Karel Koutský

O oddělitelnosti množin v topologických prostorech

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 3-4, 81--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109439

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

O oddělenosti množin v topologických prostorech.

Karel Koutský, Brno.

(Došlo 16. března 1938.)

Nechť P je prostor. Když pro každé dvě neprázdné, v P oddělené množiny platí, že

(1) jedna z nich je otevřená v P, pravíme, že prostor P má vlastnost f_1;

(2) obě jsou otevřené v P, pravíme, že prostor P má vlastnost f_2;

(3) jedna je uzavřená v P, pravíme, že prostor P má vlastnost f_3;

(4) obě jsou uzavřené v P, pravíme, že prostor P má vlastnost f_4;

(5) jedna je zároveň otevřená i uzavřená v P, pravíme, že prostor P má vlastnost f_5;

(6) obě jsou zároveň otevřené i uzavřené v P, pravíme, že prostor P má vlastnost f_6.

Snadno se nahlédne, že platí následující vztahy

$$f_6 \Rightarrow f_2 \Rightarrow f_1; \quad f_6 \Rightarrow f_4 \Rightarrow f_3; \quad f_6 \Rightarrow f_5 \Rightarrow f_1, f_3.$$

Prof. E. Čech položil v topologickém semináři otázku, týkající se prostorů, které mají jednu z právě definovaných vlastností. Řešením této otázky došel jsem k celé řadě vět, jejichž důkazy jsou vesměs dosti snadné, a proto je předkládám čtenáři jako úlohy k cvičení.[1])

1.1. Nechť množina P skládá se ze čtyř bodů a, b, c, d. Uzávěry v P nechť jsou definovány takto: $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{a} = (a) + (c)$, $\bar{b} = (b) + (d)$, $\bar{c} = \bar{d} = (b) + (c) + (d)$, uzávěr více než jednobodové množiny rovná se součtu uzávěrů jejích bodů. Potom prostor P má vlastnost f_1, avšak nemá žádnou z vlastností f_2, f_3, f_4, f_5, f_6.

[1]) Ve větách užívám pojmů a názvosloví z Čechových Topologických prostorů. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. 66 (1937), str. D 225 až D 264.

1.2. Nechť $Q \subset P$ jsou dané množiny takové, že $Q \neq \emptyset$, $P - Q$ má aspoň dva body. Uzávěry v P nechť jsou definovány takto: (1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, (2) $\emptyset \neq M \subset P \Rightarrow \overline{M} = M + Q$. Potom prostor P má vlastnost f_2, avšak nemá žádnou z vlastností f_3, f_4, f_5, f_6.

1.3. Nechť množina P skládá se ze tří bodů a, b, c. Uzávěry v P nechť jsou definovány takto: $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{a} = (a) + (b)$, $\bar{b} = (b) + (c)$, $\bar{c} = (c)$, kdežto pro každou jinou $M \subset P$ nechť je $\overline{M} = P$. Potom prostor P má vlastnost f_3, avšak nemá žádnou z vlastností f_1, f_2, f_4, f_5, f_6.

1.4. Nechť $Q \subset P$ jsou dané množiny takové, že Q má aspoň dva body, $P - Q \neq \emptyset$. Uzávěry v P nechť jsou definovány takto: (1) $M \subset P,\ M - Q = \emptyset \Rightarrow \overline{M} = M$, (2) $M \subset P,\ M - Q \neq \emptyset \Rightarrow \overline{M} = P$. Potom prostor P má vlastnost f_4, avšak nemá žádnou z vlastností f_1, f_2, f_5, f_6.

1.5. Nechť $Q \subset P$ jsou dané množiny takové, že každá z množin Q, $P - Q$ má aspoň dva body. Uzávěry v P nechť jsou definovány takto: (1) $M \subset P,\ QM = \emptyset \Rightarrow \overline{M} = M$, (2) $M \subset P,\ QM \neq \emptyset \Rightarrow \overline{M} = M + Q$. Potom prostor P má vlastnost f_5, ale nemá žádnou z vlastností f_2, f_4, f_6.

1.6. Nechť P je daná množina. Uzávěry v P nechť jsou definovány takto: $M \subset P \Rightarrow \overline{M} = M$. Potom prostor P má vlastnost f_6.

2.1. Prostor P má vlastnost f_1, když a jen když má jednu z následujících dvou vlastností: (1) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je dědičně otevřená v P.[2] (2) $x \in P$, $y \in P$, $\bar{x} \,.\, (y) = (x) \,.\, \bar{y} = \emptyset \Rightarrow$ buď x nebo y je otevřený v P.

2.2. Prostor P má vlastnost f_2, když a jen když má jednu z následujících dvou vlastností: (1) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ množiny M, N jsou dědičně otevřené v P. (2) $x \in P$, $y \in P$, $\bar{x} \,.\, (y) = (x) \,.\, \bar{y} = \emptyset \Rightarrow$ body x, y jsou otevřené v P.

2.3. Prostor P má vlastnost f_3, když a jen když má následující vlastnost: $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je dědičně uzavřená v P.[2])

2.4. Prostor P má vlastnost f_4, když a jen když má následující vlastnost: $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ množiny M, N jsou dědičně uzavřené v P.

---

[2]) Množina $M \subset P$ nazývá se dědičně otevřená v P, když a jen když každá $M_1 \subset M$ je otevřená v P.
Množina $M \subset P$ nazývá se dědičně uzavřená v P, když a jen když každá $M_1 \subset M$ je uzavřená v P.

V následujících větách 3.1—3.6 značí P prostor, $B \subset P$ množinu všech B-bodů prostoru P, $I \subset P$ množinu všech v P otevřených bodů,[3]) $U \subset P$ množinu všech v P uzavřených bodů.[3])

3.1. Nechť prostor P má vlastnost f_1. Potom platí:

(1) $x \in P - I \Rightarrow P - I \subset \bar{x} + x^s$ a množina $\bar{x} + x^s$ je uzavřená v P.

(2) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je isolovaný prostor.[4])

(3) Množiny $B - I$, $U - I$ jsou nanejvýš jednobodové.[5])

(4) Když P je AU-prostor, pak P je dědičný N-prostor.

3.2. Nechť prostor P má vlastnost f_2. Potom platí:

(1) $x \in P - I \Rightarrow \bar{x} + x^s = P$, $I \subset x^s$; $x \in I \Rightarrow P - I \subset \bar{x}$.

(2) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow M, N$ jsou isolované prostory.

(3) $U = B \Rightarrow$ buď U je jednobodová množina nebo $B = I = U$.[6])

3.3. Nechť prostor P má vlastnost f_3. Potom platí:

(1) $x \in P - U \Rightarrow P - U \subset \bar{x} + x^s$.

(2) $x \in P - U$ je R-bod prostoru P[7]) $\Rightarrow \bar{x} + x^s = P - U$ a x není B-bod prostoru P.

(3) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je isolovaný prostor.

3.4. Nechť prostor P má vlastnost f_4. Potom platí:

(1) $x \in P - U \Rightarrow \bar{x} + x^s = P$, $U \subset \bar{x}$; $x \in U \Rightarrow P - U \subset x^s$.

(2) $x \in P - U$ je R-bod prostoru P[7]) $\Rightarrow$ žádný $x \in P$ není uzavřený v P.

(3) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{M}N = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow M$, N jsou isolované prostory.

(4) Když P není B-prostor, pak množina $P - U$ je hustá v prostoru P.[8])

---

[3]) Je vždy $I \subset B$. Snadno se dokáže, že platí následující tři relace:

(1) $x \in P - B \Rightarrow \bar{x} \subset P - B$; (2) $x \in P - I \Rightarrow \bar{x} \subset P - I$;

(3) $x \in P - U \Rightarrow x^s \subset P - U$.

[4]) Prostor P nazývá se isolovaný prostor, když a jen když každý $x \in P$ je otevřený v P, neboli když $P = I$.

[5]) Odtud snadno následuje, že když P je B-prostor, pak každý $x \in P$, nanejvýš s výjimkou jediného bodu, je otevřený v P.

[6]) Odtud snadno následuje, že když P je B-prostor, pak P je isolovaný prostor.

[7]) Stačí předpokládati pouze, že bod $x \in P - U$ má vlastnost $\bar{x} \subset x^s$.

[8]) Množina $M \subset P$ nazývá se hustá v prostoru P, když a jen když $\overline{M} = P$.

3.5. Nechť prostor P má vlastnost f_5. Potom platí:
(1) $x \epsilon P - (I + U) \Rightarrow \bar{x} + x^s = P - IU$.
(2) $x \epsilon P - (I + U)$ je B-bod prostoru P[9]) $\Rightarrow I \subset U$.

3.6. Nechť prostor P má vlastnost f_6. Potom platí:

(1) Buď neexistují neprázdné, v P oddělené množiny a pak množiny B, U jsou nanejvýš jednobodové nebo, když existují neprázdné, v P oddělené množiny, pak P je isolovaný prostor.

(2) Když P je U-prostor, pak neexistují neprázdné, v P oddělené množiny, když a jen když uzávěry v P všech bodů prostoru P tvoří monotonní systém.[10])

Topologický seminář, Brno.

*

Sur la séparabilité des ensembles dans les espaces topologiques.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans cet article je donne quelques théorèmes et exemples des espaces topologiques au sens de M. Čech qui ont une des propriétés suivantes: Si deux ensembles sont séparés et non-vides, alors un ou tous deux sont ouverts ou fermés ou fermés et ouverts en même temps.

---

[9]) Stačí předpokládati pouze, že bod $x \epsilon P - (I + U)$ má vlastnost $x^s \subset \bar{x}$.

[10]) Monotonní systém $\mathfrak{S}$ je takový systém množin, který má následující vlastnost: $M_1 \epsilon \mathfrak{S}$, $M_2 \epsilon \mathfrak{S} \Rightarrow$ buď $M_1 \subset M_2$ nebo $M_2 \subset M_1$. Věta (2) pochází od p. J. Nováka.