

Karel Mišoň

Stanovení Bernoulliho čísel. Součet aritmetické posloupnosti bez užití diferenčních posloupností

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 199--200

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117011>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1951

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

STANOVENÍ BERNOULLIHO ČÍSEL

Součet aritmetické posloupnosti bez užití diferenčních posloupností.

KAREL MIŠOŇ, Most.

(Došlo dne 11. X. 1950.)

Článek obsahuje jednoduché vztahy pro součet k členů aritmetické posloupnosti p -ho stupně a rovnice pro Bernoulliho čísla.

Definujeme-li

$$F(p, x) = \sum_{n=0}^{x-1} n^p, \quad (1)$$

platí pro F rekurentně

$$F(p, x + 1) = F(p, x) + x^p. \quad (2)$$

Uvažujíc tento vztah pišme

$$\varphi(p, x + 1) = \varphi(p, x) + x^p, \quad (3)$$

neboť každá funkce splňující napsanou rekurentní formuli nemusí být totožna se zavedenou F (additivní konstanta!).

Klademe-li

$$\varphi(p, x) = \sum_{j=0}^{p+1} s_j x^j, \quad (4)$$

poskytuje (3)

$$\sum_{j=0}^{p+1} s_j (x + 1)^j = \sum_{j=0}^{p+1} s_j x^j + x^p.$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách x plyne:

$$\begin{aligned} \binom{p+1}{1} s_{p+1} &= 1, \\ \binom{p+1}{2} s_{p+1} + \binom{p}{1} s_p &= 0, \\ \binom{p+1}{3} s_{p+1} + \binom{p}{2} s_p + \binom{p-1}{1} s_{p-1} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots \\ \binom{p+1}{p+1} s_{p+1} + \binom{p}{p} s_p + \binom{p-1}{p-1} s_{p-1} + \dots + \binom{3}{3} s_3 + \binom{2}{2} s_2 + \\ + \binom{1}{1} s_1 = 0, \end{aligned}$$

což je soustava pro $s_j, j = 1, 2, \dots, p+1$ (s nenulovým determinan-tem) řešitelná. Její kořeny dosazeny do (4) dávají (s libovolným s_0) $\varphi(p, x)$ hovičí (3). Má-li býti $\varphi(p, x) \equiv F(p, x)$, musí nutně $s_0 = 0$, jak plyne z (1) pro $x = 1$ vzhledem k poslední z rovnic (5). To ale také stačí, neboť pak $\varphi(p, x) \equiv F(p, x)$ pro $x = 1$ a indukci z (3) pro každé přirozené x .

Tím je $\sum_{n=0}^{x-1} n^p$ stanoveno.

Jak známo je s_1 Bernoulliho číslo přiřazené k (1) a tedy (5) podává možnost vypočítati libovolné z Bernoulliho čísel, aniž by bylo třeba počítat jiná (jak je tomu u Moivreovy formule pro Bernoulliho čísla — srv. PETER, Počet diferenciální, odst. 159, str. 244—245).

Aplikujeme-li předchozí postup na obecnou aritmetickou posloup-
nost p -ho stupně s obecným členem

$$i_n = \sum_{j=0}^p a_j n^j, \quad a_p \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

dostaneme pro součet jejích k členů

$$\sum_{n=1}^k i_n = \sum_{j=0}^{p+1} s_j k^j,$$

kde $s_0 = a_0$ a s_1, s_2, \dots, s_{p+1} jsou řešením soustavy:

$$\begin{aligned} \binom{p+1}{1} s_{p+1} &= a_p, \\ \binom{p+1}{2} s_{p+1} + \binom{p}{1} s_p &= \binom{p}{1} a_p + a_{p-1}, \\ \binom{p+1}{3} s_{p+1} + \binom{p}{2} s_p + \binom{p-1}{1} s_{p-1} &= \binom{p}{2} a_p + \binom{p-1}{1} a_{p-1} + a_{p-2}, \\ \dots\dots\dots \\ \binom{p+1}{p+1} s_{p+1} + \binom{p}{p} s_p + \binom{p-1}{p-1} s_{p-1} + \dots + \binom{1}{1} s_1 &= \binom{p}{p} a_2 + \\ &+ \binom{p-1}{p-1} a_{p-1} + \binom{p-2}{p-2} a_{p-2} + \dots + \binom{1}{1} a_1. \end{aligned}$$