Časopis pro pěstování matematiky

František Nožička

Věta o supremu a věty s ní ekvivalentní

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 2, 121--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117001

VĚTA O SUPREMU A VĚTY S NÍ EKVIVALENTNÍ

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Došlo 31. října 1950.)

V článku se dokazuje, že čtyři důležité věty matematické analysy jsou rovnocenné. Vycházíme-li z kterékoli z nich, lze zbývající tři na jejím základě dokázat.

Budeme uvažovat čtyři velmi důležité věty z elementární matematické analysy. Ukážeme, že každou z nich lze pokládat za fundamentální. Vezmeme-li totiž jednu z nich, potom lze zbývající tři na základě této věty dokázat. Jde o tyto věty:[1])

I. Věta o existenci horní (dolní) hranice neprázdné shora omezené (zdola omezené) množiny číselné.

II. Věta o existenci limity monotonní ohraničené posloupnosti.

III. Bolzano-Cauchyova podmínka pro limitu posloupnosti.

IV. Věta o existenci hromadného bodu omezené nekonečné množiny.

Znění vět I až IV v uvedeném pořadí jest:

I. *Budiž $\mathfrak{M}$ neprázdná shora (zdola) omezená množina číselná. Potom existuje jedno a jen jedno číslo G (g) takové, že platí:*

(a) Pro všechny prvky $x \in \mathfrak{M}$ je $x \leqq G$ ($x \geqq g$).

(b) Je-li c jakékoliv číslo menší než G (větší než g), potom existuje aspoň jeden prvek $\bar{x} \in \mathfrak{M}$ tak, že

$$c < \bar{x} \leqq G \quad (c > \bar{x} \geqq g).$$

Číslo G (g) nazýváme pak *horní hranicí* (*dolní hranicí*) množiny $\mathfrak{M}$ nebo též *supremem* (*infimem*) množiny $\mathfrak{M}$ a značíme $\sup \mathfrak{M}$ ($\inf \mathfrak{M}$).

II. *Monotonní posloupnost je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li omezená.*

III. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby posloupnost číselná $\{a_n\}$ měla vlastní limitu, jest: k libovolně zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že platí*

[1]) V uvedených větách se jedná pouze o množiny eventuálně posloupnost reálných čísel.

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$
pro všechna $m, n > n_0$.

IV. *Každá nekonečná množina číselná má aspoň jeden hromadný bod.*

V dalším provedeme důkazy jednotlivých shora citovaných vět za předpokladu znalosti jedné jediné z nich. Pro stručnost bude symbol $a \Rightarrow b$ ($a, b =$ I, II, III, IV) znamenat důkaz věty b na základě platnosti věty a. Tak na př. II $\Rightarrow$ IV značí důkaz věty IV na základě věty II. Jde tedy celkem o 12 důkazů, které v dalším podáváme a to tak, že methody v prvních 8 důkazech jsou v podstatě odlišné, ve zbývajících 4 důkazech pak analogické důkazům 1 až 8.

Poznámka. V dalším půjde tedy o bezprostřední důkazy jedné věty na základě druhé. Pro důkaz ekvivalence vět I, II, III, IV by jistě stačil cyklus důkazů I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III $\Rightarrow$ IV $\Rightarrow$ I. Účelem článku je však seznámiti čtenáře s běžnými důkazy elementární analysy a osvětliti basi, na níž buduje elementární analysa.

1. I $\Rightarrow$ II.

Máme dokázat větu o existenci limity omezené monotonní posloupnosti (t. j. větu II) na základě věty o existenci suprema (infima) neprázdné shora (zdola) omezené množiny (t. j. z věty I).

Nutnost podmínky věty II dokážeme velmi snadno. Budiž tedy $\{a_n\}$ monotonní konvergentní posloupnost. Označme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zvolíme-li nyní na př. $\varepsilon = 1$, potom z definice limity posloupnosti plyne existence přirozeného čísla n_1 takového, že platí
$$a - 1 < a_n < a + 1$$
pro všechna $n > n_1$. Položme
$$K = \max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a + 1), \quad k = \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a - 1).$$
Potom platí pro všechna přirozená čísla n vůbec
$$k \leqq a_n \leqq K,$$
t. j. posloupnost $\{a_n\}$ je omezená.[2])

Nyní dokážeme postačitelnost podmínky věty II, t. j. dokážeme, že každá monotonní omezená posloupnost je konvergentní. Vezmeme v úvahu neklesající posloupnost $\{a_n\}$ shora omezenou. Pro členy této posloupnosti platí tedy
$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \tag{1,1}$$
Ježto posloupnost $\{a_n\}$ je dle předpokladu shora omezená, existuje jistě číslo C tak, že platí pro všechna přirozená čísla n
$$a_n < C.$$

[2]) **To platí pro každou konvergentní posloupnost (nejen monotonní).**

Členové posloupnosti $\{a_n\}$ tvoří tedy neprázdnou shora omezenou množinu. Podle věty I (t. j. věty o existenci suprema) existuje

$$\sup\{a_n\} = s$$

těchto vlastností:

a) pro všechna přirozená n je $a_n \leqq s$; (1,2)

b) k libovolně zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ existuje v posloupnosti $\{a_n\}$ člen a_p tak, že $s \geqq a_p > s - \varepsilon$.

Podle předpokladu je posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, t. j. platí (1,1). Ze vztahů (1,1), (1,2) plyne pak ihned

$$s + \varepsilon > a_n > s - \varepsilon$$

pro všechna $n \geqq p$, t. j. $|a_n - s| < \varepsilon$ pro všechna $n \geqq p$. Tedy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$; posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní.

Poznámka. Kdybychom vycházeli z předpokladu, že daná posloupnost je nerostoucí zdola omezená, pak by důkaz postačitelnosti podmínky věty II probíhal obdobně. Zde bychom užili ovšem věty o existenci infima.

2. I $\Rightarrow$ III.

Máme dokázat nutnost a postačitelnost Bolzano-Cauchyovy podmínky (t. j. větu III) z věty o existenci suprema (infima), tedy z věty I.

Nutnost podmínky věty III dokážeme snadno. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, t. j. že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Potom, zvolíme-li $\varepsilon > 0$ jakkoliv, plyne z definice limity existence indexu n_0 tak, že platí

$$|a_n - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,\ |a_m - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ pro všechna } n, m > n_0$$

a tedy

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leqq |a_m - a| + |a_n - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

pro všechna $n, m > n_0$.

Důkaz postačitelnosti podmínky věty III je poněkud komplikovanější. My si jej rozdělíme na čtyři kroky: A), B), C), D).

Předpokládejme tedy — pro důkaz postačitelnosti podmínky věty III — že pro danou posloupnost $\{a_n\}$ platí: je-li $\varepsilon > 0$ jakkoliv zvolené, potom existuje index n_0 tak, že platí

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ pro všechna } n, m > n_0. \tag{2,1}$$

Tvrdíme především, že

A) *Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená.* Abychom dokázali toto tvrzení, zvolme si zcela pevně $\varepsilon > 0$ (libovolně). Předpoklad (2,1) můžeme též psát ve tvaru

$$a_n - \varepsilon < a_m < a_n + \varepsilon \text{ pro všechna } n, m > n_0.$$

Mysleme si nějaké pevné n větší než n_0 a položme

$$k = \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a_n - \varepsilon),$$
$$K = \max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a_n + \varepsilon).$$

Potom pro všechna přirozená m platí

$$k \leqq a_m \leqq K, \tag{2,2}$$

čímž je tvrzení A) dokázáno.

B) Uvažujme posloupnosti

$$\begin{array}{ll} (p_1) & a_1, a_2, a_3, \ldots \\ (p_2) & \quad a_2, a_3, \ldots \\ (p_3) & \qquad a_3, a_4, \ldots \\ \ldots & \qquad \ldots \\ (p_n) & \qquad\qquad a_n, a_{n+1}, \ldots \\ \ldots & \\ \text{atd.} & \end{array}$$

Je zřejmě p_2 částečnou posloupností posloupnosti p_1, p_3 částečnou posloupností posloupnosti p_2, atd., p_n částečnou posloupností posloupnosti p_{n-1}, atd. To vyznačíme symbolicky

$$p_1 \supset p_2 \supset p_3 \supset \ldots \supset p_{n-1} \supset p_n \supset \ldots \tag{2,3}$$

Ježto posloupnost p_1 je — dle tvrzení A) — omezená, plyne odtud ihned,[3]) že všechny posloupnosti $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n, \ldots$ jsou omezené. Členy každé z posloupností $p_1, p_2, \ldots$ představují tedy neprázdnou omezenou množinu a můžeme tedy na každou z nich aplikovat větu I, t. j. větu v existenci suprema resp. infima. Podle této existenční věty existuje pro každou posloupnost p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ supremum H_n a infimum h_n. Tedy

$$H_n = \text{supremum posloupnosti } p_n \ (n = 1, 2, \ldots), \tag{2,4}$$
$$h_n = \text{infimum posloupnosti } p_n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Ježto je, podle (2,3), $p_n \supset p_{n+1}$, plyne odtud ihned, že

$$h_n \leqq h_{n+1},\ H_n \geqq H_{n+1} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Dostáváme tak dvě monotonní posloupnosti.

$$h_1 \leqq h_2 \leqq h_3 \leqq \ldots \leqq h_n \leqq \ldots, \tag{2,5a}$$
$$H_1 \geqq H_2 \geqq H_3 \geqq \ldots \geqq H_n \geqq \ldots \tag{2,5b}$$

Tyto dvě posloupnosti jsou omezené. Je totiž pro každé přirozené n, jak snadno nahlédneme z (2,5a), (2,5b) a uvědomíme-li si definici suprema a infima,

$$h_1 \leqq h_n \leqq H_n \leqq H_1. \tag{2,6}$$

[3]) Viz (2,2), (2,3).

Neklesající posloupnost (2,5a) je tedy podle (2,6) omezená též shora. Můžeme na množinu členů této posloupnosti aplikovat tedy větu I o existenci suprema. Existuje tedy číslo h takové, že

$$h = \text{supremum } \{h_n\}. \tag{2,7a}$$

Z podobných důvodů existuje číslo H takové, že

$$H = \text{infimum } \{H_n\}. \tag{2,7b}$$

C) Dokážeme nyní, že $h = H$. Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme nejdříve

α) $h > H$, t. j. $h - H > 0$.

Ježto h je podle (2,7a) supremum množiny členů posloupnosti (2,5a) a ježto, podle předpokladu, je $H < h$, existuje v posloupnosti (2,5a) jistě člen h_n tak, že $h_n > H$. Vezměme si takový člen h_n. Ježto H je podle (2,7b) infimum množiny členů posloupnosti (2,5b) a $h_n > H$, existuje v posloupnosti (2,5b) jistě člen H_m tak, že $H_m < h_n$. Zvolme nyní index p tak, že $p > n$, $p > m$. Potom je vzhledem k (2,5a), (2,5b) $h_p \geqq h_n > > H_m \geqq H_p$ a tedy $h_p > H_p$, což je spor s (2,6). Není tedy $h > H$. Předpokládejme tedy

β) $H > h$, t. j. $H - h > 0$.

Zvolme $\varepsilon = \dfrac{H - h}{3} > 0$. Poněvadž předpokládáme platnost Bolzano-Cauchyovy podmínky, existuje index N_0 tak, že

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \text{ pro všechna } n, m > N_0. \tag{2,8}$$

Uvažujme posloupnost p_{N_0+1}. Ježto H_{N_0+1} je supremum, h_{N_0+1} infimum množiny členů této posloupnosti, existuje jistě v této posloupnosti člen $a_{m_0} > H_{N_0+1} - \varepsilon$ a člen $a_{n_0} < h_{N_0+1} + \varepsilon$; odtud plyne, že

$$a_{m_0} - a_{n_0} > H_{N_0+1} - h_{N_0+1} - 2\varepsilon \geqq H - h - 2\varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon \tag{2,9}$$

(neboť vzhledem k (2,7a), (2,7b) je $H \leqq H_{N_0+1}$, $h \geqq h_{N_0+1}$). Ale oba indexy m_0, n_0 jsou aspoň rovny $N_0 + 1$ (neboť a_{m_0}, a_{n_0} byly vybrány z posloupnosti p_{N_0+1}) tedy větší než N_0), takže podle (2,8) platí $|a_{m_0} - a_{n_0}| < < \varepsilon$; ale to je spor s (2,9). Není tedy ani předpoklad $H > h$ správný. Zbývá tedy poslední možnost

$$H = h, \tag{2,10}$$

což jsme chtěli dokázat.

D) Nyní již snadno dokážeme postačitelnost podmínky věty III. Vzhledem k (2,10) zaveďme označení

$$a = h = H. \tag{2,11}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Ježto a je supremum množiny členů neklesající posloupnosti (2,5a) a infimum množiny členů nerostoucí posloupnosti (2,5b), existují indexy M_1, M_2 tak, že

$$a - \varepsilon < h_{M_1} \leqq a, \qquad (2,12)$$
$$a + \varepsilon > H_{M_2} \geqq a.$$

Zvolme $M_0 = \max(M_1, M_2)$. Je-li $n > M_0$, je a_n obsaženo jak v posloupnosti p_{M_1} (a tedy $a_n \geqq h_{M_1}$) tak v posloupnosti p_{M_2} (a tedy $a_n \leqq H_{M_2}$), takže z (2,12) plyne:

pro každé $n > M_0$ je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, čímž je důkaz hotov.

3. I $\Rightarrow$ IV.

Máme dokázat větu o existenci hromadného bodu omezené nekonečné množiny (tedy větu IV) z věty o existenci suprema (infima) (t. j. z věty I).

Budiž tedy $\mathfrak{M}$ daná nekonečná a omezená množina. Existuje tedy jistě číslo $c > 0$ tak, že $\mathfrak{M} \subset \langle -c, c\rangle$ (t. j. $\mathfrak{M}$ je částí intervalu $\langle -c, c\rangle$). Interval $I_0 \equiv \langle -c, c\rangle$ rozpůlíme. Nechť I_1 je polovina intervalu I_0 a to taková, že průnik $\mathfrak{M} . I_1$ je nekonečná množina. Jestliže při půlení intervalů I_0 obsahují oba dva nově vzniklé intervaly nekonečně mnoho prvků množiny $\mathfrak{M}$, pak vezměme levý z těchto intervalů (a ten označme I_1). Interval I_1 opět rozpůlíme. Z nově vzniklých intervalů vybereme opět ten interval I_2, pro nějž průnik $\mathfrak{M} . I_2$ je nekonečná množina. Kdyby oba ze vzniklých intervalů měly tu vlastnost, pak vybereme opět levý interval. Tak postupujeme dále. Dostáváme tak posloupnost do sebe zařazených intervalů

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \qquad (3,1)$$

takových, že pro každé přirozené n je průnik $\mathfrak{M} . I_n$ nekonečnou množinou. Označme A_n počáteční bod, B_n koncový bod intervalu I_n. Je zřejmě

$$A_n < B_n \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots \qquad (3,2)$$

Z (3,1) usoudíme ihned

$$A_0 \leqq A_1 \leqq A_2 \leqq \dots \leqq A_n \leqq \dots, \qquad (3,3a)$$
$$B_0 \geqq B_1 \geqq B_2 \geqq \dots \geqq B_n \geqq \dots \qquad (3,3b)$$

Posloupnost $A_0, A_1, A_2, \dots$ je podle (3,3a) posloupností neklesající a to shora ohraničenou; z (3,2), (3,3b) plyne totiž pro $n = 0, 1, 2, \dots$

$$A_n < B_n \leqq B_0. \qquad (3,3c)$$

Polsoupnost $B_0, B_1, B_2, \dots$ je podle (3,36) posloupností nerostoucí a to zdola ohraničenou; z (3,2), (3,3a) plyne ihned pro $n = 0, 1, 2, \dots$

$$A_0 \leqq A_n < B_n. \qquad (3,3d)$$

Tvrzení 1. Existuje $a = \sup\limits_{n=0,1,2\ldots} A_n$, $b = \inf\limits_{n=0,1,2\ldots} B_n$ a platí $a = b$.

Důkaz tohoto tvrzení: Z věty I, tedy z věty o existenci suprema resp. infima plyne ihned existence čísla $a =$ supremum neprázdné shora omezené množiny $A_0, A_1, A_2, \ldots$ a existence čísla $b =$ infimum neprázdné zdola omezené množiny $B_0, B_1, B_2, \ldots$ Dokážeme nyní, že $a = b$. Předpokládejme nejdříve, že

α) $a > b$, t. j. $a - b > 0$.

Ježto a je supremum množiny $A_0, A_1, A_2, \ldots$, existuje podle druhé vlastnosti suprema index n_1 tak, že

$$b < A_{n_1} \leqq a. \tag{3,4a}$$

Ježto b je infimum množiny $B_0, B_1, B_2, \ldots$, existuje index m_1 tak, že

$$b \leqq B_{m_1} < A_{n_1}. \tag{3,4b}$$

Avšak pro každou dvojici m, n ($m, n = 0, 1, 2, \ldots$) platí

$$A_n < B_m, \tag{3,5}$$

což plyne ihned z (3,2), (3,3a), (3,3b). Na př. pro $n \leqq m$

$$A_n \leqq A_m < B_m \leqq B_n,$$

tedy $A_n < B_m$, $A_m < B_n$. Avšak nerovnost (3,4b) je ve sporu s nerovností (3,5). Není tedy $a > b$. Předpokládejme tedy, že

β) $a < b$, t. j. $b - a > 0$.

Délka intervalu $I_0 = \langle -c, c\rangle$ je $2c$. Tedy délka intervalu I_n, podle definice tohoto intervalu, je

$$d_n = B_n - A_n = \frac{c}{2^{n-1}}. \tag{3,6}$$

Zvolme nyní $\varepsilon = b - a$ (tedy, podle předpokladu, je $\varepsilon > 0$). Potom existuje jistě index n_0 tak, že

$$d_n = B_n - A_n < b - a = \varepsilon \text{ pro všechna } n > n_0.^{4)} \tag{3,7}$$

Protože a je supremum množiny $A_0, A_1, A_2, \ldots$, b infimum množiny $B_0, B_1, B_2, \ldots$, platí pro každé n

---

[4]) Pro všechna $n \geqq 1$ je totiž $2^{n-1} = (1 + 1)^{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} \geqq 1 + \binom{n-1}{1} = n$, tedy $2^{n-1} \geqq n$. Potom však $0 < \frac{c}{2^{n-1}} \leqq \frac{c}{n}$. Pro všechna $n > \frac{c}{\varepsilon}$ je $\frac{c}{n} < \varepsilon$ a tedy též $\frac{c}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Stačí tedy v (3,7) vzít $n_0 = \left[\frac{c}{\varepsilon}\right] + 1$.

$$A_n \leqq a, \ B_n \geqq b;$$

odtud plyne pak

$$B_n - A_n \geqq b - a$$

pro každé n. To je však ve sporu s (3,7). Nemůže tedy být $a < b$ a zbývá poslední možnost $a = b$, jak bylo dokázat.

Tvrzení 2. Číslo $a = \sup A_n = \inf B_n$ je hromadným bodem množiny $\mathfrak{M}$.

Důkaz tohoto tvrzení. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Potom (jak plyne z vlastností suprema a infima) existují indexy m_1, m_2 tak, že

$$a - \varepsilon < A_{m_1} \leqq a, \ a + \varepsilon > B_{m_2} \geqq a.$$

Zvolme $m_0 = \max(m_1, m_2)$. Zvolme m tak, že $m > m_0$. Potom podle (3,3a), (3,3b) a nerovností předchozích je

$$a - \varepsilon < A_m, \ a + \varepsilon > B_m.$$

Tedy interval $(a - \varepsilon, \ a + \varepsilon)$ obsahuje interval $I_m = \langle A_m, B_m \rangle$, který obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny $\mathfrak{M}$. Tedy je a hromadným bodem množiny $\mathfrak{M}$.

4. II $\Rightarrow$ I.

Máme dokázat větu I, t. j. větu o existenci suprema (infima) neprázdné množiny shora (zdola) omezené na základě věty II, t. j. věty o existenci limity monotonní omezené posloupnosti.

Budiž tedy $\mathfrak{M}$ daná neprázdná množina a předpokládejme, že je shora omezená. Uvažujme nyní tyto množiny:

$$\begin{aligned} &M_0 \ldots \text{množina všech čísel celých,} \\ &M_1 \ldots \text{množina všech čísel tvaru } \frac{\text{celé číslo}}{2}, \\ &M_2 \ldots \text{množina všech čísel tvaru } \frac{\text{celé číslo}}{2^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &M_n \ldots \text{množina všech čísel tvaru } \frac{\text{celé číslo}}{2^n}, \\ &\text{atd.} \end{aligned} \tag{4,1}$$

Zřejmě platí

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots \tag{4,2}$$

Poněvadž dle předpokladu je množina $\mathfrak{M}$ shora ohraničená, existuje jistě v množině M_0 prvek a_0 takový, že pro všechna $x \in \mathfrak{M}$ platí $x \leqq a_0$, při čemž a_0 je nejmenší číslo z množiny M_0 této vlastnosti. Podobně existuje v množině M_1 prvek a_1 takový, že pro všechna $x \in \mathfrak{M}$ platí $x \leqq a_1$, při čemž a_1 je nejmenší číslo z množiny M_1 této vlastnosti. Obecně — pro každé přirozené n (i pro $n = 0$) existuje v množině M_n prvek a_n takový, že pro všechna $x \in \mathfrak{M}$ platí

$$x \leqq a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4,3}$$

při čemž a_n je nejmenší prvek z M_n této vlastnosti. Vzhledem k definici čísel a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) a vzhledem k (4,2) jest

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots \tag{4,4}$$

Posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je tedy nerostoucí a zřejmě omezená zdola, neboť žádný její prvek — jak plyne z (4,3), není menší než kterékoliv číslo $x \in \mathfrak{M}$ (množina $\mathfrak{M}$ je dle předpokladu neprázdná).

Tvrzení 1. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a platí

$$a \leqq a_n \text{ pro } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4,5}$$

Důkaz tohoto tvrzení. Podle věty II, t. j. podle věty o existenci limity ohraničené monotonní posloupnosti existuje číslo a tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{4,6}$$

Důkaz vztahů (4,5) provedeme nepřímo. Předpokládejme tedy, že v posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ existuje aspoň jeden člen a_i tak, že platí $a_i < a$. Potom by však bylo, jak plyne z (4,4), $a_m \leqq a_i < a$ pro všechna $m > i$. Zvolme $\varepsilon = a - a_i$ (tedy je vzhledem k předpokladu $\varepsilon > 0$). Pak by platilo $a - a_m \geqq a - a_i = \varepsilon$ pro všechna $m > i$. Avšak, podle (4,6), je a limitou posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$, to znamená, že k našemu ε existuje index p tak, že platí $|a - a_m| < \varepsilon$ pro všechna $m > p$. Zvolíme-li index $n_1 > \max(i, p)$, potom by mělo podle předchozích úvah platit současně $a - a_{n_1} > \varepsilon$, $|a - a_{n_1}| < \varepsilon$, což není možné. Nemůže tedy platit $a_i < a$ pro žádný index i. Je tedy tvrzení (4,5) správné.

Tvrzení 2. Pro všechna $x \in \mathfrak{M}$ je

$$x \leqq a. \tag{4,7}$$

Důkaz tohoto tvrzení provedeme nepřímo. Předpokládejme tedy, že tvrzení 2 není správné, t. j. že existuje v množině $\mathfrak{M}$ aspoň jeden prvek $\bar{x}$ tak, že $\bar{x} > a$. Zvolme za tohoto předpokladu $\varepsilon_1 = \bar{x} - a$ (tedy $\varepsilon_1 > 0$). Poněvadž a je limitou posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ (podle (4,6)) a poněvadž platí (4,6), existuje při volbě $\varepsilon_1 = \bar{x} - a$ index n_1 tak, že platí

$$|a_n - a| = a_n - a < \varepsilon_1 = \bar{x} - a, \text{ t. j. } \bar{x} > a_n \text{ pro všechna } n > n_1.$$

To je však ve sporu s (4,3). Platí tedy (4,7) pro všechna $x \in \mathfrak{M}$.

Tvrzení 3. Ať zvolíme $\varepsilon > 0$ jakkoliv, potom existuje aspoň jeden prvek ${}^*x \in \mathfrak{M}$ tak, že platí

$$a - \varepsilon < {}^*x \leqq a. \tag{4,8}$$

Důkaz tohoto tvrzení provedeme přímo. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Potom existuje jistě přirozené číslo m tak, že platí

$$\frac{1}{2^m} < \varepsilon.^{5)} \tag{4,9}$$

Číslo

$$a_m = \frac{k_m}{2^m} \quad (k_m \text{ celé})$$

je nejmenší číslo tvaru $\frac{k}{2^m}$ (k celé), které je větší nebo rovno kterémukoliv číslu $x \in \mathfrak{M}$. Číslo

$$a_m - \frac{1}{2^m} = \frac{k_m - 1}{2^m}$$

tedy už tuto vlastnost nemá, t. j. existuje aspoň jeden prvek ${}^*x \in \mathfrak{M}$ tak, že ${}^*x > a_m - \frac{1}{2^m}$. Tedy je podle tvrzení 1 a podle (4,9)

$${}^*x > a_m - \frac{1}{2^m} \geqq a - \frac{1}{2^m} > a - \varepsilon,$$

čímž (4,8) dokázáno.

Z tvrzení 2 a 3 plyne ihned, že číslo a je supremum množiny $\mathfrak{M}$ (viz nerovnosti (a), (b) ve větě I). Tím je důkaz proveden.

Poznámka 1. Čtenář snadno nahlédne, že důkaz věty o existenci infima neprázdné zdola omezené množiny se provede analogicky.

Poznámka 2. V předchozím jsme dokázali existenci suprema neprázdné shora omezené množiny. Že existuje jen jedno takové číslo, to plyne ihned z definičních nerovností (a), (b) ve větě I.

5. II $\Rightarrow$ III.

Z věty o existenci limity omezené monotonní posloupnosti máme dokázat nutnost a postačitelnost Bolzano-Cauchyovy podmínky (t. j. větu III) pro posloupnosti.

Důkaz nutnosti podmínky věty III je bezprostřední a je proveden na počátku důkazu 2. I $\Rightarrow$ III. Abychom dokázali, že pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}$ podmínka, aby k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ existoval index n_0 tak, aby platilo

---

[5]) Stačí volba celého čísla $m > 0$ takového, že $m > \max(0, \frac{1}{\varepsilon} - 1)$. Viz poznámku [4]).

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ pro všechna } n, m > n_0, \tag{5,1}$$

je podmínkou postačující, uvažme tyto tři kroky:

Tvrzení 1. Za platnosti (5,1) je daná posloupnost omezená.

Jednoduchý důkaz tohoto tvrzení, nepředpokládající znalost žádné ze čtyř základních vět, je proveden pod šifrou A) v důkazu 2. I $\Rightarrow$ III.

Tvrzení 2. Z dané posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrat (a to platí pro každou posloupnost vůbec) posloupnost monotonní $\{a_{i_n}\}$.

Důkaz tohoto tvrzení je uveden jako pomocná věta, nespočívající na znalosti žádné ze základních vět I až IV, v poznámce na konci důkazu 5. II $\Rightarrow$ III.

Tvrzení 3. Vybraná monotonní posloupost $\{a_{i_n}\}$ z dané posloupnosti $\{a_n\}$ (která splňuje podmínku (5,1)) je konvergentní.

Toto tvrzení dokážeme snadno. Za platnosti (5,1) je podle tvrzení 1 daná posloupnost $\{a_n\}$ omezená a tedy též monotonní posloupnost $\{a_{i_n}\}$, jež je vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$, je omezená. Podle věty II o existenci limity monotonní omezené posloupnosti existuje číslo a tak, že

$$a = \lim_{n \to \infty} a_{i_n}. \tag{5,2}$$

Tím je tvrzení 3 dokázáno.

Budiž nyní dáno $\varepsilon > 0$. Podle (5,1) existuje index p_ε tak, že pro všechna $m, n > p_\varepsilon$ je $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ježto platí (5,2), existuje index n_ε tak, že pro $r > n_\varepsilon$ je

$$|a_{i_r} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{5,3}$$

Zvolme nyní r tak, že $r > n_\varepsilon$ a současně $i_r > p_\varepsilon$; potom je

$$|a_{i_r} - a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{5,4}$$

pro všechna $n > p_\varepsilon$. Současně však platí (5,3). Je tedy

$$|a_n - a| = |a_n - a_{i_r} + a_{i_r} - a| \leq |a_n - a_{i_r}| + |a_{i_r} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \\ + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

pro všechna $n > p_\varepsilon$. To však znamená, že existuje $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Tím je celý důkaz hotov.

Poznámka. Že z každé posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrat monotonní posloupnost, to zjistíme snadno tímto rozborem:

A) Budeme nejdříve předpokládat, že v dané posloupnosti $\{a_n\}$ neexistuje člen největší, t. j. že ke každému členu a_n dané posloupnosti existuje jiný člen této posloupnosti větší než a_n. Pak ovšem těch členů větších než a_n musí být nekonečně mnoho. Kdyby jich byl jen konečný počet, pak jeden z nich by byl největší. Ježto před a_n je konečný počet členů (t. j. $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$), měla by pak daná posloupnost jistě člen největší, čemuž dle předpokladu tak není.

V důsledku předchozího lze ke každému indexu n určit takový index $r > n$, že je $a_r > a_n$. Lze tedy postupně určit indexy

$$1 = r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$$

tak, že platí

$$a_{r_1} < a_{r_2} < a_{r_3} < \ldots$$

Posloupnost $\{a_{r_n}\}$ je tedy vybranou rostoucí posloupností z dané posloupnosti $\{a_n\}$.

B) Předpokládejme za druhé, že daná posloupnost $\{a_n\}$ je taková, že z ní lze vybrat posloupnost $\{b_n\}$ tak, že v posloupnosti $\{b_n\}$ neexistuje člen největší. Potom podle A) se dá z posloupnosti $\{b_n\}$ vybrat rostoucí posloupnost $\{c_n\}$, jež je rovněž vybranou rostoucí posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$.

C) Poslední možnost je ta, že každá vybraná posloupnost z dané posloupnosti $\{a_n\}$ obsahuje člen největší. Ať zvolíme index n jakkoliv, pak vybraná posloupnost

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$$

z dané posloupnosti $\{a_n\}$ obsahuje podle předpokladu největší člen. Z posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1}$$

zvolíme největší člen a_{r_1}; z posloupnosti

$$a_{r_1+1}, a_{r_1+2}, \ldots \tag{2}$$

zvolíme největší člen a_{r_2}; z posloupnosti

$$a_{r_2+1}, a_{r_2+2}, \ldots \tag{3}$$

zvolíme největší člen a_{r_3} atd.

Ježto a_{r_2} je v posloupnosti (1), je $a_{r_2} \leqq a_{r_1}$; ježto a_{r_3} je v posloupnosti (2), je nutně $a_{r_3} \leqq a_{r_2}$ atd.

Dostáváme tak posloupnost

$$a_{r_1} \geqq a_{r_2} \geqq a_{r_3} \geqq \ldots,$$

což je vybraná nerostoucí posloupnost z dané posloupnosti $\{a_n\}$.

6. III $\Rightarrow$ II.

Máme dokázat větu o existenci limity omezené monotonní posloupnosti (t. j. větu II) na základě věty III, t. j. na základě podmínky Bolzano-Cauchyovy pro posloupnosti.

Budiž tedy

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \tag{6,1}$$

daná neklesající posloupnost. Máme dokázati: Je-li shora omezená, je konvergentní. Neboli: Je-li shora omezená, splňuje podmínku věty III (neboť podle věty III je potom konvergentní). Ekvivalentní je výrok: Nesplňuje-li podmínku věty III, není shora omezená. Dokažme toto: Nechť tedy posloupnost (6,1) nesplňuje podmínku věty III. T. j. existuje $\varepsilon_0 > 0$, k němuž neexistuje příslušný index n_0. T. j. ať si zvolíme n_0 jakkoliv, existují přirozená čísla n, m tak, že je sice $n > n_0$, $m > n_0$, ale není $|a_n - a_m| < \varepsilon_0$, t. j. je $|a_n - a_m| \geqq \varepsilon_0$. Označíme-li N_2 větší z čísel n, m, N_1 menší z nich, máme

$$a_{N_2} - a_{N_1} \geqq \varepsilon_0, \text{ t. j. } a_{N_2} \geqq a_{N_1} > + \varepsilon_0. \tag{6,2}$$

Zvolme nejdříve

$$n_0 = 1.$$

Potom existují podle (6,2), (6,1) indexy $n_2 > n_1 > 1$ tak, že

$$a_{n_2} \geqq a_{n_1} + \varepsilon_0 \geqq a_1 + \varepsilon_0. \tag*{(6,3)$_1$}$$

Zvolme dále

$$n_0 = n_2.$$

Potom existují podle (6,2), (6,1), (6,3) indexy $n_4 > n_3 > n_2$ tak, že

$$a_{n_4} \geqq a_{n_3} + \varepsilon_0 \geqq a_{n_2} + \varepsilon_0 \geqq a_1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_0,$$

tedy

$$a_{n_4} \geqq a_1 + 2\varepsilon_0. \tag*{(6,3)$_2$}$$

Tak můžeme postupovati dále. Obecně, po k krocích dojdeme k indexům $n_0 = n_{2k-2}$, $n_{2k} > n_{2k-1} > n_{2k-2}$ takovým, že platí

$$a_{n_{2k}} \geqq a_{n_{2k-1}} + \varepsilon_0 \geqq a_{n_{2k-2}} + \varepsilon_0 \tag{6,4}$$

pro všechna přirozená $k \geqq 2$. Tvrdíme nyní, že platí

$$a_{n_{2k}} \geqq a_1 + k\varepsilon_0 \tag*{(6,3)$_k$}$$

pro každé přirozené číslo k. Podle (6,3) je tvrzení $(6,3)_k$ správné pro $k = 1$. Předpokládejme nyní, že platí $(6,3)_k$ pro nějaké celé číslo $k > 1$. Z (6,4) plyne (neboť (6,4) platí pro každé celé $k > 1$) $a_{n_{2k+2}} \geqq a_{n_{2k}} + \varepsilon_0$ a tedy, vzhledem k $(6,3)_k$, $a_{n_{2k+2}} \geqq a_{n_{2k}} + \varepsilon_0 \geqq a_1 + k\varepsilon_0 + \varepsilon_0 = a_1 + (k + + 1)\,\varepsilon_0$. Je tedy metodou úplné indukce dokázána platnost vztahu $(6,3)_k$ pro každé přirozené k.

Z $(6,3)_k$ plyne však ihned, že posloupnost (6,1) není shora omezená; je-li totiž A libovolné číslo, potom $a_{n_{2k}} > A$ jakmile $a_1 + k\varepsilon_0 > A$, t. j. jakmile $k > \dfrac{A - a_1}{\varepsilon_0}$ (k je přirozené číslo).

Máme tedy dokázáno, že nesplňuje-li posloupnost (6,1) podmínku věty III, není shora omezená. Tím je, vzhledem k tomu, co bylo na počátku důkazu řečeno, důkaz 6. III $\Rightarrow$ II hotov.

Nutnost podmínky věty II, t. j. tvrzení, že konvergentní neklesající posloupnost je omezená, byla prokázána na počátku důkazu 1. I $\Rightarrow$ II.

Poznámka. Důkaz pro nerostoucí posloupnost probíhá analogicky, což si čtenář snadno doplní.

7. IV $\Rightarrow$ II.

Máme dokázat větu II, t. j. větu o existenci limity monotonní omezené posloupnosti, na základě věty o existenci hromadného bodu omezené nekonečné množiny (t. j. věty IV).

Nutnost podmínky věty II byla dokázána v důkazu 1. I $\Rightarrow$ II (na počátku tohoto důkazu). Dokážeme tedy postačitelnost podmínky věty II, t. j. že monotonní omezená posloupnost je konvergentní.

Budiž tedy $\{a_n\}$ daná omezená posloupnost, třeba posloupnost neklesající shora omezená. Pak existuje číslo C tak, že platí

$$a_n \leqq a_{n+1} < C \tag{7,1}$$

pro všechna přirozená čísla n.

Tvrzení 1. Existuje číslo s tak, že každý interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ obsahuje a_n pro nekonečně mnoho indexů n.

Důkaz tohoto tvrzení:

1. Nechť množina členů a_n je konečná. Tedy se v posloupnosti $\{a_n\}$ jisté číslo s nekonečně mnohokrát opakuje. Zřejmě pak každý interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

2. Nechť množina členů a_n je nekonečná. Ježto předpokládáme, že daná monotonní posloupnost je omezená, můžeme užít věty IV. Podle této věty existuje tedy aspoň jeden hromadný bod množiny členů posloupnosti $\{a_n\}$. Označíme-li tento hromadný bod s, potom interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

Tvrzení 2. Pro všechny indexy n je

$$a_n \leqq s. \tag{7,2}$$

Důkaz tohoto tvrzení provedeme nepřímo. Kdyby neplatilo (7,2) pro všechny indexy n, potom by existoval index p tak, že $a_p > s$. Zvolme takové p a položme $\eta = a_p - s > 0$. Pro všechna $n \geqq p$ je potom $a_n \geqq$ $\geqq a_p = s + \eta$ (neboť $\{a_n\}$ je neklesající), takže interval $(s - \eta, s + \eta)$ by obsahoval jen konečný počet členů a_n, což podle tvrzení 1 není možné.

Tvrzení 3. Jest

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{7,3}$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Ježto s je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$, existuje index N tak, že $|a_N - s| < \varepsilon$, tedy $a_N > s - \varepsilon$.

Pro všechna $n > N$ je potom $a_n \geqq a_N > s - \varepsilon$, a ovšem, podle (7,2), $a_n \leqq s$. T. j.: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že $|a_n - s| < \varepsilon$ pro všechna $n > N$. Tedy platí (7,3). Tím je důkaz 7. IV $\Rightarrow$ II hotov.

Poznámka. Pro posloupnost nerostoucí zdola omezenou probíhá důkaz obdobně.

8. IV $\Rightarrow$ III.

Máme dokázat nutnost a postačitelnost Bolzano-Cauchyovy podmínky pro posloupnosti (t. j. větu III) na základě věty o existenci hromadného bodu nekonečné omezené množiny, t. j. z věty IV.

Nutnost podmínky věty III jsme již dokázali na začátku důkazu 2. I $\Rightarrow$ II. Dokážeme tedy postačitelnost podmínky věty III. Předpokládejme, že daná posloupnost $\{a_n\}$ je taková, že k libovolnému $\varepsilon < 0$ existuje index n_0 tak, že platí

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ pro všechna } n, m > n_0. \tag{8,1}$$

Tvrzení 1. Za platnosti (8,1) je daná posloupnost $\{a_n\}$ omezená.

Důkaz tohoto tvrzení byl již proveden v důkazu 2. I $\Rightarrow$ III pod heslem A).

Tvrzení 2. Platí-li pro danou posloupnost $\{a_n\}$ podmínka (8,1), potom existuje číslo a tak, že pro každé $\varepsilon > 0$ interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

Důkaz tohoto tvrzení. Označme M množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Rozlišujme dva případy:

A) Je-li množina M nekonečná, potom podle tvrzení 1 a podle věty IV (t. j. věty o existenci hromadného bodu nekonečné omezené množiny) má aspoň jeden hromadný bod. Označme jej a. Zvolíme-li $\varepsilon > 0$, potom — podle definice hromadného bodu nekonečné množiny — obsahuje interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nekonečně mnoho prvků množiny M a tedy nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

B) Je-li množina M konečná, pak existuje číslo a rovné nekonečně mnoha členům posloupnosti $\{a_n\}$. Každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, obsahuje pak jistě nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, neboť obsahuje nejméně ty členy, které jsou rovny číslu a a těch je nekonečně mnoho.

Tvrzení 3. Za platnosti podmínky (8,1) pro danou posloupnost $\{a_n\}$ je číslo a z tvrzení 2 limitou posloupnosti $\{a_n\}$, t. j.

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n. \tag{8,2}$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu (8,1) existuje index p tak, že platí

$$|a_m - a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ pro všechna } n, m > p. \tag{8,3}$$

Z tvrzení 2 plyne, že existuje jistě index n_1 tak, že $n_1 > p$ a dále

$$|a_{n_1} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{8,4}$$

Je, vzhledem k (8,3), též

$$|a_{n_1} - a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ pro všechna } n > p. \tag{8,5}$$

Z (8,4), (8,5) plyne pak

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_1} + a_{n_1} - a| \leqq |a_{n_1} - a_n| + |a_{n_1} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \\ + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \text{ pro všechna } n > p;$$

odtud ihned plyne (8,2).

Zjistili jsme, že, je-li pro danou posloupnost splněna podmínka (8,1), má tato posloupnost limitu (vlastní). Je tedy podmínka (8,1) postačující podmínkou pro konvergenci, jak jsme měli dokázat.

9. II $\Rightarrow$ IV.

Máme dokázat větu o existenci hromadného bodu nekonečné omezené množiny (t. j. větu IV) na základě věty o existenci limity omezené monotonní posloupnosti (t. j. věty II).

Počátek důkazu je shodný s počátkem důkazu 3. I $\Rightarrow$ IV až po tvrzení 1 v 3. I $\Rightarrow$ IV. Další postup je tento: Posloupnost $\{A_n\}$ je neklesající a shora omezená, jak plyne z (3,3a), (3,3c). Posloupnost $\{B_n\}$ je nerostoucí a zdola omezená, jak plyne z (3,3b), (3,3d). Podle věty II (t. j. věty o existenci limity monotonní omezené posloupnosti), existují čísla α, β tak, že

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} A_n, \ \beta = \lim_{n\to\infty} B_n. \tag{9,1}$$

Tvrzení 1. Jest $\alpha = \beta$.

Důkaz tohoto tvrzení. Pro délku d_n intervalu I_n (n ... přirozené číslo) platí podle (3,6)

$$d_n = B_n - A_n = \frac{c}{2^{n-1}}. \tag{9,2}$$

Zvolíme-li nyní $\varepsilon > 0$ libovolně, pak existuje index n_0 tak, že platí

$$\frac{c}{2^{n-1}} < \varepsilon \text{ pro všechna } n > n_0{}^{6}),$$

t. j.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{2^{n-1}} = 0. \tag{9,3}$$

Z (9,3), (9,2) plyne pak

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0,$$

---

[6]) Viz poznámku [4]).

což podle věty o limitě rozdílu[7]) dává ihned

$$\beta = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \alpha.$$

Tvrzení 2. Číslo α je hromadným bodem dané množiny $\mathfrak{M}$.

Důkaz: Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Ježto $\lim_{n\to\infty} A_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} B_n = \alpha$ (podle (9,1) a tvrzení 1), existují (ve smyslu definice limity posloupnosti) indexy n_1, n_2 tak, že

$$\alpha - \varepsilon < A_n < \alpha + \varepsilon \text{ pro všechna } n > n_1, \tag{9,4a}$$

$$\alpha - \varepsilon < B_n < \alpha + \varepsilon \text{ pro všechna } n > n_2. \tag{9,4b}$$

Zvolme $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Zvolme dále $n > n_0$; potom, vzhledem k (9,4a), (9,4b), (3,2), platí

$$\alpha - \varepsilon < A_n < B_n < \alpha + \varepsilon.$$

Je tedy interval I_n částí intervalu $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Poněvadž, podle své definice, interval I_n obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny $\mathfrak{M}$, obsahuje každý interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ aspoň jeden bod z množiny $\mathfrak{M}$ různý od α; je tedy α hromadným bodem množiny $\mathfrak{M}$.

10. III $\Rightarrow$ IV.

Máme na základě podmínky Bolzano-Cauchyovy pro posloupnosti (t. j. věty III) dokázat větu o existenci hromadného bodu omezené nekonečné množiny, t. j. větu IV.

Počátek důkazu je stejný s počátkem důkazu 3. I $\Rightarrow$ IV až po tvrzení 1 v 3. I $\Rightarrow$ IV. Dokážeme dále, že posloupnosti krajních bodů intervalů I_n, t. j. posloupnosti $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, vyhovují postačující podmínce pro konvergenci z věty III.

Pro každou dvojici indexů m, n $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ platí totiž (viz (3,5))

$$A_n < B_m.$$

Odtud a z (3,6), (3,3a), (3,3b) plyne pak (při daném n)

$$d_n = \frac{c}{2^{n-1}} = B_n - A_n > A_m - A_n \geqq 0,$$

$$d_n = \frac{c}{2^{n-1}} = B_n - A_n > B_n - B_m \geqq 0$$

pro každé $m \geqq n$. Tedy

[7]) Což je jednoduchá věta o limitách posloupností, nespočívající na žádné z vět I až IV.

$$|A_m - A_n| < \frac{c}{2^{n-1}},$$
$$|B_m - B_n| < \frac{c}{2^{n-1}} \tag{10,1}$$

pro každé $m \geqq n$.

Zvolme nyní $\varepsilon > 0$ libovolně. Potom existuje index n_0 tak, že platí

$$\frac{c}{2^{n-1}} < \varepsilon \text{ pro všechna } n > n_0.\text{[8])}$$

Potom platí též, jak plyne z předchozí nerovnosti a z (10,1),

$$|A_m - A_n| < \varepsilon,\ |B_m - B_n| < \varepsilon \text{ pro všechna } n, m > n_0. \tag{10,2}$$

Z (10,2) plyne pak ihned podle věty III, že posloupnosti $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ jsou konvergentní, t. j. že existují čísla α, β tak, že

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} A_n,\ \beta = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Zbývající část důkazu probíhá stejně jako v případě 9. II $\Rightarrow$ IV a je vyčerpána tvrzením 1 a tvrzením 2 v důkazu 9. II $\Rightarrow$ IV.

Poznámka. Důkaz 10. III $\Rightarrow$ IV jsme mohli provést jiným způsobem takto: První část důkazu by byla společná s částí důkazu 3. I $\Rightarrow$ IV až po tvrzení 1. Další postup by byl tento: V každém intervalu I_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) zvolíme uvnitř nějaký prvek $a_n \in \mathfrak{M}$ (což je vždy možné, neboť průnik $\mathfrak{M} \,.\, I_n$ je vždy nekonečná množina) a to tak, že a_n jsou vzájemně různé prvky. Dostáváme tak posloupnost prvků $a_n \in \mathfrak{M}$, t. j. $a_0, a_1, a_2, \ldots$, kde a_0 je vnitřním bodem z I_0, a_1 vnitřním bodem z I_1, atd. Snadno dokážeme, že tato posloupnost vyhovuje podmínce Bolzano-Cauchyově a tedy, podle věty III, existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. O čísle a dokážeme pak snadno, že je hromadným bodem množiny $\mathfrak{M}$.

Tento důkaz spočívá však na axiomu výběru a tomu jsme se chtěli vyhnout.

11. IV $\Rightarrow$ I.

Máme dokázat větu I, t. j. větu o existenci suprema (infima) neprázdné shora (zdola) omezené množiny na základě věty o existenci hromadného bodu omezené nekonečné množiny, t. j. z věty IV.

Důkaz probíhá analogicky jako důkaz 4. II $\Rightarrow$ I. První část důkazu je stejná s částí důkazu 4. II $\Rightarrow$ I před tvrzením 1 v 4. II $\Rightarrow$ I (uvažujeme-li, právě tak jako v dřívějším citovaném důkazu, množinu danou neprázdnou a shora omezenou).

[8]) Viz poznámku [4]).

Posloupnost $a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \dots$ (viz (4,4)) je podle citované části důkazu 4. II $\Rightarrow$ I omezená. Nyní dokážeme naprosto stejně jako v důkazu 8. IV $\Rightarrow$ III, tvrzení 2, že existuje číslo a tak, že každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \dots$

Tvrzení 1. Jest

$$a \leqq a_n \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots \tag{11,1}$$

Důkaz tohoto tvrzení provedeme nepřímo. Předpokládejme tedy, že by existoval aspoň jeden člen a_i v posloupnosti $\{a_n\}$[9]) tak, že $a_i < a$. Potom by však bylo, podle (4,4), $a_n < a$ pro všechna $n > i$. Členů větších než a_i by byl potom nejvýše konečný počet. Při volbě $\varepsilon_1 = a - a_i$, tedy $\varepsilon_1 > 0$, jest

$$a - \varepsilon_1 = a - (a - a_i) = a_i.$$

Interval $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$ nemůže potom obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. To je však ve sporu s definiční vlastností čísla a (každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$). Platí tedy (11,1).

Tvrzení 2. Pro všechna $x \in \mathfrak{M}$ platí

$$x \leqq a. \tag{11,2}$$

Důkaz provedeme opět nepřímo. Předpokládejme, že existuje aspoň jeden prvek $x_0 \in \mathfrak{M}$ tak, že $x_0 > a$. Zvolme $\varepsilon_0 = x_0 - a$, tedy $\varepsilon_0 > 0$. Podle definiční vlastnosti čísla a, interval $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. Existuje jistě člen a_N tak, že

$$a_N < a + \varepsilon_0 = a + (x_0 - a) = x_0.$$

Ale to je ve sporu s definicí členů a_n posloupnosti $\{a_n\}$ (viz (4,3)). Je tedy tvrzení 2 správné.

Tvrzení 3. Pro libovolnou volbu čísla $\varepsilon > 0$ existuje aspoň jeden prvek $x_1 \in \mathfrak{M}$ tak, že platí

$$a - \varepsilon < x_1 \leqq a. \tag{11,3}$$

Důkaz tohoto tvrzení je stejný jako v důkazu 4. II $\Rightarrow$ I, tvrzení 3, s tím jediným rozdílem, že se v něm odvoláme na (11,1), tvrzení 1, místo na vztah (4,5).

Zbývající část důkazu 11. IV $\Rightarrow$ I je již zřejmá. Z tvrzení 2,3 plyne ihned, že a je supremum množiny $\mathfrak{M}$.

Poznámka. Důkaz pro případ, že daná množina $\mathfrak{M}$ je neprázdná, zdola omezená, by probíhal obdobně. Zde bychom ovšem dokazovali existenci infima dané množiny $\mathfrak{M}$.

---

[9]) Tedy v posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \dots$, pro jejíž členy platí (4,4).

12. III $\Rightarrow$ I.

Máme dokázat větu o existenci suprema (infima) neprázdné shora (zdola) omezené množiny, t. j. větu I, na základě znalosti Bolzano-Cauchyovy podmínky pro posloupnosti, tedy na základě věty III.

Předpokládáme-li že daná množina $\mathfrak{M}$ je neprázdná shora ohraničená, potom můžeme pro důkaz užít analogického postupu k důkazu 4. II $\Rightarrow$ I. Počátek důkazu je shodný s celou částí důkazu 4. II $\Rightarrow$ I před tvrzením 1 v 4. II $\Rightarrow$ I. Navazujíce na citovanou část důkazu 4. II $\Rightarrow$ I dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ s vlastnostmi (4,3), (4,4), kde prvky a_n mají tentýž smysl jako v 4. II $\Rightarrow$ I, je konvergentní.

Pro $m \geqq n$ platí předně (jak plyne z (4,4)) $a_m \leqq a_n$. Za druhé: číslo a_n bylo nejmenší číslo tvaru $\frac{k}{2^n}$ (k celé) takové, že žádné číslo $x \in \mathfrak{M}$ není větší než toto číslo. Tedy číslo $a_n - \frac{1}{2^n} = \frac{k_n - 1}{2^n}$ už tuto vlastnost nemá, t. j. existuje $x_0 \in \mathfrak{M}$ tak, že $x_0 > a_n - \frac{1}{2^n}$. Ale $x_0 \leqq a_m$, tedy $a_m > a_n - \frac{1}{2^n}$, t. j.

$$0 \leqq a_n - a_m < \frac{1}{2^n}. \tag{12,1}$$

Existuje zřejmě ke každému $\varepsilon > 0$ index n_0 tak, že platí

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \text{ pro všechna } n > n_0.\text{[10]} \tag{12,2}$$

Z (12,2), (12,1) plyne ihned

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ pro všechna } n, m > n_0.$$

Je tedy pro posloupnost $\{a_n\}$ splněna podmínka předchozí. Podle věty III je tato podmínka postačující podmínkou pro konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$. Existuje tedy číslo a tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Zbývající část důkazu je shodná s důkazem 4. II $\Rightarrow$ I od vztahu (4,6) počínaje až do konce důkazu 4. II $\Rightarrow$ I.

---

[10]) Snadný důkaz tohoto tvrzení je analogický důkazu v poznámce [4]).