje bodem $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{h(t)}$, $\bar{y} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{g(t)}{h(t)}$, pokud existuje a případně isolovanými singulárními body tvaru (1) pro ta t komplexní (ne reálná), pro která jsou x i y reálná.

$$\begin{vmatrix} f(t_1), & g(t_1), & h(t_1) \\ f'(t_1), & g'(t_1), & h'(t_1) \\ f'(t_2), & g'(t_2), & h'(t_2) \end{vmatrix} \neq 0.^{2)} \tag{3}$$

Platí potom známá věta, že racionální křivka n-tého stupně má nejvýše $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ uzlových bodů. Uvedeme teď dvě věty (první bez důkazu, druhou se stručným důkazem), které obsahují jednoduché příklady racionálních křivek n-tého stupně, které mají právě $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ uzlových bodů:

Věta 1. *Budiž $n > 0$ sudé číslo, $n = 2m$, h reálné číslo takové, že $h > m - 1$, $h \neq m$. Hypocykloida o parametrických rovnicích*

$$x = h \cos m\tau + m \cos(m - 1)\,\tau\,,$$
$$y = h \sin m\tau - m \sin(m - 1)\,\tau\,,$$
$$0 \leqq \tau < 2\pi\,,$$

je racionální křivka n-tého stupně[3]) *s $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ uzlovými body.*

Věta 2. *Budiž n přirozené číslo. Množina M bodů*

$$x = \cos n\tau,\ y = \cos(n - 1)\,\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \pi\,, \tag{4}$$

je částí racionální křivky R_n n-tého stupně, která má (dokonce v M) $\frac{1}{2}(n - 1)$. . $(n - 2)$ uzlových bodů. Všechny body R_n dostaneme, připojíme-li ještě jednak množinu M' bodů

$$x = \cosh n\sigma,\ y = \cosh\,(n - 1)\,\sigma,\ \sigma > 0\,. \tag{4'}$$

jednak množinu M'' bodů

$$x = (-1)^n \cosh n\zeta,\ y = (-1)^{n-1} \cosh(n - 1)\,\zeta,\ \zeta > 0\,. \tag{4''}$$

Důkaz: Nejprve uvedeme tři pomocná tvrzení:

1. Pro každé přirozené číslo n existuje polynom $T_n(x)$ n-tého stupně tak, že je pro každé ξ

$$\begin{aligned} \cos n\xi &= T_n(\cos \xi)\,, \\ \cosh n\xi &= T_n(\cosh \xi)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Přitom pro sudé (liché) n obsahuje $T_n(x)$ jen sudé (liché) mocniny x.

Důkaz plyne snadno indukcí pomocí vzorců

$$\begin{aligned} \cos(n + 1)\,\xi &= 2 \cos\xi \cos n\xi - \cos(n - 1)\,\xi\,, \\ \cosh(n + 1)\,\xi &= 2 \cosh \xi \cosh n\xi - \cosh(n - 1)\,\xi\,.^{4)} \end{aligned} \tag{6}$$

---

[2]) To znamená, že v bodě (x, y) existují dvě reálné tečny a že jsou různé.

[3]) Na tvar (1) ji lze uvést substitucí $\cotg \frac{1}{2}\tau = t$. O hypocykloidě viz na př. *G. Loria:* Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. 2. vyd., 2. díl, str. 94.

[4]) Polynomy $T_n(x)$ jsou t. zv. Čebyševovy polynomy. $T_n(x)$ lze na př. vyjádřit n-řádkovým determinantem

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} x, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 1, & 2x, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2x, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2x, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & 2x \end{vmatrix}.$$

2. Budiž n přirozené číslo. Označme S_n množinu těch celých čísel m, $0 < m \leqq n(n-1)$, která nejsou dělitelna ani číslem n, ani $n-1$. Potom S_n má $(n-1)(n-2)$ prvků a platí:

Ke každému číslu $k \in S_n$ existuje právě jedno číslo $k' \in S_n$ tak, že pro $\varepsilon^2 = 1$ je

$$k' \equiv \varepsilon(2n-1)\, k \mod 2n(n-1)\,. \tag{7}$$

Je $k' \neq k$ a k číslu k' obdobně sestrojené číslo je opět k.

Důkaz. První část je zřejmá. Pro dané $k \in S_n$ existují čísla k_i, $i = 1, 2$, tak, že $-n(n-1) \leqq k_i < n(n-1)$ a $k_i \equiv (-1)^i (2n-1)\, k \mod 2n(n-1)$. Poněvadž čísla $2n-1$ a $2n(n-1)$ jsou nesoudělná, je $k_i \neq 0$, a dále $k_1 = -k_2$, neboť $k_1 \equiv -k_2 \mod 2n(n-1)$. Má tedy právě jedno z čísel k_1, k_2, označme je k' (a tedy vůbec právě jedno) vlastnost, že je $0 < k' < n(n-1)$ a že platí (7). Kdyby k' bylo dělitelno n resp. $n-1$, pak by i k bylo dělitelno n resp. $n-1$ proti předpokladu. Tedy $k' \in S_n$. Kdyby $k' = k$, pak by pro $\varepsilon = 1$ resp. $\varepsilon = -1$ bylo k dělitelné n resp. $n-1$, což je spor. Konečně číslo k'' obdobně sestrojené pro k' je

$$k'' \equiv \varepsilon'(2n-1)\, k' \equiv \varepsilon\varepsilon'[4n(n-1)+1]\, k \equiv \varepsilon\varepsilon' k \equiv k \mod 2n(n-1)$$

pro $\varepsilon' = \varepsilon$, takže $k'' = k$.

Poznámka. Všechna čísla z S_n se tedy rozpadají v $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dvojic (k, k') čísel navzájem sdružených podle (7).

3. Nechť n je celé číslo, $n > 1$. Platí $\cos nu = \cos nv$, $\cos(n-1)\, u = \cos(n-1)\, v$, $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq \pi$, $u \neq v$ právě tehdy, je-li $u = \dfrac{k\pi}{n(n-1)}$, $v = \dfrac{k'\pi}{n(n-1)}$, kde k a k' jsou sdružená čísla z S_n.

Důkaz. Nechť pro $n > 1$ je $\cos nu = \cos nv$, $\cos(n-1)\, u = \cos(n-1)\, v$, $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq \pi$, $u \neq v$. Potom existují čísla ε_1, ε_2, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$, a celá čísla r, s tak, že

$$nu = \varepsilon_1 nv + 2r\pi\,, \tag{8a}$$

$$(n-1)\, u = \varepsilon_2(n-1)\, v + 2s\pi\,. \tag{8b}$$

Snadno se zjistí, že $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ (kdyby $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, pak $u = v$), takže (řešením (8a) a (8b)) čísla $k = \dfrac{n(n-1)}{\pi}u$, $k' = \dfrac{n(n-1)}{\pi}v$ jsou celá. Kdyby k bylo dělitelné n resp. $n-1$, pak by (jak se zjistí eliminací v) $r = 0$ resp. $s = 0$ a $u = v$ proti předpokladu. Tedy $k \in S_n$. Násobením (8a) i (8b) číslem $\dfrac{n(n-1)}{\pi}$ a sečtením plyne $k' = \varepsilon_1(2n-1)\, k - 2n(n-1)\, \varepsilon_1(r+s)$, a tedy (7). Důkaz obráceného tvrzení je snadný.

Teď již můžeme dokázat větu 2:

Z pomocného tvrzení 1 plyne, že M, M' a M'' jsou disjunktní části množiny R_n bodů (x, y) tvaru

$$x = T_n(t),\ y = T_{n+1}(t)\,, \tag{9}$$

a to M pro $-1 \leqq t \leqq 1$, $t = \cos\tau$, M' pro $t > 1$, $t = \cosh\sigma$, a konečně M'' pro $t < -1$, $t = -\cosh\zeta$. Avšak R_n je racionální křivka: (1) je splněna pro $f(t) = T_n(t)$, $g(t) = T_{n-1}(t)$, $h(t) = 1$; přitom bod $(1,1)$ odpovídá jen parametru $t_0 = 1$, a matice (2) má hodnost 2 pro $t_0 = 1$, neboť $T'_n(1) = n^2$ (dokáže se indukcí po derivování vztahu $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$, který plyne z (6)).

Budiž teď $k \in S_n$. Dokážeme, že bod $P_k(x_k, y_k)$, $x_k = \cos\dfrac{k}{n-1}\pi$, $y_k = \cos\dfrac{k}{n}\pi$, je uzlový bod R_n: bod P_k totiž můžeme dostat jen v části M, neboť $|x_k| \leqq 1$, $|y_k| \leqq 1$. Z pomocných tvrzení 3 a 2 snadno plyne, že P_k dostaneme právě pro dva různé parametry $t_1 = \cos\dfrac{k\pi}{n(n-1)}$, $t_2 = \cos\dfrac{k'\pi}{n(n-1)}$, kde k' je číslo sdružené s k v S_n. Že pro tyto hodnoty je splněna nerovnost (3), vyplývá odtud, že pro $t = \cos\tau$, $0 \neq \tau \neq \pi$, je $T_n'(t) = \dfrac{n \sin n\tau}{\sin\tau}$, a ze vztahu (7).

Lze tedy každé dvojici čísel sdružených v S_n přiřadit jeden uzlový bod R_n (tyto body jsou navzájem různé), t. j. R_n má alespoň (a podle citované známé věty právě) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ uzlových bodů.

Poznamenejme ještě, že z identity $T_{n(n-1)}(\cos\xi) = T_n(\cos(n-1)\,\xi) = T_{n-1}(\cos n\xi)$ plyne, že R_n má rovnici $T_{n-1}(x) - T_n(y) = 0$. Vyjdeme-li od této rovnice a použijeme-li známých vlastností Čebyševových polynomů, můžeme[5]) postupovat jednoduššeji. Dokážeme totiž (nezávisle na větě 2) tuto větu:

Věta 3. *Nechť $T_k(x)$ jsou Čebyševovy polynomy k-tého stupně, $k \geqq 0$, $n > 1$ přirozené číslo. Pak*

$$f(x, y) \equiv T_{n-1}(x) - T_n(y) = 0$$

je rovnice racionální křivky n-tého stupně, která má $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ uzlových bodů.

Důkaz. Že $f(x, y)$ je ireducibilní polynom (i nad tělesem komplexních čísel), plyne odtud, že

$$f(x, y) = ay^n + bx^{n-1} + g(x, y)\,,$$

kde $ab \neq 0$ a $g(x, y)$ je polynom stupně nejvýše $n-2$. Vícenásobné body $f(x, y) = 0$ jsou právě ty body (x, y) pro něž je současně $f(x, y) = T_{n-1}(x) - T_n(y) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = T'_{n-1}(x) = 0$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -T'_n(y) = 0$. Pro Čebyševovy polynomy však platí[6])

[5]) Podle upozornění akademika *E. Čecha.*

[6]) Na př. *И. П. Натансон:* Конструктивная теория функций, 1949, str. 69.

$$k^2(1 - T_k^2(x)) = (1 - x^2)\, T_k'^2(x)\,, \tag{10}$$

$$(1 - x^2)\, T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2\, T_k(x) = 0\,. \tag{11}$$

Z (11) a (10) je $T_k'(1) = k^2$, takže podle předchozího vícenásobné body $f(x, y) = 0$ jsou právě ty body (x, y), pro něž je pro $\varepsilon^2 = 1$

$$T_{n-1}(x) = T_n(y) = \varepsilon,\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) \neq 0\,.$$

Je-li n liché (resp. sudé), je $T_{n-1}(x) = 1$ právě pro $\frac{n-3}{2}\left(\text{resp. } \frac{n-2}{2}\right)$ různých hodnot x (totiž pro $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n-1}$, $0 < 2k < n - 1$, $k = 1, 2, \ldots$), $T_{n-1}(x) = -1$ právě pro $\frac{n-1}{2}\left(\text{resp. } \frac{n-2}{2}\right)$ různých x $\left(\bar{x}_l = \cos\frac{(2l-1)\pi}{n-1},\ 0 < 2l - 1 < n - 1,\ l = 1, 2, \ldots\right)$. Obdobně $T_n(y) = 1$ pro $\frac{n-1}{2}\left(\text{resp. } \frac{n-2}{2}\right)$ různých hodnot y, $T_n(y) = -1$ pro $\frac{n-1}{2}\left(\text{resp. } \frac{n}{2}\right)$ různých y. Dostáváme tím pro n liché (sudé) $\frac{1}{4}(n-3)(n-1) + \frac{1}{4}(n-1)^2$ (resp. $\frac{1}{4}(n-2)^2 + \frac{1}{4}(n-2)\,n$), t. j. vždy $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, různých vícenásobných bodů (x, y), pro něž je vždy $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Je-li (x, y) takový vícenásobný bod, pro který je $T_{n-1}(x) = T_n(y) = \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 1$, pak pro tento bod je podle (11)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = - T_{n-1}''(x)\, T_n''(y) = - \frac{(n-1)^2\, n^2 \varepsilon^2}{(1 - x^2)(1 - y^2)} < 0\,,$$

t. j. každý takový bod je uzlový (dvojnásobný bod s reálnými různými tečnami). Protože každá ireducibilní křivka n-tého stupně s $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dvojnásobnými body je racionální, je tím věta dokázána.