Andrei Nikolajevič Kolmogorov
K základům theorie reálných čísel

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 155--157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117005

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

*Vydává Ústředí výzkumu a technického rozvoje * Ústřední ústav matematický*

SVAZEK 76 • PRAHA, 15. II. 1951 • ČÍSLO 3

REFERÁTY A ČLÁNKY

O ZÁKLADECH ANALYSY

Uveřejňujeme pod tímto společným názvem dva články (v překladu Dr *Miroslava Katětova*), které byly publikovány r. 1946 a 1949 v časopise *Uspěchi matematičeskich nauk*. Oba články ukazují na nové methody výstavby základů analysy, t. j. v podstatě theorie reálných čísel. Zatím co velmi stručný článek *Kolmogorovův* obsahuje jen náčrtek jednoho způsobu této výstavby, dosti podrobný článek *Chinčinův**) se zabývá též obecnými methodologickými otázkami.

K ZÁKLADŮM THEORIE REÁLNÝCH ČÍSEL

A. N. KOLMOGOROV.

Při vybudování theorie reálných čísel se obvykle předpokládá, že theorie racionálních čísel je již vybudována. Lze též postupovat jinak a zavést reálná čísla hned po číslech celých. Způsob takovéto výstavby základů theorie reálných čísel, který v dalším uvádíme, není nic jiného než moderní formalisované podání euklidovské theorie poměrů. Abychom dosáhli největší jednoduchosti a přiblížili se co nejvíce euklidovské výstavbě, budujeme soustavu *kladných* reálných čísel. Připojit k ní nulu a záporná reálná čísla můžeme známým obvyklým způsobem.

Předpokládáme jako známá pouze *nezáporná celá čísla*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

a značíme je malými latinskými písmeny. Tato čísla s výjimkou *nuly* nazýváme přirozenými. Jestliže m je nezáporné celé číslo, n je číslo přirozené, pak symbol

$$\left[\frac{m}{n}\right]$$

*) Je možné, že názory, vyslovené v Chinčinově stati, nedojdou všeobecného souhlasu; v každém případě však ukazují oba články, že otázka základů analysy není nikterak uzavřenou a odbytou kapitolou. Redakce vřele uvítá diskusní příspěvky čtenářů k těmto problémům. Při překladu byly opraveny některé tiskové chyby.

značí neúplný podíl při dělení m číslem n, t. j. největší celé číslo k, pro něž

$$kn \leqq m.$$

Definice 1. Kladným reálným číslem nazveme jednoznačnou funkci

$$m = \varphi(n)$$

definovanou pro všechna přirozená n, jejíž hodnoty jsou nezáporná celá čísla m a která má tyto vlastnosti:

1. pro všechna přirozená k

$$\varphi(n) = \left[\frac{\varphi(kn)}{k}\right];$$

2. pro libovolné přirozené n existuje takové přirozené k, že

$$\varphi(kn) > k\varphi(n).$$

Kladná reálná čísla budeme značit malými řeckými písmeny, množinu všech kladných reálných čísel písmenem Φ. Relace uspořádání a operace sčítání a násobení se zavedou do Φ pomocí těchto definicí:

Definice 2. $\varphi < \psi$ znamená, že existuje takové přirozené n, že

$$\varphi(n) < \psi(n)$$

Definice 3. $\varphi + \psi = \chi$ značí, že pro všechna přirozená n

$$\chi(n) = \max_k \left[\frac{\varphi(kn) + \psi(kn)}{k}\right],$$

kde k probíhá všechna přirozená čísla.

Definice 4. $\varphi \,.\, \psi = \chi$ znamená, že pro všechna přirozená n

$$\chi(n) = \max_{k,\,k'} \left[\frac{\varphi(kn) \,.\, \psi(k'n)}{k \,.\, k' \,.\, n}\right],$$

kde k a k' probíhají všechna přirozená čísla.

Úloha, kterou předkládáme čtenářům,[1]) spočívá v důkazu toho, že množina Φ s relací uspořádání a operacemi sčítání a násobení, jež jsme právě definovali, má skutečně všechny vlastnosti obvyklých kladných reálných čísel (t. j. je isomorfní se soustavou kladných reálných čísel, zavedených libovolným jiným běžným způsobem).

Poznámka 1. Pro libovolné přirozené r funkce

$$\varphi_r(n) = nr - 1$$

---

[1]) Článek byl uveřejněn v části, nadepsané „Matematická problematika" (pozn. překl.).

splňuje podmínky definice 1, t. j. je, podle naší koncepce, kladným reálným číslem.*)

Je nasnadě, že identifikujeme toto „číslo" φ_r s přirozeným číslem r. Při této úmluvě je soustava Φ *rozšířením* soustavy přirozených čísel.

Poznámka 2. Když připojíme k Φ nulu a umluvíme se, že také pro všechna φ z Φ jest

$$0 + 0 = 0,\ 0 . 0 = 0,$$
$$0 < \varphi,$$
$$\varphi + 0 = 0 + \varphi = \varphi,$$
$$\varphi . 0 = 0 . \varphi = 0,$$

pak dostaneme soustavu Φ' nezáporných reálných čísel. Podle úmluvy v poznámce 1 obsahuje Φ' jako část množinu všech nezáporných celých čísel. Je zcela přirozené, když nyní pro libovolné φ z Φ' definujeme, že $[\varphi]$, t. j. celistvá část φ, se rovná největšímu celému číslu m takovému, že

$$m \leqq \varphi.$$

Poznámka 3. Jestliže definujeme ve Φ' dělení jako operaci inversní k násobení, pak lze ukázat, že pro libovolné nezáporné celé m a přirozené n (pojímané jako prvky množiny Φ') výsledek dvou operací — dělení a určení celistvé části

$$\left[\frac{m}{n}\right]$$

je totožné s neúplným podílem, definovaným přímo.

Poznámka 4. Konečně lze dokázat, že pro libovolné φ z Φ.

$$\varphi(n) = n\varphi - 1, \text{ je-li } n\varphi \text{ celé,}$$
$$\varphi(n) = [n\varphi], \text{ není-li } n\varphi \text{ celé.}$$

Ukazuje se tedy, že $\varphi(n)$ *je nakonec prostě největší celé číslo* m, *pro něž*

$$\frac{m}{n} < \varphi.$$

Při formálním podání nového způsobu *výstavby* soustavy reálných čísel objeví se toto tvrzení nutně jen jako konečný článek dlouhého řetězu definicí a jejich důsledků. Je však ovšem východiskem pro porozumění *myšlenky* této výstavby.

Uspěchi matematičeskich nauk,
sv. I, seš. 1 (11), s. 217—219 (r. 1946).

---

*) Čtenář snadno zjistí, že funkce $F_r(n) = rn$ nesplňuje podmínku (2) a proto nepatří do množiny Φ.