Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

POZNÁMKA O POUŽITÍ WEYROVY THEORIE MATIC K INTEGRACI SYSTÉMŮ DIFERENCIÁLNÍCH LINEÁRNÍCH ROVNIC S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

OTAKAR BORŮVKA, Brno.

(Došlo dne 20. října 1953.) DT: 517.941.92

1. K integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty se obvykle používá klasické metody Weierstrassovy, spočívající na redukci matice koeficientů systému na kanonický tvar. Tento způsob umožňuje zejména poznání funkční struktury hledaných integrálů. Při numerických výpočtech se tato metoda zpravidla kombinuje s metodou neurčitých koeficientů za účelem snadnějšího docílení numerické náplně příslušných vzorců.[1]) Podstatně jiná je metoda Peano-Bakerova, založená na postupných kvadraturách a vedoucí k vyjádření integrálů systému hodnotou exponenciální funkce matice koeficientů a počátečními podmínkami.[2])

Ve svých přednáškách o diferenciálních rovnicích, které jsem konal ve stud. roce 1948/49 na přírodovědecké fakultě M. U. v Brně, vyložil jsem integrační metodu založenou na Weyrově theorii matic. Tato metoda se vyznačuje tím, že vede k přehledným explicitním vzorcům pro integrály, vyjadřujícím algebraickou povahu problému. Nedávno uveřejnil M. Kumorovitz práci o integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty, která je s Weyrovou theorií matic v úzké souvislosti.[3]) Autor odvodil explicitní vzorec pro obecné řešení daného systému, avšak jeho metoda je zaměřena jiným směrem než k využití možností daných onou theorií. Níže popsanou metodu lze přenésti i na řešení jiných problémů, na př. na řešení analogického problému o rovnicích diferenčních.[4])

---

[1]) Viz na př. *V. V. Stěpanov,* Kurs diferenciálních rovnic (Praha, 1950), 324 a n.

[2]) *Giovanni Sansone,* Equazioni differenziali nel campo reale. Parte prima (Bologna, 1941), 80 a n.

[3]) *Michal Kumorovitz,* Une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, Annales de la Société Polonaise de mathématique, T. XXIII (1950). Viz též: *Lothar Collatz,* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Leipzig, 1949), 315 a n.

[4]) *Jiří Čermák,* O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic, Práce Moravskoslezské akademie přírodních, sv. XXV (1953), 337 a n.

2. Znamenitý český matematik EDUARD WEYR uveřejnil v r. 1889 ve Spisech poctěných jubilejní cenou Král. české společnosti nauk v Praze práci nazvanou: „O theorii forem bilinearných". V ní vyvinul originálním a důmyslným způsobem novou theorii matic, která se co do obsažnosti vyrovná proslulé Weierstrassově theorii elementárních dělitelů a co do jednoduchosti a průhlednosti ji předčí. Prof. FR. STUDNIČKA ve svém posudku Weyrovy práce napsal: „Obsahem řadí se spis tento k nejmodernějším vymoženostem vědy mathematické a jest hoden vším právem plného uznání, jakéhož se mu zajisté dostane, až bude uveřejněn." Weyr uveřejnil svoji práci také německy v následujícím roce 1890 v časopise Monatshefte für Mathematik und Physik pod názvem: „Zur Theorie der bilinearen Formen". Nicméně se mně zdá, že Weyrova práce nenalezla ve světové literatuře ono místo, které jí přináleží. Na př. v obsáhlé Wedderburnově knize o maticích z r. 1934 jsou sice v seznamu literatury obě Weyrovy práce uvedeny, avšak v textu není o jejich obsahu zmínky. Poznamenejme, že v poslední kapitole své práce aplikuje Weyr svoji theorii na studium integrálů diferenciální lineární homogenní rovnice n-tého řádu v okolí singulárního bodu.

3. Uvedu v přehledu výsledky Weyrovy theorie, pokud jsou potřebné v dalším výkladu.

Budiž A libovolná čtvercová matice $(1 \leqq)$ n-tého řádu v tělese komplexních čísel. Připomeňme, že *nulitou matice* A se rozumí rozdíl čísla n a hodnosti matice A. *Charakteristickou rovnicí matice* A se rozumí algebraická rovnice, která vznikne anulováním determinantu $|A - \lambda E|$; přitom λ značí proměnnou a E jednotkovou matici n-tého řádu. Kořeny charakteristické rovnice matice A se nazývají *kořeny matice* A.

Budiž a libovolný kořen matice A a α $(\geqq 1)$ jeho násobnost.

Uvažujme o posloupnosti matic:

$$(E=) \quad (A-aE)^0, \quad (A-aE)^1, \quad (A-aE)^2, \ldots, (A-aE)^r, \quad (A-aE)^{r+1}, \ldots$$

a označme jejich nulity:

$$(0=)\ \nu_0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \quad \nu_r, \quad \nu_{r+1}, \ldots .$$

Tyto nulity z počátku rostou, až při určité mocnině $(A - aE)^r$ dosáhnou hodnoty α, načež další jsou vesměs rovny α; platí tedy vztahy:

$$(0=) \quad \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r = \nu_{r+1} = \ldots \quad (=\alpha) .$$

Čísla

$$\alpha_1 = \nu_1, \quad \alpha_2 = \nu_2 - \nu_1, \quad \alpha_3 = \nu_3 - \nu_2, \ldots, \alpha_r = \nu_r - \nu_{r-1}$$

jsou t. zv. *charakteristická čísla matice A příslušná ke kořenu a*. Vyznačují se zejména tím, že nerostou, takže platí nerovnosti:

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_r .$$

Dále existuje t. zv. *normální soustava vektorů příslušná ke kořenu a*, která se skládá z $\alpha_r + \alpha_{r-1} + \ldots + \alpha_1 = \alpha$ nezávislých vektorů o n složkách.

Taková soustava je charakterisována těmito vlastnostmi: a) Její vektory jsou rozloženy do r skupin a systém těchto skupin a též systém vektorů v každé skupině jsou uspořádány, b) ϱ-tá skupina obsahuje $\alpha_{r-\varrho+1}$ vektorů $\mathbf{a}_{\varrho 1}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a}_{\varrho, \alpha_{r-\varrho+1}}$, c) maticí $A - aE$ se transformuje σ-tý vektor $\mathbf{a}_{\varrho\sigma}$ v ϱ-té skupině buď v σ-tý vektor $\mathbf{a}_{\varrho+1,\sigma}$ v následující skupině nebo ve vektor nulový, podle toho, zda je $\varrho \leqq r - 1$ nebo $\varrho = r$ ($\varrho = 1, \ldots, r$; $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}$). Normální soustavu vektorů příslušnou ke kořenu a můžeme tedy vyjádřit schematem:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{a}_{11}, \ldots, \mathbf{a}_{1,\alpha_r}, \\
\mathbf{a}_{21}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_r}, \mathbf{a}_{2,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_{r-1}}, \\
\mathbf{a}_{31}, \ldots, \mathbf{a}_{3,\alpha_r}, \mathbf{a}_{3,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{3,\alpha_{r-1}}, \mathbf{a}_{3,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, \mathbf{a}_{3,\alpha_{r-2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_r}, \mathbf{a}_{r,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}}, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-2}}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_1}
\end{array}
\tag{1}
$$

a vzorci:

$$
\begin{aligned}
(A - aE)\, \mathbf{a}_{\varrho\sigma} &= \mathbf{a}_{\varrho+1,\sigma} \quad \text{pro } 1 \leqq \varrho \leqq r - 1, \quad \sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}\,, \\
&= 0 \qquad\quad \text{pro } \varrho = r\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Poznamenejme, že vektory tvořící ϱ-tou skupinu, $1 \leqq \varrho \leqq r$, se transformují maticí $(A - aE)^{r-\varrho}$ v (nezávislé) vektory r-té skupiny a maticí $(A - aE)^{r-\varrho+1}$ ve vektor nulový. Toho používáme k určení normální soustavy vektorů v konkretních případech: Za vektory první skupiny zvolíme libovolné nezávislé vektory $\mathbf{a}_{11}, \ldots, \mathbf{a}_{1,\alpha_r}$, které se maticí $(A - aE)^{r-1}$ transformují ve vektory nezávislé a maticí $(A - aE)^r$ ve vektor nulový. Jsou-li již určeny vektory $\mathbf{a}_{\varrho 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\varrho,\alpha_{r-\varrho+1}}$, $1 \leqq \varrho \leqq r - 1$, obdržíme vektory $\mathbf{a}_{\varrho+1,1}$ $\ldots, \mathbf{a}_{\varrho+1,\alpha_{r-\varrho+1}}$ podle vzorců: $\mathbf{a}_{\varrho+1,\sigma} = (A - aE)\mathbf{a}_{\varrho\sigma}$, $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}$, a v případě $\alpha_{r-\varrho} > \alpha_{r-\varrho+1}$ dále tím, že za vektory $\mathbf{a}_{\varrho+1,\alpha_{r-\varrho+1}+1}, \ldots, \mathbf{a}_{\varrho+1,\alpha_{r-\varrho}}$ zvolíme libovolné, na vektorech $\mathbf{a}_{\varrho+1,\sigma}$ nezávislé vektory, které se maticí $(A - aE)^{r-\varrho-1}$ transformují ve vektory nezávislé a maticí $(A - aE)^{r-\varrho}$ ve vektor nulový.

Když ke každému kořenu matice A přiřadíme příslušnou normální soustavu vektorů, obdržíme celkem n ($=$ součet násobností jednotlivých kořenů) vektorů. Tyto vektory jsou nezávislé a tvoří t. zv. *normální soustavu vektorů příslušnou k matici A*.

Když matice A je reálná, pak ke každému reálnému kořenu matice A existuje příslušná normální soustava vektorů reálných. Ke každým dvěma komplexně sdruženým kořenům matice A existují příslušné normální soustavy vektorů, které jsou komplexně sdružené; z každé soustavy obdržíme druhou tím, že její vektory nahradíme vektory komplexně sdruženými.

4. Budiž dán systém n ($\geqq 1$) diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n\,.
\end{aligned}
\tag{a}
$$

Ve vektorovém označení jej můžeme vyjádřit vzorcem:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \ , \tag{a}$$

v němž A značí matici (a_{ik}). Nezávisle proměnná budiž x.

Budiž a α-násobný kořen matice A s charakteristickými čísly $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \ldots \geqq \alpha_r$, a nechť vektory (1) *tvoří k němu příslušnou normální soustavu vektorů. Pak vektory $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ $(\varrho = 1, \ldots, r; \sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1})$, v počtu α, definované vzorcem:*

$$\mathbf{y}_{\varrho\sigma} = e^{ax} \cdot \left(\mathbf{a}_{\varrho\sigma} + \frac{x}{1!}\,\mathbf{a}_{\varrho+1,\sigma} + \ldots + \frac{x^{r-\varrho}}{(r-\varrho)!}\,\mathbf{a}_{r\sigma}\right), \tag{3}$$

jsou nezávislé a každý z nich jest integrálem systému (a).

Vskutku, každý minor α-tého řádu matice (typu n/α)

$$(\mathbf{y}_{r1}, \ldots, \mathbf{y}_{11};\ \mathbf{y}_{r2}, \ldots, \mathbf{y}_{12}; \ldots, \mathbf{y}_{r\alpha_1}) \ ,$$

v libovolném čísle x, se rovná, jak je patrno, součinu čísla exp $\alpha a x$ a stejnolehlého minoru matice

$$(\mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{11};\ \mathbf{a}_{r2}, \ldots, \mathbf{a}_{12}; \ldots, \mathbf{a}_{r\alpha_1}) \ .$$

Z toho soudíme, že vektory $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ jsou nezávislé.

Dále platí rovnice, pro $1 \leqq \varrho \leqq r$, $\sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\varrho+1}$:

$$\mathbf{y}'_{\varrho\sigma} = a \cdot e^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!}\,\mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} + e^{ax} \sum_{k=1}^{r-\varrho} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} \ ,$$

při čemž v případě $\varrho = r$ značí druhý výraz na pravé straně vektor nulový. Odtud plynou s ohledem na vzorce (2) vztahy:

$$\mathbf{y}'_{\varrho\sigma} = a \cdot e^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!}\,\mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma} + e^{ax} \sum_{k=1}^{r-\varrho+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,(A - aE)\mathbf{a}_{\varrho+k-1,\sigma} =$$

$$= A\left(e^{ax} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!}\,\mathbf{a}_{\varrho+k,\sigma}\right) = A\mathbf{y}_{\varrho\sigma} \ .$$

Z nich vidíme, že vektor $\mathbf{y}_{\varrho\sigma}$ jest integrálem systému (a).

Nechť $a, b, \ldots, f$ značí jednotlivé kořeny matice A a $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ jejich násobnosti. Když ke každému kořenu přiřadíme podle vzorců (3) soustavu integrálů systému (a), obdržíme celkem $\alpha + \beta + \ldots + \varphi = n$ integrálů systému (a). Tyto integrály jsou nezávislé, neboť determinant jejich matice v libovolném čísle x se rovná, jak je patrno, součinu čísla exp $(\alpha a + \beta b + \ldots + \varphi f)x$ a determinantu normální soustavy vektorů příslušné k matici A, takže je různý od nuly. Tím jest určen fundamentální systém integrálů systému (a).

Všimněme si zejména případu, kdy matice A a rovněž nezávisle proměnná x jsou reálné. Pak ke každému reálnému kořenu matice A existuje příslušná normální soustava vektorů reálných a k němu podle vzorců (3) přiřazené integrály systému (a) jsou rovněž reálné. Ke dvěma komplexně sdruženým kořenům $a = a_1 + ia_2$, $\bar{a} = a_1 - ia_2$ matice A existují příslušné normální soustavy vektorů $\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma} = \boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 1} + \mathrm{i}\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 2}$, $\overline{\boldsymbol{a}}_{\varrho\sigma} = \boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 1} - \mathrm{i}\boldsymbol{a}_{\varrho\sigma 2}$ komplexně sdružených a k nim podle vzorců (3) přiřazené integrály $\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma}$, $\overline{\boldsymbol{y}}_{\varrho\sigma}$ systému (a) jsou komplexně sdružené. Vektory $\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 1} = (\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma} + \overline{\boldsymbol{y}}_{\varrho\sigma}) : 2$, $\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 2} = (\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma} - \overline{\boldsymbol{y}}_{\varrho\sigma}) : 2\mathrm{i}$, vyjádřené vzorci:

$$\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 1} = \mathrm{e}^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-\varrho} \frac{x^k}{k!} (\cos a_2 x \, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 1} - \sin a_2 x \, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 2}) \,,$$

$$\boldsymbol{y}_{\varrho\sigma 2} = \mathrm{e}^{a_1 x} \sum_{k=0}^{r-a} \frac{x^k}{k!} (\sin a_2 x \, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 1} + \cos a_2 x \, \boldsymbol{a}_{\varrho+k,\sigma 2}) \,, \tag{4}$$

jsou reálné, nezávislé a jsou ovšem integrály systému (a). Vidíme, že když matice A je reálná, existuje fundamentální systém integrálů systému (a), které jsou tvaru (3) nebo vždy po dvou tvaru (4). Poznamenejme, že vzorce (3) a (4) vyjadřují integrály systému (a) ovšem i pro komplexní hodnoty proměnné x.