Zdeněk Pírko
Harmonická příbuznost. I.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 201--215

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117012`

HARMONICKÁ PŘÍBUZNOST

Část I.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

(Došlo 14. XI. 1950.)

Harmonickou příbuzností rozumí autor superposici polarity a kvadratické inverse vzhledem k jedné jednoduché kuželosečce. V článku odvozuje základní vlastnosti této příbuznosti, v níž přísluší obecně přímce bod a svazku přímek kuželosečka.

1.0. Posavadní úvahy*) shrneme a částečně doplníme. Východiskem bude obapolně jednoznačná korespondence mezi analagmatickou křivkou a deferentou; ukážeme, že tato korespondence dá se vyjádřit prostřednictvím další příbuznosti, v níž však už neodpovídá bodu opět bod, nýbrž přímka. Nazveme ji *příbuznost harmonická* a udáme pro ni analytické vyjádření.

1.1. Buďtež

$$\lambda_i = \lambda_i(t) \ (i = 1, 2, 3)$$

jednoznačné funkce parametru t, mající spojité první derivace pro $t_1 \leqq t \leqq t_2$, a takové, že matice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t), & \lambda_2(t), & \lambda_3(t) \\ \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt}, & \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt}, & \dfrac{d\lambda_3(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

má hodnost 2 v intervalu $t_1 \leqq t \leqq t_2$.

Pak existuje jednoparametrická soustava kuželoseček

$$\lambda_1(t)\, x_2x_3 + \lambda_2(t)\, x_1x_3 + \lambda_3(t)(x_1x_2 + x_3^2) = 0, \qquad (1.1,1)$$

které tvoří analagmatickou síť. Kuželosečky sítě jsou jednoduché s výjimkou oněch hodnot $t = t^*$, které jsou kořeny rovnice

$$\lambda_3 = 0$$

*) Tento článek navazuje sice na článek *Analagmatické čáry v kvadratické inversi*, otištěný v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky 75 (1950), str. 266 až 276, ale v podstatné své části je na něm nezávislý. Pokud zpočátku na tento článek odkazuji, činím tak na příklad takto: I, 4.1 značí: odstavec 4.1 citovaného článku.

nebo rovnice

$$\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 = 0;$$

řešení t^* těchto rovnic vedou na složené kuželosečky sítě (1). Viz I, 3.1, 3.4, 4.1.

Soustava (1) má obálku

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1(t)\, x_2x_3 + \lambda_2(t)\, x_1x_3 + \lambda_3(t)(x_1x_2 + x_3^2) = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} x_2x_3 + \frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t} x_1x_3 + \frac{\mathrm{d}\lambda_3(t)}{\mathrm{d}t} (x_1x_2 + x_3^2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

čili

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Lambda_2(t) : \Lambda_1(t) : \tfrac{1}{2}(\Lambda_3(t) \mp \sqrt{\Lambda_3^2(t) - 4\Lambda_1(t)\Lambda_2(t)}, \tag{1.1,2}$$

kde $\Lambda_i(t)$ je subdeterminant příslušný k i-tému prvku prvního řádku determinantu

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}, & \dfrac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}, & \dfrac{\mathrm{d}\lambda_3(t)}{\mathrm{d}t} \\ \lambda_1(t), & \lambda_2(t), & \lambda_3(t). \end{vmatrix}.$$

Viz I, 4.1.

Obálka (2) je analagmatická v téže inversi, v níž jsou analagmatické kuželosečky sítě (1). Vlastnost ta je charakteristická: Obálka soustavy (1) je analagmatická křivka o parametrických rovnicích (2); obráceně, dána-li analagmatická křivka

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1.1,3}$$

pak je obálkou kuželoseček (1), o nichž platí

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = &\left(x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) : \\ &: \left(x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) : x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ f(x_1, x_2, x_3) = 0, & \end{aligned}\right\} \tag{1.1,4}$$

s vyloučením oněch bodů (x), v nichž (3) je protata přímkou $x_3 = 0$ nebo řídicí kuželosečkou $x_1x_2 - x_3^2 = 0$. Viz I, 4.1, 4.2.

Každá jednoduchá kuželosečka sítě (1) dotýká se obálky (3) dvojnásob; body dotyku mají souřadnice (2), jsou kolineární se středem inverse a ovšem tvoří inversní dvojici. Věta tato platí opět potud, pokud jsme vyloučili body řídicí kuželosečky.

Bod $(\lambda_1 : \lambda_2 : -\lambda_3)$ nazýváme „středem" kuželosečky (1). Položme

$$\lambda_1 : \lambda_2 : -\lambda_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3$$
$$(\mu_i = \mu_i(t));$$

probíhá-li parametr t hodnotami $t_1 \leqq t \leqq t_2$, probíhá kuželosečka (1) soustavu a její „střed" přitom popíše křivku

$$y_1 : y_2 : y_3 = \mu_1(t) : \mu_2(t) : \mu_3(t), \qquad (1.1,5)$$

deferentu příslušné analagmatické křivky (obálky). Vztah mezi analagmatickou křivkou a její deferentou je obapolně jednoznačný. Viz I, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3.

1.2. Je-li

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1.2,1^*)$$

rovnice analagmatické křivky, je podle rovnic (1.1,4,5)

$$\left.\begin{aligned} y_1 : y_2 : y_3 = {} & \left(x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) : \\ & : \left(x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) : \left(- x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \\ f(x_1, x_2, x_3) = {} & 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2,1)$$

parametrické vyjádření příslušné *deferenty.*

S druhé strany buď

$$g(y_1, y_2, y_3) = 0 \qquad (1.2,2^*)$$

rovnice deferenty a předpokládejme již stále, že $g(y)$ je *algebraická homogenní forma* (stupně n_D). Budeme hledat parametrické vyjádření příslušné analagmatické křivky.

Analagmatická kuželosečka naší soustavy je

$$h(x_1, x_2, x_3) \equiv y_1 x_2 x_3 + y_2 x_1 x_3 - y_3(x_1 x_2 + x_3^2) = 0;$$

obálka kuželoseček $h(x; y) = 0$, jestliže mezi parametry y_1, y_2, y_3 platí vztah (2*), je určena jednou z rovnic

$$g(y) = 0,$$
$$h(x; y) = 0$$

a rovnicemi

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} : \frac{\partial h}{\partial y_1} = \frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial h}{\partial y_2} = \frac{\partial g}{\partial y_3} : \frac{\partial h}{\partial y_3},$$

které v našem případě mají tvar

$$\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_1}}{x_2 x_3} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}{x_1 x_3} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_3}}{-(x_1 x_2 + x_3^2)}.$$

Označíme-li $\frac{1}{\chi}$ $(\chi \not\equiv 0)$ společnou hodnotu těchto poměrů, jsou předcházející rovnice ekvivalentní se soustavou

$$\left.\begin{aligned} x_2x_3 + \chi\frac{\partial g}{\partial y_1} &= 0 \\ x_1x_3 = \chi\frac{\partial g}{\partial y_2} &= 0 \\ -(x_1x_2 + x_3^2) + \chi\frac{\partial g}{\partial y_3} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{1.2,3}$$

z této soustavy a z jedné z rovnic

$$g(y) = 0,\ h(x; y) = 0$$

máme eliminovat y_1, y_2, y_3 a χ.

Předpokládejme, že

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} \not\equiv 0 \ (i = 1, 2, 3).$$

Pak postup je tento: Z (3_1), (3_2) plyne

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_1}, \quad x_1x_2x_3^2 = \chi^2\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2};$$

po dosazení do (3_3)

$$x_1x_2 = \tfrac{1}{2}\chi\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial y_3}\right)^2 - 4\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}}\right). \tag{1.2,4}$$

Odtud

$$x_1^2 = \frac{x_1}{x_2}\,.\,x_1x_2 = \tfrac{1}{2}\chi\left(\frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right)$$

$$x_2^2 = \frac{x_2}{x_1}\,.\,x_1x_2 = \tfrac{1}{2}\chi\left(\frac{\partial g}{\partial y_1} : \frac{\partial g}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right)$$

a podle (3_3), (4)

$$x_3^2 = \chi\frac{\partial g}{\partial y_3} - x_1x_2 = \tfrac{1}{2}\chi\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right),$$

při čemž jsme položili pro stručnost

$$G \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial y_3}\right)^2 - 4\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}.$$

Tedy $x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right) :$

$$: \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} : \frac{\partial g}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right) : \left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right)$$

čili

$$x_1^2 : x_1^2 : x_3^2 = 4\left(\frac{\partial g}{\partial y_2}\right)^2 : 4\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}\right)^2 : \left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right)^2.$$

Odtud dále plyne

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varepsilon_1 \frac{\partial g}{\partial y_2} : \varepsilon_2 \frac{\partial g}{\partial y_1} : \tfrac{1}{2}\varepsilon_3 \left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right), \qquad (1.2,5)$$

kde ε_1, ε_2, ε_3 mají buďto hodnotu $+1$ nebo -1.

Hodnoty ε_1, ε_2, ε_3 v (5) určíme takto:

$(x_1 : x_2 : x_3)$ je bodem analagmatické křivky, i přejde pravá strana rovnice (5) v příbuznosti I sama v sebe. Nyní ale výrazu

$$\varepsilon_1 \frac{\partial g}{\partial y_2} \text{ odpovídá výraz } \tfrac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{\partial g}{\partial y_2}\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right),$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial g}{\partial y_1} \text{ odpovídá výraz } \tfrac{1}{2}\varepsilon_2\varepsilon_3 \frac{\partial g}{\partial y_1}\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_3\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right) \text{ odpovídá výraz } \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}$$

a poměr jejich je

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial g}{\partial y_2}\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right) : \tfrac{1}{2}\varepsilon_2\varepsilon_3 \frac{\partial g}{\partial y_1}\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \mp \sqrt{G}\right) : \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}$$

čili

$$\varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{\partial g}{\partial y_2} : \varepsilon_2\varepsilon_3 \frac{\partial g}{\partial y_1} : \tfrac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right).$$

Tedy

$$'x_1 : 'x_2 : 'x_3 = \varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{\partial g}{\partial y_2} : \varepsilon_2\varepsilon_3 \frac{\partial g}{\partial y_1} : \tfrac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right). \qquad (1.2,6)$$

Totožnost (5), (6) vyžaduje, aby

$$\varepsilon_3^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \text{ čili } \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1;$$

lze tedy volit buďto $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$, nebo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. Oba případy vedou k témuž výsledku; přidržíme se první volby.

Tím jsme došli k výsledku: Je-li

$$g(y_1, y_2, y_3) = 0$$

rovnice deferenty, jsou rovnice

$$\left.\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= \frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_1} : \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial y_3} + \sqrt{G}\right), \\ \text{kde} \qquad G &\equiv \left(\frac{\partial g}{\partial y_3}\right)^2 - 4\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}, \end{aligned}\right\} \tag{1.2,2}$$

spolu s rovnicí

buďto

$$g(y_1, y_2, y_3) = 0$$

nebo

$$h(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0$$

parametrickým vyjádřením příslušné *analagmatické křivky*. Přitom předpokládáme, že

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

a odmocninu $\sqrt{G}$ považujeme za dvojznačnou.

1.3. Tvrzení, že existují analagmatické křivky stupně vyššího než druhého, dokážeme, když vyjádříme *stupeň analagmatické křivky* stupněm její deferenty. Úvahy budeme provádět na *křivkách obecných*, to jest na křivkách, o nichž předpokládáme, že nemají žádných singulárních bodů. Případy, kdy tomu tak není, necháváme mimo rámec článku.

K tomu použijeme parametrických rovnic (1.2,2). Přímka

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \ (a_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3)$$

protne analagmatickou křivku v bodech, které jsou určeny touto rovnicí a rovnicemi (1.2,2), to jest rovnicí

$$\left(a_2\frac{\partial g}{\partial y_1} + a_1\frac{\partial g}{\partial y_2}\right)\left(a_2\frac{\partial g}{\partial y_1} + a_1\frac{\partial g}{\partial y_2} + a_3\frac{\partial g}{\partial y_3}\right) + a_3^2\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2} = 0. \tag{1.3,1}$$

K tomu přistupuje

$$g(y) = 0. \tag{1.3,2}$$

V souřadnicích y vyjadřuje rovnice (1) křivku stupně $2(n_D - 1)$, rovnice (2) křivku stupně n_D. Eliminací jedné souřadnice y_i z těchto rovnic obdržíme tedy pro poměr $y_j : y_k$ zbývajících souřadnic rovnici stupně $2(n_D - 1) \,.\, n_D$. To však je za našeho předpokladu stupeň analagmatické křivky. I máme:

Je-li n_D stupeň deferenty, je stupeň analagmatické křivky n_A obecně

$$n_A = 2n_D(n_D - 1). \qquad [1.3,1]$$

Ale $n_D(n_D - 1)$ je třída m_D deferenty; tedy také:

Je-li m_D třída deferenty, je stupeň analagmatické křivky n_A obecně

$$n_A = 2m_D,$$

tudíž rovný dvojnásobku třídy deferenty. [1.3,2]

Odtud plyne posléze: Abychom dospěli k analagmatickým křivkám stupně vyššího než druhého, musíme volit deferentu aspoň kvadratickou.

1.4. Vyšetříme nyní některé zvláštní body ležící na tečně deferenty a stanovíme jejich vzájemnou souvislost.

Buď $g(y) = 0$ rovnicí deferenty (ve smyslu odst. 1.2); její tečna v bodě (y)

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} z_2 + \frac{\partial g}{\partial y_3} z_3 = 0$$

protne spojnici příslušné inversní dvojice na analagmatické křivce (1.2,2), to jest přímku

$$\begin{vmatrix} z_1, & z_2, & z_3 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_2}, & \dfrac{\partial g}{\partial y_1}, & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y_3} + \sqrt[+]{G}\right) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_2}, & \dfrac{\partial g}{\partial y_1}, & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y_3} - \sqrt[+]{G}\right) \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} z_1 - \frac{\partial g}{\partial y_2} z_2 = 0$$

v bodě Y o souřadnicích

$$Y(z) \ldots\ z_1 : z_2 : z_3 = \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial g}{\partial y_3} : \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_3} : -2\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}. \qquad (1.4,1)$$

Táž tečna protne přímku X_1X_2 čili $z_3 = 0$ v bodě Y_3 o souřadnicích

$$Y_3 \ldots \frac{\partial g}{\partial y_2} : -\frac{\partial g}{\partial y_1} : 0; \qquad (1.4,2)$$

přímky PX_1 resp. PX_2 čili kuželosečku $z_1z_2 = 0$ protne v bodech Y_1 resp. Y_2 o souřadnicích

$$Y_1 \ldots -\frac{\partial g}{\partial y_3} : 0 : \frac{\partial g}{\partial y_1} \qquad (1.4,3)$$

resp.

$$Y_2 \ldots 0 : -\frac{\partial g}{\partial y_3} : \frac{\partial g}{\partial y_2}; \tag{1.4,4}$$

konečně řídicí kuželosečku inverse $\mathbf{K}(z_1 z_2 - z_3^2 = 0)$ protne v bodech, určených rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{z_1}{z_3} + \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{z_2}{z_3} + \frac{\partial g}{\partial y_3} &= 0 \\ \frac{z_1}{z_3}\frac{z_2}{z_3} - 1 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

z nichž plyne

$$\frac{z_1}{z_3} = \left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right) : 2\frac{\partial g}{\partial y_1}; \quad \frac{z_2}{z_3} = \left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right) : 2\frac{\partial g}{\partial y_2},$$

tedy v bodech Y_1^*, Y_2^* o souřadnicích

$$Y_1^*, Y_2^* \ldots \frac{\partial g}{\partial y_2}\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right) : \frac{\partial g}{\partial y_1}\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right) : 2\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}. \tag{1.4,5}$$

(Poznamenejme, že poměr (5) lze psát jednodušeji takto:

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_1} : \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} \pm \sqrt{G}\right);$$

nebudeme však tohoto tvaru používat.)

Bod Y_3 leží na spojnici $Y_1 Y_2$, tedy:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial g}{\partial y_2} &= \varrho_1\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3}\right) + \varrho_2 \cdot 0 \\ \varrho\left(-\frac{\partial g}{\partial y_1}\right) &= \varrho_1 \cdot 0 + \varrho_2\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3}\right) \\ \varrho \cdot 0 &= \varrho_1\frac{\partial g}{\partial y_1} + \varrho_2\frac{\partial g}{\partial y_2} \end{aligned}\right\} \quad (\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \neq 0).$$

Z obou posledních vztahů plyne

$$\varrho_1 = -\varrho\left(\frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_3}\right), \qquad \varrho_2 = +\varrho\left(\frac{\partial g}{\partial y_1} : \frac{\partial g}{\partial y_3}\right).$$

Bod harmonicky sdružený s Y_3 vzhledem k Y_1, Y_2 má tedy souřadnice

$$-\varrho\left(\frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_3}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3}\right) : -\varrho\left(\frac{\partial g}{\partial y_1} : \frac{\partial g}{\partial y_3}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3}\right) :$$

$$: -\varrho\left[\left(\frac{\partial g}{\partial y_2} : \frac{\partial g}{\partial y_3}\right)\frac{\partial g}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} : \frac{\partial g}{\partial y_3}\right)\frac{\partial g}{\partial y_2}\right]$$

čili

$$\frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial g}{\partial y_3} : \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_3} : -2\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}.$$

To však je podle (1) bod $Y(z)$.

Bod Y_3 leží také na spojnici $Y_1^* Y_2^*$; i je

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\frac{\partial g}{\partial y_2} &= \sigma_1\frac{\partial g}{\partial y_2}\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} + \underset{+}{\sqrt{G}}\right) + \sigma_2\frac{\partial g}{\partial y_2}\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} - \underset{+}{\sqrt{G}}\right)\\
\sigma\left(-\frac{\partial g}{\partial y_1}\right) &= \sigma_1\frac{\partial g}{\partial y_1}\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} + \underset{+}{\sqrt{G}}\right) + \sigma_2\frac{\partial g}{\partial y_1}\left(-\frac{\partial g}{\partial y_3} - \underset{+}{\sqrt{G}}\right)\\
\sigma \,.\, 0 &= 2(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}
\end{aligned}\right\} (\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \neq 0).$$

Z posledního vztahu plyne

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \Rightarrow -\sigma_2 = \sigma_1.$$

Bod harmonicky sdružený s Y_3 vzhledem k Y_1^*, Y_2^* má tedy souřadnice

$$-2\sigma_1\frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial g}{\partial y_3} : -2\sigma_1\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2} : 4\sigma_1\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}$$

čili

$$\frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial g}{\partial y_3} : \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_3} : -2\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2}.$$

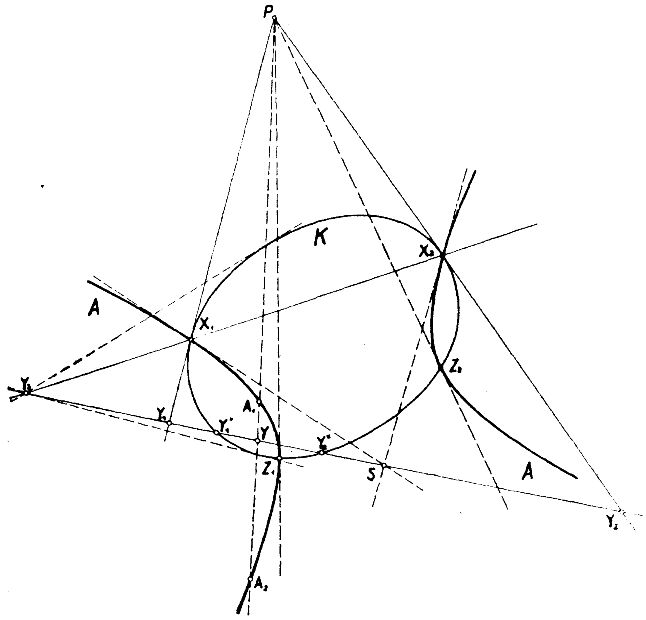
To však je podle (1) zase bod $Y(z)$.

Polára bodu Y_3 vzhledem k řídicí kuželosečce **K** je spojnice příslušné inversní dvojice na analagmatické křivce, jak se snadno přesvědčíme.

Všechny tyto okolnosti znázorňuje obr. 1.4. K jeho sestrojení poznamenejme toto: Analagmatická kuželosečka **A** je určena body X_1, X_2, libovolně zvolenou tečnou PZ_1 s bodem dotyku Z_1 na řídicí kuželosečce **K**, a další libovolně zvolenou tečnou PZ_2 (s bodem dotyku Z_2 nutně ležícím na řídicí kuželosečce); z těchto šesti prvků lze vždy vybrat nezávislé prvky v počtu potřebném pro sestrojení kuželosečky: Sestrojíme ji na příklad z těchto pěti prvků X_1, X_2, Z_1^2, Z_2; tečna v bodě Z_2 nutně prochází středem P, jak potvrzuje třeba Pascalova věta. „Středem“ analagmatické kuželosečky **A**

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_1 x_3 + \lambda_3(x_1 x_2 + x_3^2) = 0$$

rozumíme bod $(\lambda_1 : \lambda_2 : -\lambda_3)$; jestliže je $\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 \neq 0$, pak polárou tohoto bodu vzhledem ke kuželosečce **A** je přímka $x_3 = 0$ čili X_1X_2. I sestrojíme „střed“ S kuželosečky **A** jako pól přímky X_1X_2 vzhledem k této kuželosečce. Bodem S pak vedeme libovolnou přímku, kterou chceme pokládat za tečnu deferenty. Sestrojíme body Y_1, Y_2 (resp. Y_1^*, Y_2^*) a bod Y_3. Polára bodu Y_3 vzhledem ke kuželosečce **K** protne kuželosečku **A** v bodech A_1, A_2 analagmatické křivky, příslušných k zvolené tečně deferenty. Tečny analagmatické křivky v těchto bodech jsou zároveň tečny analagmatické kuželosečky **A**.



Obr. 1.4.

I.5. Budeme nyní uvažovat o bodech Y_1, Y_2 (resp. Y_1^*, Y_2^*), Y_3 a Y na tečně deferenty. Podle odst. 1.4 platí

$$(Y_1Y_2Y_3Y) = -1 \text{ resp. } (Y_1^*Y_2^*Y_3Y) = -1. \qquad (1.5,1)$$

Těmito vztahy je mezi tečnou deferenty a bodem Y, který spolu se středem P určuje přímku, na níž leží odpovídající dvojice bodů analagmatické křivky, zjednána obapolně jednoznačná příbuznost $\boldsymbol{H}$ mezi body (Y) a přímkami (tečnami deferenty), a to takto: Budiž dána jednoduchá kuželosečka **K** a bod P, který neleží na této kuželosečce. Libovolné přímce (tečně deferenty) odpovídá obecně jediný bod Y s ní incidentní a určený prvním resp. druhým vztahem (1); obráceně libovolnému bodu Y odpovídá obecně jediná přímka s ním incidentní a určená prvním resp. druhým vztahem (1). Přitom Y_1, Y_2 resp. Y_1^*, Y_2^* jsou průsečíky této přímky s tečnami vedenými z bodu P ke kuželosečce **K** resp. průsečíky této přímky s kuželosečkou **K**; bod Y_3 je průsečík této přímky s polárou bodu P vzhledem ke kuželosečce **K**.

Nazveme příbuznost $\boldsymbol{H}$ *harmonickou příbuzností*; přitom pro určující útvary této příbuznosti (kuželosečku **K** a bod P) ponecháme jejich dřívější názvy (řídicí kuželosečka resp. střed příbuznosti). V příbuznosti $\boldsymbol{H}$ odpovídají libovolné křivce Γ (deferentě), jakožto obálce tečen, body křivky $'\Gamma$, kterou nazveme *harmonická křivka ke křivce* Γ; obráceně libovolné křivce $'\Gamma$ (harmonické křivce), jakožto geometrickému místu bodů, odpovídají v obrácené příbuznosti $\boldsymbol{H}^{-1}$ tečny křivky Γ, kterou nazveme *„inversní“ harmonická křivka ke křivce* $'\Gamma$.

Je-li $g(y) = 0$ rovnice základní křivky Γ, je harmonická křivka $'\Gamma$ patrně vyjádřena rovnicemi (1.4,1)

$$\left.\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 &= \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial g}{\partial y_3} : \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_3} : -2\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2} \\ \text{a rovnicí} \qquad & \\ g(y) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.5,2}$$

parametricky; obráceně pak, známe-li harmonickou křivku $'\Gamma$ o rovnici $'g(z) = 0$, pak každý její bod $Y(z)$ jiný než P určuje spojnici PY čili $z_2y_1 - z_1y_2 = 0$, jejíž pól Y_3 vzhledem ke kuželosečce $\mathbf{K}$ má souřadnice $(-z_1 : z_2 : 0)$, takže křivka Γ bude obálkou přímek YY_3 čili

$$\left.\begin{aligned} & z_2z_3y_1 + z_1z_3y_2 - 2z_1z_2y_3 = 0 \\ & \text{takových, že mezi jejími parametry } z_1, z_2, z_3 \text{ platí vztah} \\ & 'g(z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.5,3}$$

V dalším textu budeme studovat vlastnosti příbuznosti $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{H}^{-1}$) soustavně a nezávisle na předcházejících vývodech.

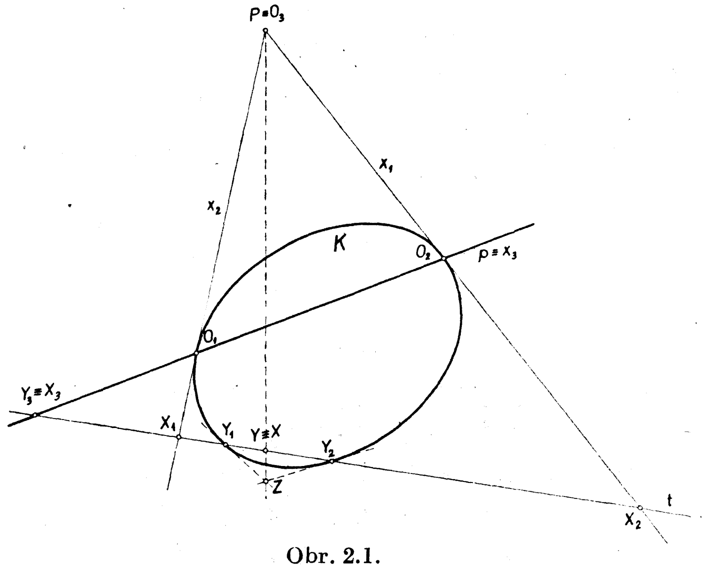
2.0. Pro studium vlastností příbuznosti $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{H}^{-1}$) je vhodné zavést poněkud jinou definici této příbuznosti, než jak jsme uvedli v odst. 1.5. Učiníme tak v odst. 2.1 a 2.2; na základě této definice podáme v odst. 2.3 a 2.4 analytické vyjádření naší příbuznosti. V odst. 2.5 stanovíme homaloidní soustavy a uvedeme jejich základní vlastnosti.

2.1. Viz obr. 2.1. Budiž dána jednoduchá kuželosečka $\mathbf{K}$ a bod P, který na této kuželosečce neleží; budiž p polára bodu P vzhledem ke kuželosečce $\mathbf{K}$ a buďtež O_1, O_2 průsečíky p s $\mathbf{K}$, to jest zároveň body dotyku tečen vedených z bodu P ke kuželosečce $\mathbf{K}$. Označme dále X_1 resp. X_2 průsečíky obecné přímky t (jakožto tečny základní křivky Γ) s tečnou PO_1 resp. PO_2; označme Y_1, Y_2 resp. Y_3 průsečíky této přímky t s kuželosečkou $\mathbf{K}$ resp. přímkou p. Bod Y s přímkou t incidentní, o němž platí

$$(Y_1Y_2Y_3Y) = -1,$$

je patrně bodem, který odpovídá přímce t v harmonické příbuznosti $\boldsymbol{H}$ s řídicí kuželosečkou $\mathbf{K}$ a středem příbuznosti P.

Uvažujme nyní svazek — řadu kuželoseček, určený tečnami PO_1, PO_2 s body dotyku O_1, O_2. Použitím Desarguesovy věty na tento svazek — řadu poznáváme: Obecná přímka protne kuželosečku $\mathbf{K}$ výše zmíněné soustavy a dvě její tečny PO_1, PO_2 ve dvou dvojicích involuce Y_1, Y_2



Obr. 2.1.

a X_1, X_2, jejímž jedním samodružným bodem je průsečík $Y_3 \equiv X_3$ spojnice bodů dotyku O_1, O_2 obou tečen s touto přímkou. Tudíž druhým samodružným bodem je bod $Y \equiv X$ takový, že platí

$$(Y_1Y_2Y_3Y) = (X_1X_2X_3X) = -1,$$

přitom $X_3 \equiv Y_3$, $X \equiv Y$.

V harmonické příbuznosti $\boldsymbol{H}$ (s určujícími útvary **K**, P resp. p) lze tudíž vždycky nahradit kuželosečku **K** dvěma přímkami, totiž tečnami k ní sestrojenými v jejich průsečících s přímkou p. Namísto určujících útvarů **K**, p nastoupí pak tři přímky; označíme-li je $O_2P \equiv x_1$, $O_1P \equiv x_2$, $O_1O_2 \equiv x_3$, můžeme příbuznost $\boldsymbol{H}$ definovati takto:

V harmonické příbuznosti **H**, *určené trojstranem přímek* x_1, x_2, x_3, *neprocházejících společným bodem, je obecné přímce (jakožto tečně základní křivky* Γ*), jež protíná tři uvedené přímky po řadě v bodech* Y_1, Y_2, Y_3, *přiřazen bod* Y *s ní incidentní, a to tak, že platí*

$$(Y_1Y_2Y_3Y) = 1. \qquad [2.1,1_1]$$

Geometrickým místem bodů Y, jestliže daná přímka se stává všemi tečnami křivky Γ, je harmonická křivka $'\Gamma$.

A obráceně můžeme příbuznost $\boldsymbol{H}^{-1}$ definovati takto:

Obecnému bodu Y *(jakožto bodu „inversně" harmonické křivky* $'\Gamma$*) je v příbuznosti* $\boldsymbol{H}^{-1}$ *přiřazena přímka s ním incidentní, a to tak, že o jejích průsečících* Y_1, Y_2, Y_3 *s přímkami* x_1, x_2, x_3 *platí*

$$(Y_1Y_2Y_3Y) = -1. \qquad [2,1.1_2]$$

Probíhá-li daný bod všemi body křivky $'\Gamma$, obalují všechny tyto přímky základní křivku Γ.

2.2. Konstrukce bodu Y, který v příbuznosti $\boldsymbol{H}$ odpovídá přímce $\boldsymbol{t}$ (pomocí bodu Z) je patrna z obr. 2.1.

Pokud se týká *obrácené konstrukce*, která v příbuznosti $\boldsymbol{H}^{-1}$ přiřazuje bodu Y odpovídající incidentní přímku, je tato: Bod Y spojíme s průsečíkem P přímek x_1, x_2; průsečíkem O_2 přímek x_1, x_3 vedeme rovnoběžku s touto spojnicí; rozpůlíme bodem $\overline{Y}_3$ její úsek mezi přímkami x_1, x_3; spojíme bod P s bodem $\overline{Y}_3$; průsečík této spojnice s přímkou x_3 je bod Y_3, jímž prochází odpovídající přímka. Potvrzení této konstrukce (v obrázku vyznačena už není) opomíjíme.

2.3. Podáme *analytické vyjádření* příbuznosti $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{H}^{-1}$) na základě definice [2.1,1$_1$,1$_2$].

Trojstran přímek x_1, x_2, x_3 zvolme za trojstran souřadnic. I bude $x_i = 0$ rovnice přímky x_i, dvě přímky $x_j = 0$, $x_k = 0$ protnou se v bodě O_i ($x_i = 1$, $x_j = x_k = 0$; $i, j, k = 1, 2, 3$; $i \neq j \neq k \neq i$). Obecná přímka

$$\sum_i \xi_i x_i = 0$$

protne přímky

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0$$

v bodech

$$Y_1(0; -\xi_3; \xi_2), \ Y_2(-\xi_3; 0; \xi_1), \ Y_3(-\xi_2; \xi_1; 0).$$

Souřadnice bodu Y_3 lze také vyjádřiti takto:

$$\left.\begin{aligned} \varrho(-\xi_2) &= \lambda \, . \, 0 + \mu(-\xi_3) \\ \varrho\xi_1 &= \lambda(-\xi_3) + \mu \, . \, 0 \\ \varrho \, . \, 0 &= \lambda\xi_2 + \mu\xi_1 \end{aligned}\right\} \ (\varrho \neq 0);$$

je tedy

$$\lambda = -\varrho\frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \mu = \varrho\frac{\xi_2}{\xi_3}.$$

Jsou tedy souřadnice $('x_1; 'x_2; 'x_3)$ bodu Y vyjádřeny rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \sigma'x_1 &= \lambda \, . \, 0 - \mu(-\xi_3) \\ \sigma'x_2 &= \lambda\,(-\xi_3) - \mu \, . \, 0 \\ \sigma'x_3 &= \lambda\xi_{32} - \mu\xi_1 \end{aligned}\right\} \ (\sigma \neq 0);$$

po dosazení za λ, μ:

$$'x_1 : 'x_2 : 'x_3 = \xi_2\xi_3 : \xi_1\xi_3 : -2\xi_1\xi_2. \tag{2.3,1}$$

Rovnicemi (1) je přímce $[\xi]$ přiřazen obecně jediný bod $('x)$ s ní incidentní.

Obrácením rovnic (1) obdržíme

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 'x_2'x_3 : 'x_1'x_3 : -2'x_1'x_2; \tag{2.3,2}$$

bodu $('x)$ je přiřazena obecně jediná přímka $[\xi]$ s ním incidentní.

Tedy:

Harmonická příbuznost je biracionální příbuznost mezi přímkou $[\xi]$ *a bodem incidentními, která (při naší volbě soustavy souřadnic) je vyjádřena rovnicemi* (1), (2) [2.3,1]

2.4. Rovnice (2.3,1,2) nalezli jsme za předpokladu, že tři přímky x_i nejdou společným bodem.

Jestliže však tyto přímky náleží svazku a jsou-li jejich rovnice

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ k_1x_1 + k_2x_2 = 0\ \ (k_1, k_2 \neq 0),$$

tu přímce $[\xi]$ je opět přiřazen obecně jediný bod $('x)$ s ní incidentní

$$'x_1 : 'x_2 : 'x_3 = k_2\xi_3 : k_1\xi_3 : -(k_2\xi_1 + k_1\xi_2);$$

obráceně však každá přímka jdoucí obecným bodem $('x)$ vytvoří s tímto bodem a svými průsečíky s přímkami x_i čtveřiny téže hodnoty dvojpoměru $-\frac{k_2\,'x_2}{k_1\,'x_1}$. Harmonická příbuznost se redukuje na případ *singulární korelace.*

Harmonická příbuznost bude ovšem singulární i v těch případech, kdy přímka x_3 splyne s některou z přímek x_1 resp. x_2, nebo jestliže splynou všechny tyto přímky.

Vyšetřování těchto zvláštních případů však opomíjíme.

2.5. Nechť přímka $[\xi]$ se otáčí kolem bodu (x), který neleží na žádné přímce základního trojstranu. Takto vzniklému svazku

$$\sum_i x_i\xi_i = 0$$

odpovídá podle rovnic (2.3,2) kuželosečka

$$x_1\,'x_2\,'x_3 + x_2\,'x_1\,'x_3 - 2x_3\,'x_1\,'x_2 = 0.$$

Věta:

Svazku přímek odpovídá v harmonické příbuznosti H kuželosečka obsahující střed svazku a vrcholy základního trojstranu. Tečny této kuželosečky v bodech O_1, O_2 protínají se v bodě, který je kolineární se středem svazku a s vrcholem P základního trojstranu. [2.5,1]

Leží-li bod (x) na některé přímce základního trojstranu nebo splývá-li s některým jeho vrcholem, odpovídající kuželosečka se rozpadá. Lze snadno nalézt věty, které odpovídají těmto zvláštním polohám středu svazku.

Nechť bod $('x)$ probíhá přímku $['\xi]$, jež neprochází žádným vrcholem základního trojstranu. Bodové řadě

$$\sum_i {'\xi_i}\,'x_i = 0$$

podle rovnic (2.3,1) odpovídá kuželosečka

$$'\xi_1\xi_2\xi_3 + '\xi_2\xi_1\xi_3 - 2'\xi_3\xi_1\xi_2 = 0.$$

Věta (duální k větě [1]):

Přímé řadě bodové odpovídá v „inversní" harmonické příbuznosti $\mathbf{H}^{-1}$ *kuželosečka dotýkající se dané přímky (nositelky řady) a stran základního trojstranu. Přímka spojující body dotyku této kuželosečky se stranami* O_1O_3, O_2O_3 *protíná danou přímku v jejím průsečíku se stranou* O_1O_2 *základního trojstranu.* [2.5,2]

Prochází-li přímka $['\xi]$ některým vrcholem základního trojstranu nebo splývá-li s některou jeho stranou, odpovídající kuželosečka se rozpadá; příslušné věty lze snadno nalézt.

Podržme název *homaloidní soustava,* používaný v theorii birracionálních bodových transformací, i pro naše úvahy, a sice v tomto smyslu: homaloidní soustavou budeme rozumět útvar, který odpovídá jednou všem přímkám, po druhé všem bodům v rovině.

Vzhledem k větám [1], [2] lze tedy říci o homaloidních soustavách naší příbuznosti toto:

Jednu soustavu homaloidních čar tvoří síť kuželoseček, které obsahují vrcholy základního trojstranu, druhou soustavu tvoří útvar duální, to jest soustava kuželoseček, které se dotýkají stran základního trojstranu. *Jacobiho křivka* první sítě má rovnici

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial' x_1}(x'_2{}'x_3), & \frac{\partial}{\partial' x_2}('x_2{}'x_3), & \frac{\partial}{\partial' x_3}('x_2{}'x_3) \\ \frac{\partial}{\partial' x_1}('x_1{}'x_3), & \frac{\partial}{\partial' x_2}('x_1{}'x_3), & \frac{\partial}{\partial' x_3}('x_1{}'x_3) \\ \frac{\partial}{\partial' x_1}(-2'x_1{}'x_2), & \frac{\partial}{\partial' x_2}(-2'x_1{}'x_2), & \frac{\partial}{\partial' x_3}(-2'x_1{}'x_2) \end{vmatrix} = 0$$

čili $'x_1{}'x_2{}'x_3 = 0$ neboli $'x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$; jsou to strany základního trojstranu. Jacobiho křivka druhé sítě je (duálně) $\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$ neboli $\xi_i = 0,\ i = 1, 2, 3$; jsou to vrcholy základního trojstranu.