Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma

Některá další užití Steiner-Pelzovy paraboly

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 6, 236--241

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109422

Některá další užití Steiner-Pelzovy paraboly.

Dr. *Josef Klíma.*

(Došlo 11. listopadu 1931.)

Byl to hlavně Pelz, který ve svých pojednáních[1]) ukázal při kuželosečkách hojná a konstruktivně velice výhodná užití paraboly, jež je obalena kolmo sdruženými polárami k paprskům svazku. Parabolu tu znal již Chasles,[2]) ale podle Pelze označuje se Steinerovou, ježto Steiner více se s ní zabýval.[3])

V následujícím chci ukázati, jak lze této paraboly užíti k důkazu některých vět.

a) V projektivní diferenciální geometrii definuje prof. Čech element třetího řádu rovinné křivky K v bodě t projektivitou (polaritou) mezi řadou bodovou na tečně T křivky K v bodě t a paprskovým svazkem o středu t.[4])

K stanovení prvku druhého řádu (tří soumezných bodů) křivky K v bodě t postačí znáti prvý střed křivosti k_1 v tom bodě. Abychom znali prvek třetího řádu (čtyři soumezné body), třeba znáti ještě druhý střed křivosti k_2 v bodě t, což je střed křivosti evoluty E křivky K v bodě k_1.[5]) Z tohoto druhého určení prvku třetího řádu lze obdržeti Čechovo takto: Čtyřmi soumeznými body v bodě t křivky K jde ∞^1 kuželoseček, tvořících svazek, který má týž průměr S, spojující bod t s bodem s na k_1k_2, kde, jak známo,

---

[1]) „Über die Achsenbestimmung der Kegelschnitte", Akademie der Wissenschaften in Wien, 1876, „Die Krümmungshalbmesser — Konstrukzionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes", Věstník král. české společnosti nauk v Praze, roč. 1879, „Bemerkungen zu den Krümmungs — Halbmesser — Konstrukzionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes" tamtéž roč. 1882.

[2]) „Traité des sections coniques", Paris, roku 1865, str. 145 a další.

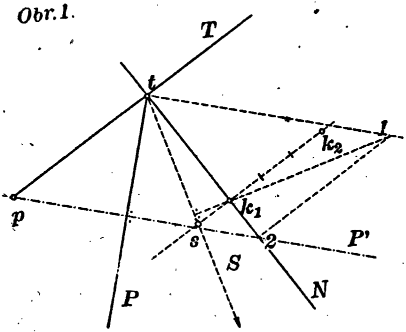
[3]) Steiner-Schrötter: „Vorlesungen über synthetische Geometrie", díl II, 3. vyd. z roku 1898, str. 204.

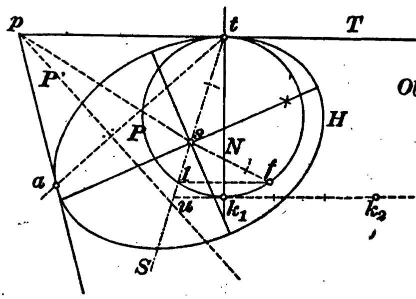
[4]) Čech: „O křivkovém plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru", Čas. pro pěstování matematiky, roč. L, str. 219.

[5]) Viz na př. práci prof. Sobotky: „Zur Krümmung der Kegelschnittevoluten und Konstruktion des Kegelschnittes durch fünf benachbarte Punkte einer ebenen Kurve", Věstník společ. nauk, roč. 1902, XVII.

$k_2s : k_1s = 4 : 1$ (obr. 1). Všechny tyto kuželosečky mají pro bod t tutéž Steiner.-Pelzovu parabolu P^2, ježto tato jest určena tečnami T, N ($t \ldots N \perp T$), poslední dotýká se v k_1, a přímkou S jako řídicí přímkou. Libovolné přímce P, jdoucí bodem t, přináleží tudíž týž pól p ke všem kuželosečkám svazku, který je na tečně T v průsečíku s tečnou P' paraboly P^2, kolmou k P. Tečnu P' dostaneme, jestliže v t vztyčíme $t1$ kolmo k P, až protne kolmici z k_1 na S v bodě 1. Tečna P' jde pak bodem 2 na N, kde $21 \parallel T$. Ježto $12 \# tp$, je též patrno, jak obráceně k bodu p jednoznačně stanovíme P. Když $P \equiv T$, pak $p \equiv t$. Naopak projektivita $T(p \ldots t \ldots)$

Obr. 1.





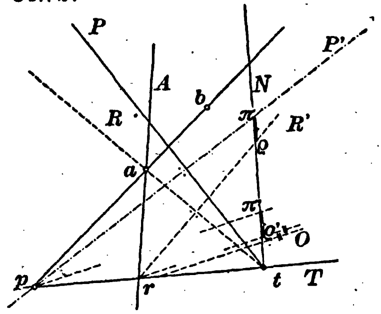
Obr. 1a)

$\barwedge t(P \ldots T \ldots)$ stanoví St.-Pelzovu parabolu P^2 a tím též k_1, k_2. Přímce N odpovídá dotyčný bod tečny T se St.-Pelzovou parabolou P^2. Je zde zřejmá geometrická souvislost obou určení prvku třetího řádu křivky K v bodě t. Projektivita (polarita) ta je singulární, jestliže bod t je bodem obratu křivky K, ježto k_1 je úběžným bodem normály N, parabola P^2 skládá se z bodů t a $k_1\infty$ a singulární prvky jsou tu t, T.

V obr. 1a) ukázáno, jak lze snadno konstruovati kuželosečku H, jež má s křivkou K v bodě t společný prvek třetího řádu (hyperoskuluje K) a jde daným ještě bodem a. Dán-li prvek třetího řádu prvým a druhým středem křivosti k_1, k_2, určíme průměr S kuželosečky H ($k_1u = \frac{1}{3}k_2k_1$). Steiner-Pelzova parabola P^2 bodu t má ohnisko f na kružnici, opsané nad tk_1 jako průměrem, a to souměrně položené k průsečíku 1 kružnice s S vzhledem k N ($\widehat{k_1f} = \widehat{k_11}$). Tečna P' k P^2, sestrojená kolmo k $P \equiv ta$, určí pól p přímky P. Průměr, jdoucí bodem p kuželosečky H, dá její střed s a její osy jsou tečnami k P^2 z s, jež se snadno určí i omezí. Jak by se sestrojila kuželosečka hyperoskulující, dána-li pro ni tečna místo bodu a, je patrno.

Při prostorové křivce K určuje Čech prvek třetího řádu v obecném jejím bodě t s tečnou T a oskulační rovinou ω, jistou parabolickou trilinearitou mezi řadou bodů p na tečně T, svazkem rovin ϱ o ose T a svazkem paprskovým o středu t a rovině ω. I to lze synteticky ukázati takto: Proložme přímkou T libovolnou rovinu ϱ a promítněme křivku K ze dvou bodů ${}^1s$, ${}^2s$ této roviny! Obě kuželové plochy promítací $({}^1sK)$, $({}^2sK)$ mají společnou tečnou rovinu ϱ a dotýkají se vzájemně v bodě t. Pronik obou kuželových ploch má v bodě t dvojný bod a křivka K je částí tohoto proniku. Libovolná rovina, obsahující tečnu T, protíná tudíž obě kuželové plochy v oskulujících se křivkách a oskulační rovina ω křivky K pak v křivkách, majících společný prvek řádu třetího, jemuž přináleží podle předchozího jistá polarita $t\,(P \ldots) \barwedge T\,(p \ldots)$. Měníme-li jeden z bodů ${}^1s$, ${}^2s$ v rovině ϱ a druhý ponecháme, je patrno, že středové průměty křivky K z bodů téže roviny ϱ na oskulační rovinu ω křivky mají společný prvek třetího řádu, t. j. hyperoskulují se. Ježto středové průměty křivky K z bodů její oskulační roviny ω mají v průmětu bodu t obrat, dostáváme tak k určení prvku třetího řádu křivky K Čechovu charakteristickou trilinearitu o singulární trojině t, T, ω.

Obr. 2.



b) Důkaz a geometrický význam Smith-Mehmkeova dotykového invariantu j dvou dotýkajících se křivek. Mějme dvě dotýkající se křivky rovinné C_1, C_2 v bodě t a mysleme si kuželosečky K_1, K_2, jež v bodě t oskulují křivky C_1, C_2, jdou libovolným bodem a a dotýkají se v něm libovolné tečny A! Pak invariant dotyku j podle B. Segrea je roven dvojpoměru těchto dvou dvojnásob se dotýkajících kuželoseček a dvou kuželoseček složených svazku jimi určeného. Dvojpoměr ten nezávisí na poloze bodu a a tečny A.[6]) Pro důkaz a obecnější význam tohoto invariantu uvažujme o dvou kuželosečkách K_1, K_2, dotýkajících se v bodě t tečny T (obr. 2). Kuželosečky tyto určují svazek o základních bodech t, ${}^1t$ (${}^1t$ je soumezný bod k t na T), a, b (v obrazci kuželosečky K_1, K_2 nerýsovány a zvoleny jen body a, b). Steiner-Pelzovy paraboly bodu t vzhledem ke kuželosečkám svazku tvoří řadu o základních tečnách T, N $(t \ldots N \perp T)$, P', kde P' je kolmo sdružená polára k poláře P bodu $p \equiv (T, ab)$. Řada těchto parabol je promětná se svazkem kuželoseček a body dotyku parabol

---

[6]) Viz Fubini-Čech: „Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces," str. 20.

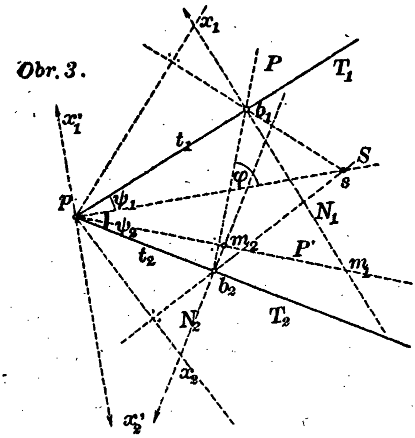
s normálou N, což jsou středy křivosti kuželoseček svazku, tvoří tudíž řadu prometnou se svazkem kuželoseček. Vyplývá to též z konstrukce tohoto bodu dotyku, zvolíme-li v bodě a tečnu A k některé kuželosečce svazku. Kolmo sdružená polára R', jdoucí bodem $r \equiv (AT)$ kolmo k jeho poláře $R \equiv at$, vytíná na N bod ϱ a přímka P' bod π. Přenesme od t na T a N délky rp, $\varrho\pi$ v souhlasném směru s těmito úsečkami! Pak rovnoběžky, sestrojené body p, r se spojnicí O vytčených bodů, dají na N body π', ϱ'. Poloměr křivosti kuželosečky, vytčené ve svazku, $= \pi'\pi = \varrho'\varrho$. Ve svazku jsou dvě složené kuželosečky a to S_1 (ta, tb), S_2 (T, ab), z nichž prvá má střed křivosti v t a druhá v úběžném bodě normály N. Dvojpoměr kuželoseček (K_1, K_2, S_1, S_2) je tudíž roven poměru poloměrů křivosti kuželoseček K_1, K_2 v bodě t. Ježto prvý dvojpoměr je invariantní při jakékoliv projektivní transformaci, je i poměr poloměrů křivosti invariantní.

Místo bodů a, b možno zvoliti duálně dvě tečny A, B a dostaneme řadu kuželoseček K_1, K_2, dotýkajících se T v bodě t, a tečen A, B. I zde St.-Pelzovy paraboly pro bod t tvoří řadu projektivní s prvou řadou, mající základní tečny T, N a kolmou sdruženou poláru P' k spojnici bodu t s průsečíkem (AB). Invariant dotykový j je zde opět roven poměru poloměrů křivosti kuželoseček K_1, K_2 v bodě t a ten je stejný s dvojpoměrem obou kuželoseček K_1, K_2 a složených kuželoseček řady, určených těmito kuželosečkami K_1, K_2. Kuželosečky ty skládají se z párů bodových (AB), t a (AT), (BT).

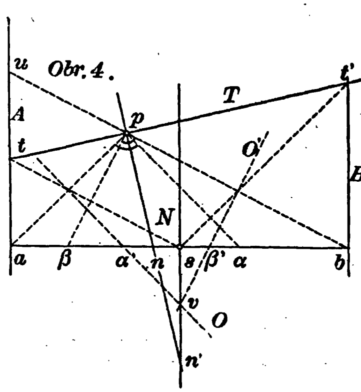
Z obojího tohoto odvození je též patrný geometrický význam invariantu Smith-Mehmkeova nejen podle C. Segrea, ale i duální, totiž tento: Zvolme libovolnou přímku A a veďme z jejího bodu m, blízkého k průsečíku (AT), tečny U_1, U_2 ke křivkám C_1, C_2, dotýkající se těchto v okolí bodu t! Pak dvojpoměr (A, mt, U_1, U_2) má za limitu pro $m \equiv (AT)$ hodnotu invariantu j. Invariantu j lze výhodně užíti k stanovení zbývajícího průsečíku (tečny) kuželoseček K_1, K_2, jež se dotýkají v bodě t téže tečny T, mají v bodě tom dané středy křivosti s_1, s_2, známe-li ještě jejich společný bod (tečnu) s příslušnými tečnami A_1, A_2 (s příslušnými body dotyku a_1, a_2).

c) Dotýkají-li se kuželosečky tečen T_1, T_2 v bodech b_1, b_2, (obr. 3), pak poloměry křivosti v bodech b_1, b_2 každé z nich jsou v konstantním poměru, rovném poměru trojmocí délek tečen T_1, T_2 od bodů b_1, b_2 k jejich průsečíku $p \equiv (T_1T_2)$. Věta tato různě dokázána, na př. diferenciální geometrií podal důkaz Suchárda ve Věstníku společnosti nauk, roč. 1903, čís. VI a nazývá větu tu Lieovou, jenž prvou část věty té uveřejnil roku 1879. Podle „Encyklopedie“ III C 1, str. 76 větu tu nalezl prvý Liouville

r. 1844.[7]) Větu tuto lze dokázati též Steiner-Pelzovými parabolami bodů b_1, b_2 takto: Abychom vytkli určitou kuželosečku svazku, zvolme její střed s na průměru S, jdoucím bodem p a půlícím bodem tětivy b_1b_2! Obě St.-Pelzovy paraboly bodů b_1, b_2 k této kuželosečce mají společnou tečnu P', jež je kolmo sdruženou polárou bodu p ($P' \perp P \equiv b_1b_2$). Prvá parabola má mimo to tečny T_1, N_1 ($N_1 \perp T_1$) a řídicí přímku sb_1 a druhá tečny T_2, N_2 a řídicí přímku sb_2. Užijeme-li věty, že délky tečen paraboly mezi dvěma jejími tečnami promítají se na libovolnou přímku směrem



Obr. 3.



Obr. 4.

osy paraboly do stejných délek, bude poloměr křivosti v b_1 roven úseku m_1x_1 normály N_1, kde $px_1 \perp sb_1$ a $m_1 \equiv (P'N_1)$ a poloměr křivosti v b_2 je roven podobně určené úsečce m_2x_2 na N_2. Mění-li střed s svoji polohu na S, dostáváme všechny kuželosečky, dotýkající se vzájemně v b_1, b_2, a patrně body x_1 a x_2 na N_1 a N_2 probíhají dvě podobné řady, jak patrno pro polohu $s \equiv p$, kdy x_1 a x_2 jsou úběžnými body normál N_1, N_2. Pár bodový m_1, m_2 odpovídá si též v případě, že s je v půlicím bodě tětivy b_1b_2. Je tudíž $m_1x_1 : m_2x_2 = = \ldots =$ konst. Hodnotu té konstanty dostaneme snadno v případě paraboly svazku, t. j. když s splyne s úběžným bodem průměru S a pak příslušné body x'_1, x'_2 jsou na $x'_1x'_2p \perp S$. Označíme-li $b_1p = t_1$, $b_2p = t_2$, $\sphericalangle ST_1 = \psi_1$, $\sphericalangle ST_2 = \psi_2$, $\sphericalangle SP = \varphi$, jest

$$m_1x'_1 = \frac{t_1 \sin\varphi}{\sin\psi_1 \sin(\varphi - \psi_1)}, \quad m_2x'_2 = \frac{t_2 \sin\varphi}{\sin\psi_2 \sin(\varphi - \psi_2)}.$$

Ježto však $\sin\psi_2 : \sin\psi_1 = t_1 : t_2$ a $\sin(\varphi - \psi_2) : \sin(\varphi - \psi_1) = t_1 : t_2$, je $m_1x'_1 : m_2x'_2 = t_1^3 : t_2^3$, čímž jest citovaná věta dokázána.

[7]) Jiná odvození viz: Mannheim „Cours de géométrie descriptive", str. 211; Staudt: „Beiträge zur Geometrie der Lage", str. 283.

d) Ředitel *V. Jeřábek* v XLI ročníku t. časopisu uveřejnil následující vlastnost kuželoseček, jež jest též uvedena v „Encyklopedii“ III A B 9, str. 1082: Spojíme-li vrcholy a, b téže osy kuželosečky s libovolným jejím bodem p (obr. 4), vytínají kolmice $p\alpha \perp ap$, $p\beta \perp bp$ na ose ab úsečku konstantní délky = dvěma parametrům té osy. Větu tuto lze též dokázati užitím St.-Pelzových parabol, patřících k bodům t, t', v nichž vrcholové tečny A, B protínají tečnu T bodu p. Spojnice ap, bp jsou směry sdružených průměrů kuželosečky. Je tudíž $ts \parallel pb$ a $t's \parallel pa$. Protíná-li pb tečnu A v bodě u, je $tu = at$ a proto normála N v bodě p protíná osu ab v bodě n, kde $na = \beta n$. Osy souměrnosti O, O' tětiv ap, bp protínají druhou osu v témž bodě v, který půlí úsek sn' normály N na té ose, počítaný od středu s kuželosečky. Řady $\alpha' \ldots, \beta' \ldots$, jež vytínají osy O, O' na ose ab, mění-li bod p svoji polohu na kuželosečce, jsou podobny, jak ihned vyplyne uvažováním St.-Pelz. parabol bodů t a t'. Bod $\alpha'(\beta')$ půlí vzdálenost bodu n od středu křivosti ve vrcholu $a(b)$. Středu s, počítanému k prvé řadě, odpovídá střed křivosti vrcholu b v druhé řadě a naopak, z čehož jde, že řady ty jsou shodné, takže $\alpha'\beta' = \text{konst.} = a - \frac{b^2}{a}$, značíme-li $as = a$ a druhou poloosu b. Délka $\alpha\beta = 2a - 2\alpha'\beta' = \pm 2\frac{b^2}{a} = \pm 2p$, což bylo dokázati.

*

Sur quelques applications de la parabole de Steiner-Pelz.

(Extrait de l'article précédent.)

On emploie ici cette parabole à la solution de quelques problèmes de géométrie, à savoir:

1°. Le rapport entre l'élément du troisième ordre d'une courbe de Čech et le premier et deuxième centre de courbure de la courbe au point considéré.

2°. Détermination de la signification géometrique de l'invariant du contact j de Smith-Mehmke, plus générale que celle donnée par M. B. Segre.

3°. Démonstration du théorème de Liouville disant que les rayons de courbure en deux points d'une conique sont en raison directe des cubes des tangentes de la courbe en ces points, mésurées entre ces points et leur point de rencontre.

4°. Démonstration de la proposition de Jeřábek qui dit que les points d'intersection d'un axe de la conique avec les perpendiculaires menées d'un point arbitraire de la conique aux droites joignant ce point aux sommets de cet axe, ont une distance constante pour tous les points de la conique.