Miroslav Fiedler
O jistých maticích a rovnici pro parametry singulárních bodů racionální křivky. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 4, 321--346

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Ústřední ústav matematický

SVAZEK 77 • PRAHA, 31. I. 1953 • ČÍSLO 4

REFERÁTY A ČLÁNKY

O JISTÝCH MATICÍCH A ROVNICI PRO PARAMETRY SINGULÁRNÍCH BODŮ RACIONÁLNÍ KŘIVKY

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Dokončení.) 512.831:513,61

Část III.

V této části se budeme zabývat rovinnými racionálními křivkami (vylučujeme již přímku). Budeme tedy předpokládat, že křivka C je dána vyjádřením (11), totiž

$$x_1 = a_{(n)}(t_1, t_2), \quad x_2 = b_{(n)}(t_1, t_2), \quad x_3 = c_{(n)}(t_1, t_2), \tag{11'}$$

kde největší společný dělitel $\langle a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t)\rangle = 1$ a kde matice

$$\begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ B_1^{(n)} \\ C_1^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \dots, & a_n \\ b_0, & b_1, & \dots, & b_n \\ c_0, & c_1, & \dots, & c_n \end{pmatrix} \tag{20}$$

má hodnost $h = 3$.

Přitom koeficienty a_i, b_i, c_i jsou opět ze základního tělesa K charakteristiky nula.

Pak matice $M_n(x)$ z věty 5 je čtvercová, soustava nadploch, o níž se mluví v této větě, obsahuje jedinou křivku (dokážeme totiž, že f není identicky nula)

$$f \equiv \begin{vmatrix} A_n^{(n)}, & x_1 I_n \\ B_n^{(n)}, & x_2 I_n \\ C_n^{(n)}, & x_3 I_n \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Pro křivku $f = 0$ platí věta:

Věta 10. *Každý bod $y \equiv (y_1, y_2, y_3)$ má vzhledem ke křivce (21) touž násobnost*) jako ke křivce (11') v definici z části II. Je-li k Lürothovo číslo*

*) V definici obvyklé z algebraické geometrie.

pro křivku (11′), *je identicky*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [g(x_1, x_2, x_3)]^k,$$

kde g je ireducibilní forma. Je tedy křivka (21) *k-násobná ireducibilní křivka.*

Než tuto větu dokážeme, uvedeme pomocné věty, kterých budeme užívat i později.

Pomocná věta 1. Nechť $\overset{1}{p}_{(n_1)}, \overset{2}{p}_{(n_2)}, \ldots, \overset{s}{p}_{(n_s)}$ je s forem, po dvou nesoudělných, pro které je $\sum\limits_{k=1}^{s} n_k = n > 0$. Jsou-li $\overset{k}{P}{}_i^{(n_k)}$ matice příslušné formám $\overset{k}{p}_{(n_k)}$, je determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} [\overset{2}{P}\overset{3}{P}\ldots\overset{s}{P}]_{n_1} \\ [\overset{1}{P}\overset{3}{P}\ldots\overset{s}{P}]_{n_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ [\overset{1}{P}\overset{2}{P}\ldots\overset{s-1}{P}]_{n_s} \end{vmatrix} \neq 0.\text{*)}$$

Důkaz. Předpokládejme naopak, že za podmínek věty je $\Delta = 0$. Pak existuje, obdobně jako v pomocné větě I. části (str. 245), s forem $\overset{1}{r}_{(n_1-1)}, \overset{2}{r}_{(n_2-1)}, \ldots, \overset{s}{r}_{(n_s-1)}$ (pro ta i, pro něž je $n_i = 0$, forma $\overset{i}{r}$ odpadá) v t_1, t_2 tak, že je identicky

$$\overset{1}{r}\overset{2}{p}\ldots\overset{s}{p} + \overset{1}{p}\overset{2}{r}\overset{3}{p}\ldots\overset{s}{p} + \ldots + \overset{1}{p}\overset{2}{p}\ldots\overset{s-1}{p}\overset{s}{r} = 0,$$

a přitom alespoň jedna z forem $\overset{1}{r}, \ldots, \overset{s}{r}$ není nulová (je totiž $n > 0$). Nechť na př. $\overset{1}{r}$ není identicky rovna nule (takže $n_1 > 0$). Poněvadž lze psát

$$\overset{1}{r}\overset{2}{p}\ldots\overset{s}{p} + \overset{1}{p}(\overset{2}{r}\overset{3}{p}\ldots\overset{s}{p} + \ldots + \overset{2}{p}\ldots\overset{s-1}{p}\overset{s}{r}) = 0,$$

dělí forma $\overset{1}{p}$ součin $\overset{1}{r}\overset{2}{p}\ldots\overset{s}{p}$. Vzhledem k nesoudělnosti $\overset{i}{p}, \overset{j}{p}$ pro $i \neq j$ dělí tedy forma $\overset{1}{p}$ stupně n_1 formu $\overset{1}{r}$ stupně $n_1 - 1$, což není možné, neboť $\overset{1}{r}$ je nenulová. Tento spor dokazuje pomocnou větu 1.

---

*) Píšeme na př. $[\overset{2}{P}\overset{3}{P}\ldots\overset{s}{P}]_{n_1}$ místo podrobného $\overset{2}{P}{}^{(n_2)}_{n_1}\overset{3}{P}{}^{(n_3)}_{n_1+n_2}\ldots\overset{s}{P}{}^{(n_s)}_{n_1+n_2+\ldots+n_s}$; výsledná matice má tedy n_1 řádků a $\sum\limits_{k=1}^{s} n_k = n$ sloupců. Někdy budeme v obdobných případech vynechávat i hranaté závorky a index n_1, bude-li zřejmé, kolik řádků matice má. Počet sloupců je pak o součet stupňů forem, jejichž matice se v součinu vyskytují, větší než počet řádků. Pro tyto součiny pak v jistém smyslu platí komutativní zákon, jak plyne z rovnic (3). Toho budeme později často užívat.

Pomocná věta 2. Jsou-li $a_{(n)}$, $b_{(n)}$ formy stupně n a $c_{(m)}$ nenulová forma stupně m v t_1, t_2 a platí-li $\langle a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(m)}(t)\rangle = 1$, existují v K čísla α, β tak, že

$$\langle \alpha a_{(n)}(t) + \beta b_{(n)}(t),\ c_{(m)}(t)\rangle = 1. \tag{22}$$

Důkaz. Nechť v některém nadtělese K_1 nad K se $c_{(m)}(t)$ rozpadá v lineární faktory (budeme předpokládat, že $m \geqq 1$, protože pro $m = 0$ je případ triviální).

Nechť tedy (μ_k, ν_k), $k = 1, 2, \ldots, p$, jsou všechny nenulové navzájem lineárně nezávislé dvojice v K_1 takové, že $c_{(m)}(\mu_k, \nu_k) = 0$. Je tedy $p \leqq m$. Protože K je nekonečné těleso (je charakteristiky nula), existuje dvojice (α, β) tak, že $(\alpha, \beta) \neq (b_{(n)}(\mu_k, \nu_k), -a_{(n)}(\mu_k, \nu_k))$ pro $k = 1, \ldots, p$ (je $(b_{(n)}(\mu_k, \nu_k), -a_{(n)}(\mu_k, \nu_k)) \neq (0, 0)$, neboť $\langle a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(m)}\rangle = 1$).

Čísla α, β už mají vlastnost, že platí (22): kdyby totiž nějaká forma kladného stupně $d_{(r)}$ dělila současně $\alpha a_{(n)} + \beta b_{(n)}$ a $c_{(m)}$, platilo by to i pro některou z forem $\nu_k t_1 - \mu_k t_2$, takže by bylo $\alpha a_{(n)}(\mu_k, \nu_k) + \beta\, b_{(n)}(\mu_k, \nu_k) = 0$, $(\alpha, \beta) = [b_{(n)}(\mu_k, \nu_k), -a_{(n)}(\mu_k, \nu_k)]$, což je spor.

Pomocná věta 3. Nechť $F(t_1, t_2)$ je nenulová forma a $z = (z_1, z_2, z_3)$ s-násobný bod křivky (11'), $s \geqq 0$. Pak existují trojice čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tak, že

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & z_1, & a_{(n)}(t) \\ \alpha_2, & z_2, & b_{(n)}(t) \\ \alpha_3, & z_3, & c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \,.\, \alpha_{(n-s)}(t),$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1, & z_1, & a_{(n)}(t) \\ \beta_2, & z_2, & b_{(n)}(t) \\ \beta_3, & z_3, & c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \,.\, \beta_{(n-s)}(t),$$

kde formy $\alpha_{(n-s)}$, $\beta_{(n-s)}$ jsou nesoudělné, žádná z nich nemá vícenásobné faktory a obě jsou také nesoudělné s $F(t_1, t_2)$.

Důkaz. Vyjdeme ze dvou pomocných tvrzení:

Pomocné tvrzení 1. Jsou-li $\alpha_{(m)}$, $\beta_{(m)}$ nesoudělné formy m-tého stupně v t_1, t_2, kde $m \geqq 1$, pak forma

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial t_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\alpha}{\partial t_2}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

není identicky rovna nule.

Protože $m \geqq 1$, existuje v nějakém nadtělese K_1 nad K nenulová dvojice y_1, y_2 tak, že $\alpha_{(m)}(y_1, y_2) = 0$. Je tedy $\beta_{(m)}(y_1, y_2) \neq 0$, neboť podle předpokladu jsou $\alpha_{(m)}$ a $\beta_{(m)}$ nesoudělné.

Lze psát $\alpha_{(m)}(t_1, t_2) = (t_1y_2 - t_2y_1)^k \gamma_{(m-k)}(t_1, t_2)$, kde $k > 0$ a $\gamma_{(m-k)}(y_1, y_2) \neq 0$. Odtud

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial t_1}, \frac{\partial\beta}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t_2}, \frac{\partial\beta}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k(t_1y_2 - t_2y_1)^{k-1} y_2\gamma_{(m-k)} + (t_1y_2 - t_2y_1)^k \frac{\partial\gamma_{(m-k)}}{\partial t_1}, \frac{\partial\beta}{\partial t_1} \\ - k(t_1y_2 - t_2y_1)^{k-1} y_1\gamma_{(m-k)} + (t_1y_2 - t_2y_1)^k \frac{\partial\gamma_{(m-k)}}{\partial t_2}, \frac{\partial\beta}{\partial t_2} \end{vmatrix} =$$

$$= (t_1y_2 - t_2y_1)^{k-1} . \Delta, \text{kde } \Delta =$$

$$= \begin{vmatrix} ky_2\gamma_{(m-k)} + (t_1y_2 - t_2y_1) \frac{\partial\gamma_{(m-k)}}{\partial t_1}, \frac{\partial\beta}{\partial t_1} \\ - ky_1\gamma_{(m-k)} + (t_1y_2 - t_2y_1) \frac{\partial\gamma_{(m-k)}}{\partial t_2}, \frac{\partial\beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}.$$

Kdyby byl determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial t_1}, \frac{\partial\beta}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t_2}, \frac{\partial\beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

identicky roven nule, byl by i determinant $\Delta(t_1, t_2)$ identicky roven nule. Avšak

$$\Delta(y_1, y_2) = k\gamma_{(m-k)}(y_1, y_2) \begin{vmatrix} y_2, \left[\frac{\partial\beta}{\partial t_2}\right]_y \\ - y_1, \left[\frac{\partial\beta}{\partial t_1}\right]_y \end{vmatrix} =$$

$= mk\gamma_{(m-k)}(y_1, y_2)\beta_{(m)}(y_1, y_2) \neq 0$, takže ani první determinant není identicky roven nule.

Pomocné tvrzení 2. Jsou-li $p_{(n)}, q_{(n)}, n > 0$, lineárně nezávislé formy n-tého stupně v t_1, t_2, pak determinant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial t_1}, \frac{\partial q}{\partial t_1} \\ \frac{\partial p}{\partial t_2}, \frac{\partial q}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

není identicky roven nule.

Nechť totiž $\langle p_{(n)}, q_{(n)}\rangle = d_{(s)}$, $p_{(n)} = d_{(s)} \cdot \alpha_{(n-s)}$, $q_{(n)} = d_{(s)} \cdot \beta_{(n-s)}$. Je tedy $\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)}\rangle = 1$, $n > s$ (jinak by formy $p_{(n)}, q_{(n)}$ byly lineárně závislé). Odtud

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial t_1}, & \frac{\partial q}{\partial t_1} \\ \frac{\partial p}{\partial t_2}, & \frac{\partial q}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial t_1}\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} d, & \frac{\partial d}{\partial t_1}\beta + \frac{\partial \beta}{\partial t_1} d, & \frac{\partial d}{\partial t_1} \\ \frac{\partial d}{\partial t_2}\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} d, & \frac{\partial d}{\partial t_2}\beta + \frac{\partial \beta}{\partial t_2} d, & \frac{\partial d}{\partial t_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{d_{(s)}}{n-s} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_1}, & \frac{\partial d}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_2}, & \frac{\partial d}{\partial t_2} \\ (n-s)\,\alpha_{(n-s)}, & (n-s)\,\beta_{(n-s)}, & -(n-s)\,d_{(s)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{d_{(s)}}{n-s} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_1}, & \frac{\partial d}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_2}, & \frac{\partial d}{\partial t_2} \\ 0, & 0, & -(n-s)\,d_{(s)} - t_1\frac{\partial d}{\partial t_1} - t_2\frac{\partial d}{\partial t_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n}{n-s}\, d_{(s)}^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}.$$

Z pomocného tvrzení 1 pak ihned plyne, že skutečně D není identicky nula.

Nyní již můžeme dokázat pomocnou větu 3. Je alespoň jedno z čísel z_1, z_2, z_3 různé od nuly, nechť $z_3 \neq 0$. Lze psát $p_{(n)} = z_3 a_{(n)} - z_1 c_{(n)} = u_{(s)}\bar{\alpha}_{(n-s)}$, $q_{(n)} = z_3 b_{(n)} - z_2 c_{(n)} = u_{(s)}\bar{\beta}_{(n-s)}$, $\langle \bar{\alpha}_{(n-s)}, \bar{\beta}_{(n-s)}\rangle = 1$; neboť největší společný dělitel determinantů $p_{(n)}, q_{(n)}$, $z_1 b_{(n)} - z_2 a_{(n)}$ je roven $\langle p_{(n)}, q_{(n)}\rangle$ $\left(\text{je } z_1 b_{(n)} - z_2 a_{(n)} = \frac{1}{z_3}(z_1 q_{(n)} - z_2 p_{(n)})\right)$ a podle předpokladu s-tého stupně, $\langle p_{(n)}, q_{(n)}\rangle = u_{(s)}$. Formy $p_{(n)}, q_{(n)}$ jsou lineárně nezávislé, neboť jinak by i $a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}$ byly lineárně závislé a hodnost matice (20) by nebyla tři. Podle pomocného tvrzení 2 není tedy forma

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_{(n)}}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial q_{(n)}}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial p_{(n)}}{\partial t_2}, & \dfrac{\partial q_{(n)}}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

identicky rovna nule.

Protože $\langle \overline{\alpha}_{(n-s)}, \overline{\beta}_{(n-s)} \rangle = 1$, je i $\langle \overline{\alpha}_{(n-s)}, \overline{\beta}_{(n-s)}, D \,.\, F \rangle = 1$. Součin $D \,.\, F(t_1, t_2)$ není identicky roven nule, existuje tedy podle pomocné věty 2 dvojice čísel ϱ_1, ϱ_2 tak, že

$$\langle \varrho_1 \overline{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \overline{\beta}_{(n-s)}, D \,.\, F \rangle = 1. \tag{23}$$

Forma $\varrho_1 \overline{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \overline{\beta}_{(n-s)}$ není identicky rovna nule, neboť D má stupeň alespoň dvě (je totiž $n \geq 2$, neboť jinak by matice (20) měla hodnost menší než tři). Podle pomocné věty 2 existuje opět dvojice čísel σ_1, σ_2 tak, že

$$\langle \sigma_1 \overline{\alpha}_{(n-s)} + \sigma_2 \overline{\beta}_{(n-s)}, (\varrho_1 \overline{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \overline{\beta}_{(n-s)}) DF \rangle = 1. \tag{24}$$

Označme $\alpha_{(n-s)} = \varrho_1 \overline{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \overline{\beta}_{(n-s)}$, $\beta_{(n-s)} = \sigma_1 \overline{\alpha}_{(n-s)} + \sigma_2 \overline{\beta}_{(n-s)}$. Je tedy pro $\alpha_1 = -\varrho_2$, $\alpha_2 = \varrho_1$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = -\sigma_2$, $\beta_2 = \sigma_1$, $\beta_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & z_1, & a_{(n)} \\ \alpha_2, & z_2, & b_{(n)} \\ \alpha_3, & z_3, & c_{(n)} \end{vmatrix} = u_{(s)} \alpha_{(n-s)}, \qquad \begin{vmatrix} \beta_1, & z_1, & a_{(n)} \\ \beta_2, & z_2, & b_{(n)} \\ \beta_3, & z_3, & c_{(n)} \end{vmatrix} = u_{(s)} \beta_{(n-s)}.$$

Předně z (24) plyne, že $\langle \beta_{(n-s)}, \alpha_{(n-s)} \rangle = 1$; z (23) a (24), že $\langle \alpha_{(n-s)}, F \rangle = \langle \beta_{(n-s)}, F \rangle = 1$. Zbývá jen dokázat, že $\alpha_{(n-s)}$ ani $\beta_{(n-s)}$ nemají vícenásobné faktory. Kdyby však existoval vícenásobný faktor $\alpha_{(n-s)}$, existovala by v nějakém nadělese K_1 nad K nenulová dvojice y_1, y_2 tak, že

$$\left[\frac{\partial \alpha_{(n-s)}}{\partial t_1}\right]_y = 0, \quad \left[\frac{\partial \alpha_{(n-s)}}{\partial t_2}\right]_y = 0,$$

a tedy pro $(\varrho_1, \varrho_2) \neq (0, 0)$ je jednak

$$\varrho_1 \left[\frac{\partial \overline{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_1}\right]_y + \varrho_2 \left[\frac{\partial \overline{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_1}\right]_y = 0,$$
$$\varrho_1 \left[\frac{\partial \overline{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_2}\right]_y + \varrho_2 \left[\frac{\partial \overline{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_2}\right]_y = 0,$$

jednak $\alpha_{(n-s)}(y) = 0$.

Odtud plyne, že

$$\begin{vmatrix} \left[\dfrac{\partial\bar{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_1}\right]_y, & \left[\dfrac{\partial\bar{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_1}\right]_y \\ \left[\dfrac{\partial\bar{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_2}\right]_y, & \left[\dfrac{\partial\bar{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_2}\right]_y \end{vmatrix} = 0.$$

Je tedy $D(y) = 0$, jak vyplývá z identity, dokázané v důkazu pomocného tvrzení 2:

$$D = \frac{n}{n-s} u_{(s)}^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial\bar{\beta}}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t_2}, & \dfrac{\partial\bar{\beta}}{\partial t_2} \end{vmatrix}.$$

To však je spor s (23), že $\langle\alpha_{(n-s)}, DF\rangle = 1$. Obdobně se dokáže, že ani $\beta_{(n-s)}$ nemá vícenásobné faktory.

Nyní již přejdeme k důkazu věty 10. Budiž $y = (y_1, y_2, y_3)$ bod násobnosti s, $s \geqq 0$, pro křivku C ve vyjádření (11′), takže největší společný dělitel determinantů druhého stupně matice

$$\begin{pmatrix} y_1, & a_{(n)}(t) \\ y_2, & b_{(n)}(t) \\ y_3, & c_{(n)}(t) \end{pmatrix} \tag{13'}$$

je s-tého stupně; budiž to $u_{(s)}(t)$. Forma $u_{(s)}$ není identicky rovna nule, neboť pak by matice (20) měla menší hodnost než tři.

Čísla y_1, y_2, y_3 nejsou současně rovna nule; nechť na př. $y_3 \neq 0$. Označme

$$\bar{a}_{(n)}(t) = y_3\, a_{(n)}(t) - y_1\, c_{(n)}(t),$$
$$\bar{b}_{(n)}(t) = y_3\, b_{(n)}(t) - y_2\, c_{(n)}(t).$$

Obdobně jako dříve se zjistí, že

$$\bar{a}_{(n)}(t) = u_{(s)}(t) \,.\, \alpha_{(n-s)}(t),$$
$$\bar{b}_{(n)}(t) = u_{(s)}(t) \,.\, \beta_{(n-s)}(t),$$

kde

$$\langle\alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)}\rangle = 1.$$

Je ovšem rovněž $\langle u_{(s)}, c_{(n)}\rangle = 1$, neboť

$$1 = \langle a_n, b_n, c_n\rangle = \langle\bar{a}_{(n)}, \bar{b}_{(n)}, c_{(n)}\rangle =$$
$$= \langle u_{(s)}\alpha_{(n-s)}, u_{(s)}\beta_{(n-s)}, c_{(n)}\rangle.$$

Abychom dokázali, že násobnost bodu y pro křivku (případně identicky rovnou nule)

$$f \equiv \begin{vmatrix} A_n, & x_1 I_n \\ B_n, & x_2 I_n \\ C_n, & x_3 I_n \end{vmatrix} = 0$$

je rovna s, stačí dokázat, že násobnost souřadnicového bodu $\bar{O}_3$ vzhledem ke křivce (s touž výhradou)

$$\bar{f} \equiv \begin{vmatrix} \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ C_n, & \bar{x}_3 I_n \end{vmatrix} = 0$$

je rovna s; přitom $\bar{A}_n$ a $\bar{B}_n$ jsou matice příslušné formám $\bar{a}_{(n)}$ a $\bar{b}_{(n)}$, $\bar{x}_1 = y_3x_1 - y_1x_3$, $\bar{x}_2 = y_3x_2 - y_2x_3$, $\bar{x}_3 = x_3$. Je totiž

$$y_3^{2n} f \equiv \begin{vmatrix} A_n y_3, & x_1 y_3 I_n \\ B_n y_3, & x_2 y_3 I_n \\ C_n, & x_3 I_n \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_n y_3 - C_n y_1, & (y_3x_1 - y_1x_3)\, I_n \\ B_n y_3 - C_n y_2, & (y_3x_2 - y_2x_3)\, I_n \\ C_n, & x_3 I_n \end{vmatrix} \equiv \bar{f}$$

a uvedenou regulární lineární transformací, při níž se násobnost zachovává, přejde bod y v bod $\bar{O}_3$.

Označme $\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{B}}, U$ matice, příslušné formám $\alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)}, u_{(s)}$. Je tedy

$$\bar{f} \equiv \begin{vmatrix} \bar{\bar{A}}U, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}U, & \bar{x}_2 I_n \\ C, & \bar{x}_3 I_n \end{vmatrix}.$$

Existuje dále forma $l_{(n-s)}(t)$, nesoudělná s $u_{(s)}$:

$$\langle l_{(n-s)}, u_{(s)} \rangle = 1.$$

Označíme-li příslušnou matici L, platí pro matice identicky

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & L_s \\ I_n, & 0, & 0 \\ 0, & I_n, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{A}}U, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}U, & \bar{x}_2 I_n \\ C, & \bar{x}_3 I_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_s C_n, & \bar{x}_3 L_s \\ \bar{\bar{A}}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_2 I_n \\ U_{n-s} C_n, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_s C_n, & \bar{x}_3 L_s \\ \bar{\bar{A}}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_2 I_n \\ C_{n-s} U_{2n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{\bar{A}}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ 0, & \bar{\bar{B}}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & C_{n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_s C_n, & \bar{x}_3 L_s \\ U_{2n-s}, & 0 \\ 0, & I_n \end{bmatrix}.$$

Je tedy i pro determinanty

$$\begin{vmatrix} L_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix} . \bar{f} \equiv \begin{vmatrix} L_s C_n \\ U_{2n-s} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \bar{\bar{A}}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ C_{n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Avšak $\langle l_{(n-s)}, u_{(s)}\rangle = 1$, $\langle l_{(n-s)}c_{(n)}, u_{(s)}\rangle = 1$, takže resultanty těchto dvojic jsou různé od nuly (na př. podle pomocné věty 1). Je tedy pro $\varkappa \neq 0$

$$\bar{f} \equiv \varkappa \begin{vmatrix} \bar{\bar{A}}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ C_{n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Násobnost bodu $\bar{O}_3$ pro $\bar{f}$ je rovna rozdílu stupně n' formy $\bar{f}$ a čísla r', pro které je $\bar{x}_3^{r'}$ nejvyšší mocnina $\bar{x}_3$, která se ve formě $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ s nenulovým koeficientem vyskytuje. Přitom pro $\bar{f} \equiv 0$ není násobnost bodu $\bar{O}_3$ definována. Z rovnosti (25) plyne, že je-li $\bar{f}$ nenulová forma, je její stupeň $n' = n$ (z rozvoje determinantu Laplaceovou větou podle posledních n sloupců) a $r' \leqq n - s$ (z rozvoje Laplaceovou větou podle posledních $n - s$ řádků). Dokážeme, že souhrn $v_{(s)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ členů ve formě $\bar{f}$, u nichž je $\bar{x}_3$ v $(n-s)$-té mocnině, je nenulová forma, takže bod $\bar{O}_3$ je skutečně právě s-násobný. Z rozvoje determinantu v (25) podle posledních $n - s$ řádků je zřejmé, že forma $v_{(s)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ je rovna

$$\varkappa \begin{vmatrix} \bar{\bar{A}}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Existuje opět forma $m_{(s)}(t_1, t_2)$, nesoudělná s $\alpha_{(n-s)}$ i $\beta_{(n-s)}$. Označíme-li příslušnou matici M, platí identicky pro matice

$$\begin{bmatrix} M_{n-s}, & 0, & 0 \\ \bar{\bar{B}}_s, & 0, & 0 \\ 0, & M_{n-s}, & 0 \\ -\bar{\bar{B}}_s, & \bar{\bar{A}}_s, & 0 \\ 0, & 0, & I_{n-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{A}}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & U_{n-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\bar{\bar{A}}, & \bar{x}_1 M_{n-s} \\ \bar{\bar{B}}\bar{\bar{A}}, & \bar{x}_1 \bar{\bar{B}}_s \\ M\bar{\bar{B}}, & \bar{x}_2 M_{n-s} \\ 0, & \bar{x}_2\bar{\bar{A}}_s - \bar{x}_1\bar{\bar{B}}_s \\ 0, & U_{n-s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_s, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{n-s}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \bar{x}_2\bar{\bar{A}}_s - \bar{x}_1\bar{\bar{B}}_s \\ 0, & 0, & 0, & U_{n-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M\bar{\bar{A}}, & \bar{x}_1 M_{n-s} \\ \bar{\bar{B}}\bar{\bar{A}}, & \bar{x}_1 \bar{\bar{B}}_s \\ M\bar{\bar{B}}, & \bar{x}_2 M_{n-s} \\ 0, & I_n \end{bmatrix}.$$

Odtud pro determinanty

$$\begin{vmatrix} M_{n-s} \\ \bar{\bar{B}}_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{n-s} \\ \bar{\bar{A}}_s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{\bar{A}}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{\bar{B}}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & U_{n-s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [M\bar{\bar{A}}]_{n-s} \\ [\bar{\bar{B}}\bar{\bar{A}}]_s \\ [M\bar{\bar{B}}]_{n-s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{x}_2\bar{\bar{A}}_s - \bar{x}_1\bar{\bar{B}}_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Podle pomocné věty 1 jsou číselné determinanty v této rovnosti různé od nuly, neboť $\langle \alpha_{(n-s)}, m_{(s)} \rangle = \langle \beta_{(n-s)}, m_{(s)} \rangle = \langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)} \rangle = 1$. Je tedy pro $\mu \neq 0$ identicky

$$v_{(s)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \mu \begin{vmatrix} \bar{x}_2 \bar{\bar{A}}_s - \bar{x}_1 \bar{\bar{B}}_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Protože $\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)}, u_{(s)} \rangle = 1$ a $u_{(s)} \neq 0$, existují podle pomocné věty 2 čísla α', β', ne obě rovna nule ($\alpha' = \beta' = 0$ může nastat jen pro $s = 0$; pak však i každá nenulová dvojice α, β vyhovuje) tak, že $\langle \alpha' \alpha_{(n-s)} + \beta' \beta_{(n-s)}, u_{(s)} \rangle = 1$. Je tedy

$$v_{(s)}(-\beta', \alpha') = \mu \begin{vmatrix} \alpha' \bar{\bar{A}}_s + \beta' \bar{\bar{B}}_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix} \neq 0,$$

neboť vpravo je resultant forem $\alpha' \alpha_{(n-s)} + \beta' \beta_{(n-s)}, u_{(s)}$. Tedy $v_{(s)}$ není nulová forma, bod y je právě s-násobným bodem f. Protože každý bod y má nějakou násobnost $\leq n - 1$, je tím dokázáno také, že $f(x_1, x_2, x_3)$ není nulová forma.

Nechť nyní k je Lürothovo číslo vyjádření (11′) křivky C, takže podle Lürothovy věty*) existují nesoudělné formy $p_{(\bar{n})}(t_1, t_2)$, $q_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ a formy $\bar{a}_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, $\bar{b}_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, $c_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ tak, že

$$\begin{aligned} a_{(n)}(t_1, t_2) &= \bar{a}_{(\bar{n})}(p_{(k)}(t), q_{(k)}(t)), \\ b_{(n)}(t_1, t_2) &= \bar{b}_{(\bar{n})}(p_{(k)}(t), q_{(k)}(t)), \\ c_{(n)}(t_1, t_2) &= \bar{c}_{(\bar{n})}(p_{(k)}(t), q_{(k)}(t)). \end{aligned} \tag{26}$$

Přitom je opět $\langle a_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2), \bar{b}_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2), \bar{c}_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \rangle = 1$, matice

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0, & \bar{a}_1, & \ldots, & \bar{a}_{\bar{n}} \\ \bar{b}_0, & \bar{b}_1, & \ldots, & \bar{b}_{\bar{n}} \\ \bar{c}_0, & \bar{c}_1, & \ldots, & \bar{c}_{\bar{n}} \end{pmatrix}$$

má opět hodnost tři a je $n = k\bar{n}$, $\bar{n} > 1$.

Podle věty 9, rovnice (17), platí, že

$$\begin{pmatrix} A_n, & x_1 I_n \\ B_n, & x_2 I_n \\ C_n, & x_3 I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{-1}, & 0, & 0 \\ 0, & R_1^{-1}, & 0 \\ 0, & 0, & R_1^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \bar{A}_{\bar{n}}, & x_1 I_{\bar{n}} \\ \bar{B}_{\bar{n}}, & x_2 I_{\bar{n}} \\ \bar{C}_{\bar{n}}, & x_3 I_{\bar{n}} \end{pmatrix} \times . I_k \right] . \begin{pmatrix} R_2, & 0 \\ 0, & R_1 \end{pmatrix}, \tag{17′}$$

kde

$$R_s = \begin{pmatrix} [P^{s\bar{n}-1}]_k \\ [P^{s\bar{n}-2}Q]_k \\ \vdots \\ [Q^{s\bar{n}-1}]_k \end{pmatrix}$$

*) Pro $k = 1$ stačí ovšem položit $p_{(1)} = t_1$, $q_{(1)} = t_2$, $\bar{a}_{(\bar{n})} = a_{(n)}$, $\bar{b}_{(\bar{n})} = b_{(n)}$, $\bar{c}_{(\bar{n})} = c_{(n)}$.

jsou regulární matice a $M \times . I_k$ pro $M = (m_{ij})$ je matice

$$M \times . I_k = \begin{pmatrix} m_{11}I_k, & m_{12}I_k, & \ldots, & m_{1s}I_k \\ m_{21}I_k, & m_{22}I_k, & \ldots, & m_{2s}I_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{r1}I_k, & m_{r2}I_k, & \ldots, & m_{rs}I_k \end{pmatrix}.$$

Poněvadž vhodnou permutací řádků a sloupců přejde matice $M \times . I_k$ v matici

$$\begin{pmatrix} M, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & M, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & M \end{pmatrix},$$

a poněvadž pro čtvercovou matici M jsou obě permutace stejné, dostáváme, že je-li matice M čtvercová, platí pro determinanty $|M \times . I_k| = |M|^k$.

Přejdeme-li tedy v (17') k determinantům, dostáváme, označíme-li

$$\begin{vmatrix} \bar{A}_{\bar{n}}, & x_1 I_{\bar{n}} \\ \bar{B}_{\bar{n}}, & x_2 I_{\bar{n}} \\ \bar{C}_{\bar{n}}, & x_3 I_{\bar{n}} \end{vmatrix} = g_{(\bar{n})}(x_1, x_2, x_3),$$

že pro $\sigma \neq 0$ je identicky

$$f_{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma[g_{(\bar{n})}(x_1, x_2, x_3)]^k.$$

Zbývá tedy jen dokázat, že $g_{(\bar{n})}(x_1, x_2, x_3)$ je ireducibilní polynom. Forma $g_{(\bar{n})}$ je pro křivku $\bar{C}$,

$$x_1 = \bar{a}_{(\bar{n})}(t), \; x_2 = \bar{b}_{(\bar{n})}(t), \; x_3 = \bar{c}_{(\bar{n})}(t) \tag{11''}$$

tvořena stejně jako $f_{(n)}$ pro C. Lürothovo číslo pro C ve vyjádření (11″) je však již rovno jedné.

Stačí tedy dokázat: je-li pro C ve vyjádření (11′) Lürothovo číslo $k = 1$, je $f_{(n)}$ ireducibilní.

Je-li však $k = 1$, existuje podle věty 8 nenulová forma $v(t_1, t_2)$, která má tuto vlastnost:

Jsou-li y_1, y_2, z_1, z_2 dvě dvojice čísel z libovolného nadtělesa K_1 nad K a platí-li, že hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_{(n)}(y_1, y_2), & a_{(n)}(z_1, z_2) \\ b_{(n)}(y_1, y_2), & b_{(n)}(z_1, z_2) \\ c_{(n)}(y_1, y_2), & c_{(n)}(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

je menší než dvě a $v(y_1, y_2) \neq 0$, pak

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Existuje dále bod $y = (y_1, y_2, y_3)$, který má vzhledem k C násobnost nula: podle pomocné věty 2 ($c_{(n)}(t) \not\equiv 0$, $\langle a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)} \rangle = 1$) existují totiž v K čísla α, β, která nejsou obě rovna nule, tak, že $\langle \alpha a_{(n)} + \beta b_{(n)}, c_{(n)} \rangle = 1$. Bod $(\beta, -\alpha, 0)$ má pak násobnost nula, jak se snadno zjistí. Podle pomocné věty 3 pak existují k tomuto bodu y a k uvedené formě $v(t_1, t_2)$ čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ne vesměs rovná nule, tak, že forma

$$\alpha_{(n)}(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1, & y_1, & a_{(n)}(t) \\ \alpha_2, & y_2, & b_{(n)}(t) \\ \alpha_3, & y_3, & c_{(n)}(t) \end{vmatrix} \tag{27}$$

je nenulová, nemá vícenásobné faktory a je nesoudělná s formou $v(t_1, t_2)$.

Předpokládejme teď, že existuje netriviální rozklad formy $f_{(n)}$:

$$f_{(n)}(x_1, x_2, x_3) \equiv g_{(m)}(x_1, x_2, x_3)\, h_{(n-m)}(x_1, x_2, x_3), \tag{28}$$

kde

$$0 < m < n.$$

Je $f_{(n)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t)) = 0$ identicky. To plyne na př. odtud, že

$$\begin{pmatrix} A_n, & a_{(n)}(t)\, I_n \\ B_n, & b_{(n)}(t)\, I_n \\ C_n, & c_{(n)}(t)\, I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{2n} \\ -T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

podle (3), kde

$$T_s = \begin{pmatrix} t_1^{s-1} \\ t_1^{s-2} t_2 \\ \vdots \\ t_1^{s-1} \end{pmatrix}$$

pro $s \geqq 1$, takže sloupce determinantu

$$\begin{vmatrix} A_n, & a_{(n)}(t)\, I_n \\ B_n, & b_{(n)}(t)\, I_n \\ C_n, & c_{(n)}(t)\, I_n \end{vmatrix}$$

jsou lineárně závislé.

Z (28) tedy plyne, že alespoň jedna z forem v t_1, t_2

$$g_{(m)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t)), \quad h_{(n-m)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t))$$

je identicky rovna nule. Nechť je to první z těchto forem.

V nějakém nadtělese K_1 nad K existuje rozklad formy $\alpha_{(n)}(t_1, t_2)$ z (27) v lineární faktory $\overset{i}{y}_2 t_1 - \overset{i}{y}_1 t_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Poněvadž $\alpha_{(n)}$ nemá vícenásobné faktory, je pro $i \neq j$

$$\begin{vmatrix} \overset{i}{y}_1, & \overset{i}{y}_2 \\ \overset{j}{y}_1, & \overset{j}{y}_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Poněvadž $\alpha_{(n)}$ je s $v(t_1, t_2)$ nesoudělná, je $v(\overset{i}{y_1}, \overset{i}{y_2}) \neq 0$. Z uvedené vlastnosti formy $v(t_1, t_2)$ pak plyne, že pro $i \neq j$ má matice

$$\begin{bmatrix} a_{(n)}(\overset{i}{y_1}, \overset{i}{y_2}), & a_{(n)}(\overset{j}{y_1}, \overset{j}{y_2}) \\ b_{(n)}(\overset{i}{y_1}, \overset{i}{y_2}), & b_{(n)}(\overset{j}{y_1}, \overset{j}{y_2}) \\ c_{(n)}(\overset{i}{y_1}, \overset{i}{y_2}), & c_{(n)}(\overset{j}{y_1}, \overset{j}{y_2}) \end{bmatrix}$$

hodnost dvě.

Body $\overset{i}{p} = (a_{(n)}(\overset{i}{y}), b_{(n)}(\overset{i}{y}), c_{(n)}(\overset{i}{y}))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou tedy navzájem různé, leží na přímce

$$l_{(1)}(x_1, x_2, x_3) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1, & y_1, & x_1 \\ \alpha_2, & y_2, & x_2 \\ \alpha_3, & y_3, & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

i na křivce $g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = 0$. Protože $m < n$, obsahuje forma $g_{(m)}$ formu $l_{(1)}$ jako faktor:

$$g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = l_{(1)}(x_1, x_2, x_3) \cdot g'_{m-1}(x_1, x_2, x_3). \tag{29}$$

Dokážeme, že je

$$g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = \gamma[l_{(1)}(x_1, x_2, x_3)]^m, \tag{30}$$

což již povede ke sporu.

Pro $m = 1$ platí (30) z (29). Je však $l_{(1)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = \alpha_{(n)}(t) \neq 0$, takže pro $m > 1$ plyne z (29), že $g'_{(m-1)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) \equiv 0$. Jako dříve se pak dokáže, že $g'_{(m-1)}$ obsahuje $l_{(1)}$ jako faktor. Opakováním postupu dospějeme k (30).

Je $\gamma \neq 0$, neboť $f_{(n)}$ není nulová forma. Potom však ani $g_{(m)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = \gamma[\alpha_{(n)}(t)]^m$ není identicky rovno nule, což je spor s předpokladem. Důkaz věty 10 je tedy úplný.

Z věty 10 vyplývá, že křivku C, danou vyjádřením (11′), a křivku z (21) o rovnici $f_{(n)} = 0$ lze považovat za totožné.

Dalším důsledkem (je to již důsledek Lürothovy věty) je, že se stačí omezit na křivky C, které pro vyjádření (11′) mají Lürothovo číslo $k = 1$. To také učiníme, takže v dalším stále předpokládáme, že křivka C má alespoň jeden bod násobnosti jedna.

Po této úmluvě si všimneme podrobněji formy $v(t_1, t_2)$. Matice

$$\mu(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ B_{n-1}, & b_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ C_{n-1}, & c_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)} \end{pmatrix} \tag{16′}$$

z věty 8, kde $\varrho_1^{(n-2)} = (\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{n-2})$, je opět čtvercová. Podle věty 8 je tedy forma $v(t_1, t_2)$, která je nenulová, definována identitou

$$v(t_1, t_2) \cdot \varrho_{(n-2)}(t_1, t_2) = |\mu(t_1, t_2)|, \tag{31}$$

kde $\varrho_{(n-2)}(t)$ je forma s maticí $\varrho_1^{(n-2)}$, která je libovolná nenulová.

Násobíme-li v determinantu (31) poslední řádek libovolnou nenulovou formou $w_{(n)}$ a rozvineme-li jej podle posledních $n - 1$ sloupců, dostaneme, že stupeň n_1 formy $v(t_1, t_2)$ je

$$n_1 = n(n - 1) - (n - 2) - n = (n - 1)(n - 2). \tag{32}$$

Vyšetříme podrobněji než ve větě 8 vztah mezi formou $v_{(n_1)}(t_1, t_2)$, maticí $\mu(t_1, t_2)$ a parametry v singulárních bodech křivky C. Dokážeme větu:

Věta 11. *Nechť K_1 je těleso nad K, v němž lze $v_{(n_1)}(t_1, t_2)$ rozložit v lineární faktory. Potom je forma $v_{(n_1)}(t_1, t_2)$ rovna (až případně na číselný nenulový faktor) součinu forem $\overset{i}{u}{}^{s_i-1}_{(s_i)}(t)$, příslušných s_i-násobným bodům $\overset{i}{y}$, pro všechny s-násobné body nad K_1 pro $s \geqq 2$, ať explicitní nebo implicitní.*) Matice $\mu(t_1, t_2)$ má pak stejné invariantní faktory*) jako diagonální matice D, rovná (pro $M = 3n - 2$) součinu matice*

$$\begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}(t), & 0 \\ 0, & I_{M-1} \end{pmatrix}$$

a matic

$$\begin{pmatrix} \overset{i}{u}_{(s_i)}(t)\, I_{s_i-1}, & 0 \\ 0, & I_{M-s_i+1} \end{pmatrix}$$

opět pro všechny alespoň dvojnásobné body nad K_1, jestliže $\varrho_{(n-2)}(t)$ je forma nesoudělná s $v_{(n_1)}(t)$.

Důkaz. Nejprve budeme definovat formu $u_{(s_i)}$ pro implicitní s_i-násobný bod. Užijeme k tomu rozkladových kvadratických transformací.

Nechť totiž $S = (y_1, y_2, y_3)$ je s-násobný bod křivky C, $s \geqq 2$. Zvolme novou soustavu souřadnou takto:

Podle pomocné věty 3 existují pro bod (y_1, y_2, y_3) a formu $v_{(n_1)}(t_1, t_2)$ čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ tak, že ($u_{(s)}$ je forma příslušná bodu S)

---

*) Formy $u_{(s)}$ byly dosud definovány jen pro explicitní s-násobné body. Pro implicitní body je zavedeme až v důkazu.

*) Invariantní faktory ve smyslu podíly determinantních dělitelů, abychom nemuseli opouštět homogenní zápis t_1, t_2.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & y_1, & a_{(n)}(t) \\ \alpha_2, & y_2, & b_{(n)}(t) \\ \alpha_3, & y_3, & c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \,.\, \alpha_{(n-s)}(t),$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1, & y_1, & a_{(n)}(t) \\ \beta_2, & y_2, & b_{(n)}(t) \\ \beta_3, & y_3, & c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \,.\, \beta_{(n-s)}(t),$$

$$\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)} \rangle = \langle \alpha_{(n-s)}, v_{(n_1)} \rangle = \langle \beta_{(n-s)}, v_{(n_1)} \rangle = 1,$$

a α i β nemají vícenásobné faktory; dále existují podle téže pomocné věty (jako v důkazu věty 10) čísla $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tak, že

$$\gamma_1\, a_{(n)}(t) + \gamma_2\, b_{(n)}(t) + \gamma_3\, c_{(n)}(t) = \bar{c}_{(n)}(t)$$

je forma opět bez vícenásobných faktorů a nesoudělná s $u_{(s)}\alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}v_{(n_1)}$.

Potom lineární transformace

$$\bar{x}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & y_1, & x_1 \\ \alpha_2, & y_2, & x_2 \\ \alpha_3, & y_3, & x_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{vmatrix} \beta_1, & y_1, & x_1 \\ \beta_2, & y_2, & x_2 \\ \beta_3, & y_3, & x_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{x}_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

je regulární. Odpovídá totiž každému bodu (t_1, t_2) křivky C bod

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= u_{(s)}(t)\, \alpha_{(n-s)}(t) \\ \bar{x}_2 &= u_{(s)}(t)\, \beta_{(n-s)}(t) \\ \bar{x}_3 &= c_{(n)} \end{aligned} \tag{33}$$

Z (35) a podmínek nesoudělnosti pak snadno plyne lineární nezávislost $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, takže (33) je vyjádření křivky C v nové soustavě souřadnic (v dalším opět vynecháváme pruhy).

Nazveme pak rozkladovou trasnformací bodu S kvadratickou transformaci T_s:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 x_3 \\ x_2' &= x_3 x_1 \\ x_3' &= x_1 x_2 . \end{aligned}$$

Touto transformací přejde každý bod (t_1, t_2) křivky C pro $u_{(s)}(t) \neq 0$ v bod

$$\begin{aligned} x_1' &\equiv \beta_{(n-s)}(t)\, c_{(n)}(t) \\ x_2' &\equiv \alpha_{(n-s)}(t)\, c_{(n)}(t) \\ x_3' &\equiv \alpha_{(n-s)}(t)\, \beta_{(n-s)}(t)\, u_{(s)}(t) \end{aligned} \tag{34}$$

Snadno se zjistí, že (34) je vyjádření racionální křivky C'. Transformací T_s odpovídá „okolí" bodu S „okolí" přímky $x_3' \neq 0$. Definuje se, že bod S má ve svém „okolí prvního řádu" implicitní s_i-násobné body S_i, $s_i > 0$, jestliže křivka C' má na přímce $x_3' = 0$ (explicitní) s_i-násobné body S_i', různé od bodů O_1', O_2'. Nechť tedy je $(\varrho_1, \varrho_2, 0)$ bod S_i'. Příslušná forma je pak $u_{(s_i)} = \langle c_{(n)}(\beta_{(n-s)}\varrho_2 - \alpha_{(n-s)}\varrho_1),\ \alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}u_{(s)}\varrho_1,\ \alpha_{(n-s)}$.

$\cdot \beta_{(n-s)} u_{(s)} \overset{i}{\varrho}_2 \rangle = \langle \beta_{(n-s)} \overset{i}{\varrho}_2 - \alpha_{(n-s)} \overset{i}{\varrho}_1, u_{(s)} \rangle$, $s_i > 0$. Tato forma, jak se bez obtíží zjistí, nezávisí na volbě (přípustné) kvadratické transformace T_s.

Platí, což zde nebudeme dokazovat, že každému r-násobnému bodu Q křivky C, $r > 0$, různému od S, ať explicitnímu nebo implicitnímu, odpovídá rovněž r-násobný bod Q' křivky C' s touž formou $t_{(r)}$; to platí i obráceně, s výjimkou bodů na $x'_1 x'_2 x'_3 = 0$.

Je-li dále některý z bodů S'_i opět alespoň dvojnásobný bod křivky C', zavedeme opět rozkladovou transformaci T_{s_i}; tím dostaneme opět s_{ij}-násobné body S''_{ij} s formami ($s_{ij} \geqq 1$) $u_{(s_{ij})}$ na křivce $T_{s_i} C' = C''$. Definuje se pak, že v „okolí druhého řádu" bodu S jsou s_{ij}-násobné implicitní body S_{ij} s formami $u_{(s_{ij})}$ atd.

Platí věta, že každou (nejen racionální) křivku lze konečným počtem rozkladových kvadratických transformací převést v křivku, jejíž všechny singulární body jsou jednoduché, t. j. v jejichž „okolí prvého řádu" jsou jen jednoduché body, dokonce navzájem různé.

Nazveme-li totiž zdánlivým rodem h křivky C číslo

$$h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i - 1)}{2},$$

kde se sčítá pro všechny explicitní r_i-násobné body křivky C pro $r_i > 1$, plyne z věty 8, že $h \geqq 0$ (formy $u_{(r_i)}^{r_i - 1}$ a $u_{(r_j)}^{r_j - 1}$ jsou totiž pro explicitní body nesoudělné a dělí $v_{[(n-1)(n-2)]}$). Pro křivku C' z (34) se pak snadno nalezne, že její zdánlivý rod

$$h' = h - \tfrac{1}{2} \Sigma s_i (s_i - 1),$$

kde se sčítá pro implicitní s_i-násobné body S_i „okolí prvého řádu" bodu S. Není-li tedy bod S jednoduchým s-násobným bodem, je alespoň jedno $s_i > 1$, takže

$$0 \leqq h' < h.$$

Dospějeme tedy nejvýše po h vhodných (t. j. pro něž se zdánlivý rod skutečně snižuje) rozkladových transformacích ke křivce C^*, která má jen jednoduché singularity.

K důkazu věty 11 teď stačí užít pomocné věty:

Pomocná věta 4. Nechť $\mu(t_1, t_2)$ s formou $\varrho_{(n-2)}$ a $\mu'(t_1, t_2)$ s formou $\varrho'_{(2n-s-3)}$ jsou matice (16') ke křivkám C resp. C', a přitom $\varrho_{(n-2)}$ nechť je nesoudělná s $v_{(n_1)}$, $\varrho'_{(2n-s-3)}$ nesoudělná s $\alpha_{(n-s)} \beta_{(n-s)} c_{(n)} v_{(n_1)}$. Pak pro normální diagonální tvary*) D resp. D' matic $\mu(t_1, t_2)$, resp. $\mu'(t_1, t_2)$ platí

---

*) Normální diagonální tvar matice je diagonální matice, která má v hlavní diagonále invariantní faktory dané matice (každý invariantní faktor dělí předchozí).

$$\begin{pmatrix}\varrho'_{(2n-s-3)}I_1, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{(n-s)}I_{n-s-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{(n-s)}I_{n-s-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{(n)}I_{n-1}, & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix} \doteq$$

$$= \begin{pmatrix}\varrho_{(n-2)}I_1, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{(s)}I_{s-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix} D'.^{*)} \tag{35}$$

Je-li dále S jednoduchý s-násobný bod, jsou invariantní faktory matice D' nesoudělné s $u_{(s)}$.

Odtud totiž plyne věta 11 indukcí přes zdánlivý rod takto:

Je-li $h = 0$, t. j. jsou-li všechny singulární body jednoduché, je podle této pomocné věty

$$\begin{pmatrix}\varrho'_{(m-s-3)}I_1, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varrho_{(n-2)}I_1, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{(s)}I_{s-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\overline{D},$$

kde $\overline{D}$ je diagonální matice, jejíž invariantní faktory jsou s $u_{(s)}$ nesoudělné. To však platí pro všechny singulární body, takže celkem (s užitím věty 8; zjistí se totiž snadno že zbylý faktor v D je již konstantní matice) je

$$D = \begin{pmatrix}\varrho_{(n-2)}I_1, & 0\\ 0, & I_{M-1}\end{pmatrix}\cdot\prod_{s_i\geq 2}\begin{pmatrix}u_{(s_i)}I_{s_i-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}.$$

Budiž teď $h > 0$ a předpokládejme, že věta platí pro všechna vyjádření (11′) všech křivek o zdánlivém rodu $\leqq h - 1$. Pak existuje (kdyby všechny singulární body byly jednoduché, pak by vzhledem k větě 8 $\Pi u_{(s)}^{s-1} = v_{[(n-1)(n-2)]}$, kde součin je vzat přes všechny explicitní s-násobné body, $s \geqq 2$, takže by $h = 0$) alespoň jeden nikoli jednoduchý s-násobný bod S, $s \geqq 2$. Můžeme předpokládat, že souřadná soustava je zvolena tak, že C má tvar (33). Transformace T_s převede C v C' o zdánlivém rodu $\leqq h - 1$. Jsou-li D resp. D' normální diagonální tvary matic $\mu(t_1, t_2)$ resp. $\mu'(t_1, t_2)$ s formami $\varrho_{(n-2)}$ resp. $\varrho'_{(2n-s-3)}$, nesoudělnými s $v_{(n_1)}$ resp. $\alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}c_{(n)}v_{(n_1)}$, pak platí jednak podle indukčního předpokladu, že

$$D' = \begin{pmatrix}\varrho'_{(2n-s-3)}I_1, & 0\\ 0, & I_{M'-1}\end{pmatrix}\cdot\prod_{s_i\geq 2}\begin{pmatrix}u_{(s_i)}I_{s_i-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}, \tag{36}$$

kde součin je přes všechny, explicitní či implicitní, s_i-násobné body C', $s_i \geqq 2$, jednak (35). Poněvadž součin v (36) lze psát jako

$$\begin{pmatrix}\alpha_{(n-s)}I_{n-s-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{(n-s)}I_{n-s-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{(n)}I_{n-1}, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}\prod{}',$$

kde prvé tři matice odpovídají jednoduchým singulárním bodům O_2', O_1' a O_3', Π' pak ovšem ostatním singulárním bodům, různým od O_1', O_2',

*) V každé matici je I jednotková matice takového řádu, aby matice měla řád $3(2n - s - 1) - 2$.

O_3'. Z (35) a (36) dostáváme však ihned, vynecháme-li ve všech maticích jednotkovou matici $I_{M'-M}$, že

$$D = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)} I_1, & 0 \\ 0, & I_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(s)} I_{s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \cdot \prod_i{}' \begin{pmatrix} u_{(s_i)} I_{s_i-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Součin je pak skutečně vzat přes všechny, explicitní či implicitní, alespoň dvojnásobné body C. Bod $O_3 = S$ je totiž zahrnut explicitním a implicitními (v Π') body, O_1 a O_2 neleží na křivce a ostatní singulární body odpovídají podle toho, co bylo řečeno, jednojednoznačně při týchž formách $u_{(s_i)}$ singulárním bodům C' a vyskytují se tedy v Π'.

Zbývá tedy dokázat jen pomocnou větu 4. To učiníme v několika krocích.

Pomocné tvrzení 1. Je-li $\varrho_{(n-2)}$ nesoudělná forma s $v_{(n_1)}$, pak pro normální diagonální tvar D matice (16′) platí

$$D = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}(t), & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{D}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ B_{n-1}, & b_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ C_{n-1}, & c_{(n)}(t)\, I_{n-1} \end{pmatrix} \tag{38}$$

má pak stejné invariantní faktory a stejný typ jako matice $(\overline{D}, 0)$, kde 0 je jeden nulový sloupec.

Důkaz. Pro stručnost budeme symbolem $A \sim B$ značit, že matice (nad t_1, t_2) mají týž typ a invariantní faktory. Platí

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)}, & \varrho_{(n-2)}(t) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)}, & 0 \end{pmatrix} \sim (D, 0),$$

jak plyne, násobíme-li v prvé matici i-tý sloupec $t_1^{2n-i-1} \cdot t_2^{i-1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, dále $-t_1^{3n-i-2} \cdot t_2^{i-2n}$ pro $i = 2n, \ldots, 3n-2$ a vždy přičteme k poslednímu sloupci. Dále

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_n I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_n I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_n I_{n-1}, & 0 \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)}, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Z transformační rovnice (19) plyne, že parametry t_1, t_2 lze volit tak, aby $\varrho_{(n-2)}$ a t_2 byly nesoudělné.

Potom se jako v důkazu věty 8 snadno zjistí, že matice $\mu(t_1, 1)$ je ekvivalentní matici, která má v posledním sloupci jediný nenulový prvek $\varrho_{(n-2)}(t_1, 1)$. Podle věty 5 dělí (potom opět zhomogenisovaná) forma $\varrho_{(n-2)}(t_1, t_2)$ první invariantní faktor matice $\mu(t_1, t_2)$. Protože součin všech invariantních faktorů matice $\mu(t_1, t_2)$ je $\varrho_{(n-2)} \cdot v_{(n_1)}$, kde $\langle \varrho_{(n-2)}, v_{(n_1)} \rangle = 1$, plyne odtud, že $\varrho_{(n-2)}$ je nesoudělná forma jak s ostatními invariantními faktory z $\mu(t_1, t_2)$, tak i s podílem prvého invariantního faktoru a $\varrho_{(n-2)}$. Ze srovnání matic μ_1, μ_2 je pak zřejmé, že invariantní faktory obou těchto matic jsou stejné až případně na faktory, soudělné s $\varrho_{(n-2)}$.

Je tedy celkem

$$D = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}, & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{D}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

(neboť alespoň jeden invariantní faktor v D je skutečně 1),

$$\begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}, & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \sim (D, 0) = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}, & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{D}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

kde $(D_0, 0) \sim \mu_0$, takže vskutku je

$$\overline{D} = D_0.$$

Pomocné tvrzení 2. Jsou-li μ_0 resp. μ_0' matice (38) pro křivku C resp. C' (ve vyjádřeních (33) resp. (34)), dále $U, \bar{A}$ a $\overline{B}$ matice, příslušné formám $u_{(s)}, \alpha_{(n-s)}$ a $\beta_{(n-s)}$, pak platí

$$\mu_0 \sim \begin{bmatrix} I_s, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}_{n-1}, & \alpha_{(n-s)} u_{(s)} I_{n-1} \\ 0, & \overline{B}_{n-1}, & \beta_{(n-s)} u_{(s)} I_{n-1} \\ 0, & C_{n-s-1}, & c_{(n)} U_{n-s-1} \end{bmatrix} \tag{39}$$

a

$$\mu_0' \sim \begin{bmatrix} I_{3(n-1)-2s}, & 0, & 0, \\ 0, & \beta_{(n-s)} c_{(n)} \bar{A}_{n-1}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha_{(n-s)} c_{(n)} \overline{B}_{n-1}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha_{(n-s)} \beta_{(n-s)} u_{(s)} C_{n-s-1}, & U_{n-s-1} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Důkaz. Existuje forma $l_{(n-s-1)}(t)$, nesoudělná s $\alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}c_{(n)}u_{(s)}$. Označme příslušnou matici L. Platí pak

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & L_s \\ I_{n-1}, & 0, & 0 \\ 0, & I_{n-1}, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}U, & \alpha u I_{n-1} \\ \overline{B}U, & \beta u I_{n-1} \\ C, & c I_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_s, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}, & \alpha u I_{n-1} \\ 0, & \bar{B}, & \beta u I_{n-1} \\ 0, & C, & c U_{n-s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LC, & cL_s \\ U_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & I_{n-1} \end{bmatrix}.^{*)}$$

Podle pomocné věty 1 jsou obě čtvercové matice regulární, protože $\langle l_{(n-s-1)}, u_{(s)} \rangle = 1$, $\langle l_{(n-s-1)} c_{(n)}, u_{(s)} \rangle = 1$. Odtud a z věty 5 plyne (39).

Zdlouhavější je důkaz pro (40): je opět pro vesměs regulární čtvercové matice

$$\begin{bmatrix} I_{3n-s}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{n-s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ -\bar{B}C, & 0, & L_n, & 0, & 0 \\ -\bar{A}C, & 0, & 0, & L_n, & 0 \\ -\bar{A}\bar{B}U, & 0, & 0, & 0, & L_n \\ 0, & -I_{n-s-1}, & \bar{A}U, & 0, & 0 \\ 0, & -I_{n-s-1}, & 0, & \bar{B}U, & 0 \\ 0, & -I_{n-s-1}, & 0, & 0, & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{3n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \bar{B}C, & \beta c I_{2n-s-1} \\ 0, & 0, & \bar{A}C, & \alpha c I_{2n-s-1} \\ 0, & 0, & \bar{A}\bar{B}U, & \alpha\beta u I_{2n-s-1} \end{bmatrix} .$$

$$. \begin{bmatrix} L, & -I_{3n-s}, & 0, & 0 \\ \bar{A}\bar{B}CU, & 0, & 0, & -I_{n-s-1} \\ I_{4n-2s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= M_1 . \begin{bmatrix} L, & -I_{3n-s}, & 0, & 0 \\ \bar{A}\bar{B}CU, & 0, & 0, & -I_{n-s-1} \\ 0, & I_{3n-s}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

kde

$$M_1 = \begin{bmatrix} I_{4n-2s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{B}C, & \beta c L_n, & 0 \\ 0, & \bar{A}C, & \alpha c L_n, & 0 \\ 0, & \bar{A}\bar{B}U, & \alpha\beta u L_n, & 0 \\ 0, & 0, & \beta c \bar{A}U, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha c \bar{B}U, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha\beta u C, & I_{n-s-1} \end{bmatrix}$$

*) Je-li v matici v některém řádku označeno, kolik řádků příslušné pole má, pak obvykle u ostatních polí index vynecháváme. Viz ostatně poznámku na str. 322.

pro

$$I_{4n-2s-1} = \begin{pmatrix} I_{3n-s}, & 0 \\ 0, & I_{n-s-1} \end{pmatrix}.$$

Pro rozklad

$$I_{4n-2s-1} = \begin{pmatrix} I_{2n-s}, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1} \end{pmatrix}$$

je pak

$$\begin{bmatrix} I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_n, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\bar{B}, & 0, & I_n, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\bar{A}, & 0, & 0, & I_n, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix}.$$

$$. M_1 . \begin{bmatrix} C, & I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0 \\ I_{3n-s}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix} =$$

$$= M_2 . \begin{bmatrix} C, & I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ \bar{A}\bar{B}U, & 0, & 0, & \alpha\beta u L_n, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & -I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

kde

$$M_2 = \begin{bmatrix} I_{5n-2n-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{B}, & \beta c L_n, & 0 \\ 0, & \bar{A}, & \alpha c L_n, & 0 \\ 0, & 0, & \beta c \bar{A} U, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha c \bar{B} U, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha\beta u C, & I_{n-s-1} \end{bmatrix}$$

pro rozklad

$$I_{5n-2s-1} = \begin{bmatrix} I_{2n-s}, & 0, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & I_n \end{bmatrix}.$$

Dále je pro rozklad

$$I_{5n-2s-1} = \begin{pmatrix} I_{5n-3s-1}, & 0 \\ 0, & I_s \end{pmatrix} \text{ v } M_2$$

$$\begin{bmatrix} I_{5n-3s-1}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_s, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & U_{n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -I_s, & \bar{A}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & -I_s, & 0, & \bar{B}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix} .$$

$$. M_2 . \begin{bmatrix} I_{5n-3s-1}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}\bar{B}, & 0, & -I_s, & 0 \\ 0, & I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix} =$$

$$= M_3 . \begin{bmatrix} I_{5n-3s-1}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}\bar{B}, & 0, & -I_s, & 0 \\ 0, & \bar{B}U, & \beta cLU, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}U, & \alpha cLU, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_s, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

kde

$$M_3 = \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \beta c\bar{A}L, & I_s, & 0 \\ 0, & \beta c\bar{A}U, & 0, & I_{n-s-1} \\ 0, & \alpha c\bar{B}L, & I_s, & 0 \\ 0, & \alpha c\bar{B}U, & 0, & I_{n-s-1} \\ 0, & \alpha\beta uC, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix}$$

pro

$$I_{7n-4s-1} = \begin{bmatrix} I_{5n-3s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_s, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{n-s}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{n-s} \end{bmatrix}.$$

Konečně

$$M_3 \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & L_s \\ 0, & 0, & U_{n-s-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & L_s, & 0, & 0 \\ 0, & U_{n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & L_s, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix} M_4,$$

kde

$$M_4 = \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & \beta c\bar{A}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha c\bar{B}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha\beta uC, & U_{n-s-1} \end{bmatrix}.$$

Odtud snadno plyne (40).

Pomocné tvrzení 3. Je-li δ resp. $\bar{\delta}$ největší společný dělitel determinantů nejvyššího stupně matice

$$M = \begin{bmatrix} \bar{A}, & \alpha uI_{n-1} \\ \bar{B}, & \beta uI_{n-1} \\ C, & cU_{n-s-1} \end{bmatrix} \text{ resp. } \bar{M} = \begin{bmatrix} \beta c\bar{A}, & I_{n-1} \\ \alpha c\bar{B}, & I_{n-1} \\ \alpha\beta uC, & U_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

platí, že

$$u_{(s)}^{s-1}\bar{\delta} = \alpha_{(n-s)}^{n-s-1}\beta_{(n-s)}^{n-s-1}c_{(n)}^{n-1}\delta. \tag{41}$$

Důkaz. δ je největší společný dělitel všech determinantů, pokud jsou formami (t. j. buď pro $g_1^{(2n-s-2)} = 0$ nebo pro $h_1^{(n-2)} = 0$), tvaru

$$\begin{vmatrix} \bar{A}, & \alpha uI_{n-1} \\ \bar{B}, & \beta uI_{n-1} \\ C, & cU_{n-s-1} \\ g_1^{(2n-s-2)}, & h_1^{(n-2)} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

Násobíme-li determinant (jako matici) zprava determinantem

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -ut_1^{2n-s-2} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -ut_1^{2n-s-3}t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -ut_2^{2n-s-2} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & t_1^{n-2}t_2 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, & t_1^{n-3}t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & t_1t_2^{n-3} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & t_2^{n-2} \end{vmatrix}, \tag{43}$$

dostaneme determinant, který má v posledním sloupci jen nejvýše poslední prvek nenulový, rovný $h_{(n-2)} - u_{(s)}g_{(2n-s-2)}$.*) Rozvedeme-li jej podle posledního sloupce, dostaneme, označíme-li Δ subdeterminant, že celkem

$$t_2^{n-2} \cdot \delta = \Delta, \tag{44}$$

neboť pro $g \equiv 0$ je největší společný dělitel forem $h_{(n-2)}$ pro různé formy $h_{(n-2)}$ zřejmě 1.

Jestliže analogicky postupujeme pro druhou matici (místo (43) užijeme determinantu, jehož poslední sloupec má prvky $-t_1^{2n-s-2}, \ldots, -t_2^{2n-s-2}, \alpha\beta c t_1^{n-2}, \alpha\beta c t_1^{n-3} t_2, \ldots, \alpha\beta c t_2^{n-2}$, místo $h_{(n-2)} - u_{(s)}g_{(2n-s-2)}$ pak dostaneme $\alpha\beta c h_{(n-2)} - g_{(2n-s-2)}$, takže pro $h \equiv 0$ je největší společný dělitel opět 1), dojdeme k rovnici

$$\alpha\beta c \cdot t_2^{n-2} \cdot \bar{\delta} = \bar{\Delta}. \tag{45}$$

Násobíme-li v Δ prvých $n - 1$ řádků βc, dalších $n - 1$ řádků αc a posledních $n - s - 1$ řádků $\alpha\beta u$, dostaneme právě týž determinant jako při násobení posledních $n - 2$ sloupců $\bar{\Delta}$ formou $\alpha\beta c u$. Je tedy

$$\Delta(\alpha\beta c u)^{n-2} = \bar{\Delta}(\alpha c)^{n-1}(\beta c)^{n-1}(\alpha\beta u)^{n-s-1},$$

takže z (44) a (45) dostáváme (41).

Teď již bez obtíží dokážeme pomocnou větu 4: Nechť φ_i resp. ψ_i jsou invariantní faktory matice M resp. $\overline{M}$, $\varphi_{i+1} \mid \varphi_i$, $\psi_{i+1} \mid \psi_i$. Předně platí, že pro ω_1, ω_2 z nějakého nadtělesa K_1 nad K, pro které je $\alpha_{(n-s)}(\omega_1, \omega_2) = 0$, je defekt

$$\operatorname{def} \overline{M}(\omega_1, \omega_2) = \operatorname{def} \bar{A} = n - s; \tag{46_1}$$

je-li obdobně $\beta_{(n-s)}(\omega_1', \omega_2') = 0$, je

$$\operatorname{def} \overline{M}(\omega_1', \omega_2') = n - s. \tag{46_2}$$

Pro ω_1'', ω_2'', $c_{(n)}(\omega_1'', \omega_2'') = 0$, je dále

$$\operatorname{def} \overline{M}(\omega_1'', \omega_2'') = n, \tag{46_3}$$

a konečně pro $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$, $u_{(s)}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = 0$, je

$$\operatorname{def} M(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \operatorname{def} U_{n-s-1} = s. \tag{46_4}$$

Protože $\alpha_{(n-s)}$ má jen jednoduché faktory a je nesoudělná s $v_{(n_1)}$, a obdobně pro $\beta_{(n-s)}$ a $c_{(n)}$, platí, označíme-li $[\varphi_i]$ diagonální matici s diagonálními prvky φ_i a pod., že (matice M i $\overline{M}$ mají o jeden sloupec více než řádků)

$$[\psi_i] = \begin{pmatrix} \alpha I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c I_{n-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} [\bar{\varphi}_i], \tag{47}$$

*) $h_{(n-2)}$ resp. $g_{(2n-s-2)}$ jsou formy příslušné maticím $h_1^{(n-2)}$ resp. $g_1^{(2n-s-2)}$

kde $\langle\overline{\psi}_i, \alpha\beta c\rangle = 1$. Je totiž

$$\overline{\delta} = \Pi\psi_i = \alpha^{n-s-1}\beta^{n-s-1}c^{n-1}\Pi\overline{\psi}_i, \tag{48}$$

takže podle (41) je

$$u_{(s)}^{s-1}\Pi\overline{\psi}_i = \delta = \Pi\varphi_i. \tag{50}$$

Avšak podle (39) a pomocného tvrzení 1 je $\delta = |\overline{D}| = v_{(n_1)}$, a tedy

$$\langle\Pi\overline{\psi}_i, \alpha\beta c\rangle = 1.$$

Dále platí

$$\begin{bmatrix} \beta cI_{n-1}, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha cI_{n-1}, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha\beta uI_{n-s-1} \end{bmatrix} M \begin{pmatrix} \alpha\beta cuI_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & I_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha\beta cu\overline{M}.$$

Invariantní faktory matice $\alpha\beta cu\overline{M}$ jsou $\alpha\beta cu\psi_i$; podle věty 5 proto platí $\varphi_i \mid \alpha\beta cu\psi_i$. Vzhledem k tomu, že $\langle\varphi_i, \alpha\beta c\rangle = 1$ a vzhledem k (47) $\varphi_i \mid u\overline{\psi}_i$. Ze (46$_4$) dále plyne, že $\langle\varphi_i, u\rangle = 1$ pro $i > s - 1$, takže platí: existují formy λ_i tak, že $\varphi_i\lambda_i = u\overline{\psi}_i$ pro $i = 1, \ldots, s - 1$, $\varphi_i\lambda_i = \overline{\psi}_i$ pro $i \geq s$. Znásobením těchto vztahů dostaneme $\Pi\varphi_i \,.\, \Pi\lambda_i = u^{s-1}\Pi\overline{\psi}_i$. Podle (50) je potom však $\Pi\lambda_i = 1$. Tedy (vše ve smyslu dělitelnosti) $\lambda_i = 1$. Odtud,

$$[\varphi_i] = \begin{pmatrix} uI_{s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} [\overline{\psi}_i], \tag{51}$$

takže celkem z (51), (47) a pomocného tvrzení 1 dostáváme (35).

Zbytek tvrzení pomocné věty 4 plyne odtud, že pro jednoduchý s-násobný bod S je $\langle v'_{(n'_1)}, u_{(s)}\rangle = 1$, kde $v'_{(n_1')} = |D'|$ je forma pro C', analogická k $v_{(n_1)}$.

Uvedeme teď bez důkazu větu:

Věta 12. *Nechť C je křivka ve tvaru (11'). Nutná a postačující podmínka, aby křivka $g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = 0$ byla adjungovanou křivkou k C, je, aby forma $g_{(m)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t))$ byla dělitelná formou $v_{(n_1)}(t)$.*

Z této věty vyvodíme důsledek:

Věta 13. *Adjungované křivky k C $(n - 2)$-ho stupně tvoří lineární $(n - 2)$-rozměrnou soustavu. Rovnice této soustavy je*

$$\begin{vmatrix} A_{n-1}, & x_1I_{n-1} \\ B_{n-1}, & x_2I_{n-1} \\ C_{n-1}, & x_3I_{n-1} \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)} \end{vmatrix} = 0, \tag{52}$$

kde $\varrho_1^{(n-2)} = (\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-2})$ jsou parametry soustavy.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že každá křivka (52) je adjungovaná. To však plyne odtud, že podle (31) je

$$\begin{vmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ B_{n-1}, & b_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ C_{n-1}, & c_{(n)}(t)\, I_{n-1} \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)} \end{vmatrix} = v_{(n_1)}(t) \cdot \varrho_{(n-2)}. \tag{31'}$$

Nechť naopak křivka $g_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) = 0$ je adjungovaná. To znamená, že $g_{(n-2)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = v_{(n_1)}(t) \cdot \sigma_{(n-2)}(t)$, kde σ je nějaká forma $(n-2)$-ho stupně (je totiž $n_1 = (n-1)(n-2)$ a stupeň formy vlevo je $n(n-2)$). Je-li $\sigma_1^{(n-2)}$ matice příslušná k formě $\sigma_{(n-2)}$, pak forma

$$h_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} A_{n-1}, & x_1 I_{n-1} \\ B_{n-1}, & x_2 I_{n-1} \\ C_{n-1}, & x_3 I_{n-1} \\ 0, & \sigma_1^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

má vlastnost, že $h_{(n-2)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = v_{(n_1)}(t) \cdot \sigma_{(n-2)}(t)$. Pro formu $w_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) = g_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) - h_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3)$ tedy platí $w_{(n-2)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t)) \equiv 0$. Jako na konci důkazu věty 10 odtud plyne, že je identicky $w_{(n-2)} \equiv 0$, $g_{(n-2)} \equiv h_{(n-2)}$, takže $g_{(n-2)}$ má vskutku tvar (52). Že soustava (52) má dimensi $n-2$, plyne z (31').