Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Methodické příspěvky ku počtu differenciálnímu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 4, 225--232

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109411`

Methodické příspěvky ku počtu differenciálnímu.

Podává

Dr. F. J. Studnička.

Jakož známo,*) počíná literatura differenciálního počtu rokem 1684, kdy geniální *Leibnic* uveřejnil v Menckenově sborníku lipském, *„Acta eruditorum"* zvaném, epochální své pojednání *„Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus"*.

Od té doby rozvinul a ustálil se infinitesimální počet tento tak všestranně, hlavně přispěním klassického díla *Eulerova „Institutiones calculi differencialis"* zvaného a r. 1753 vydaného, že dnes nesnadno jednati o jeho doplnění. Jestiť i postup, jakým se jednotlivé poučky zvláštního počtu differenciálního odvozují a seřaďují, takořka jednou pro vždy stanoven, takže spisy o počtu differenciálním nyní kdekoli vydané jsou si veskrz podobny.

A předc možná, jakož tuto se dokazuje, methodický postup všeobecně zavedený podstatně změniti, zjednodušiti a zdokonaliti.

Vyhovuje-li předložená funkce nějaká

$$y = f(x) \tag{1}$$

známým podmínkám, stanoví se první derivace její výrazem limitním

$$Df(x) \equiv \frac{dy}{dx} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = f'(x). \tag{2}$$

Aby se pak v jednotlivých případech jednoduchých, kde představuje $f(x)$ určitý zvláštní výraz, nevyžadovalo obecného

*) Viz: *Studnička* „O původu a rozvoji počtu differenciálního a integrálního", Praha, 1879, pág. 23.

výměru tohoto ku příslušnému limitování, sestavují se pravidla zvláštní, podle nichž se v případech těchto přímo určuje žádaná derivace, což znamená, že obecné pravidlo vzorcem (2) vyjádřené se nahražuje případným pravidlem zvláštním. Soubor těchto pravidel tak zvaných funkcí základních se týkající jest pak obsahem první hlavní části počtu differencialního.

A tu především nutno stanoviti, jak se skládá první derivace součinu dvou funkcí, platí-li tedy místo relace (1)

$$y = \varphi'x) \,.\, \psi(x) \,. \tag{3}$$

Jak patrno, vyjde tu podlé vzorce (2) napřed

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(x+\varepsilon)\psi(x+\varepsilon) - \varphi(x)\psi(x)}{\varepsilon} \,;$$

aby se pak na pravé straně docílilo známých výrazů limitních, nutno ji doplniti členem

$$\varphi(x+\varepsilon) \,.\, \psi(x) - \varphi(x+\varepsilon)\psi(x) \,,$$

takže se po přiměřěné úpravě obdrží

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varepsilon=0} [\varphi(x+\varepsilon) \frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon} + \psi(x) \frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon}] \,,$$

z čehož konečně podle pravidel limitních vyplyne, použijeme-li zároveň účelně vzorce (2),

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi'(x) + \psi(x)\varphi'(x) \,, \tag{4}$$

známý to vzorec derivační, dosud prostřednictvím logarithmů odvozovaný.

Kdybychom pak měli n různých funkcí

$$\varphi_k(x) = u_k \,, (k = 1, 2, 3, \ldots, n) \,, \tag{5}$$

a z nich násobením složili výraz součinový

$$y = u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \ldots u_n \,, \tag{6}$$

zjednáme si spůsobem známým snadno příslušný vzorec derivační

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u'_k}{u_k} \,.\, u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \,. \tag{7}$$

A vzorec tento, zahrnující v sobě i jednoduchý případ relací (4) vyjádřený, vede pak pohodlně k stanovení derivace ostatních funkcí základních.

Jestli totiž ve zvláštním případě

$$u_k = \varphi_k(x) = u\,, \tag{8}$$

obdrží se místo součinu (6) mocnina, takže bude

$$y = u^n \tag{9}$$

a tedy vzorec (7) se promění v

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \,.\, u'\,, \tag{10}$$

kdež arci značí n číslo *celistvé* a *positivní.*

Kdyby však bylo *negativní,* takže by místo relace (9) platilo

$$y = u^{-n} = \frac{1}{u^n}\,, \tag{11}$$

možná ji nahraditi tvarem součinovým

$$y \,.\, u^n = 1\,,$$

načež pomocí vzorce (4) a (10) obdržíme napřed

$$y' \,.\, u^n + y \,.\, nu^{n-1} u' = 0$$

a tedy řešením podle y' se zřetelem k relaci (11)

$$y' = -\, nu^{-n-1} \,.\, u' = \frac{-\, nu'}{u^{n+1}}\,, \tag{12}$$

což znamená, že pravidlo vzorcem (10) vyjádřené platí i pro negativní celistvé n.

Téhož obratu možná užiti, značí-li n číslo *lomené,* takže

$$y = u^{\frac{p}{q}}\,, \tag{13}$$

jelikož se tu napřed obdrží

$$y^q = u^p,$$

z toho pak derivováním podle vzorce (10) vyplývá

$$qy^{q-1} \cdot y' = pu^{p-1} \cdot u',$$

takže řešením této relace podle y' konečně se zřetelem k (13) vychází na jevo, že tu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} \cdot u' \tag{14}$$

souhlasně s pravidlem dřívějším.

Kdyby konečně n bylo číslo *irracionální*, vyjádřené nekonečnou řadou decimální

$$n = \check{c}_0 + \frac{\check{c}_1}{10} + \frac{\check{c}_2}{10^2} + \frac{\check{c}_3}{10^3} + \ldots, \tag{15}$$

vylučující periodičnost v opakování číslic $\check{c}_n$, představujících kterékoli hodnoty z řady

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 9,$$

položme k vůli kratšímu vyznačení hodnoty jeho

$$\frac{\check{c}_k}{10^k} = \alpha_k,$$

načež obdržíme pro n výraz

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k, \tag{16}$$

kdež α_0 značí příslušné číslo celistvé, vedle toho pak platí

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0. \tag{17}$$

Naše relace (9) vyjádří se pak tvarem součinovým

$$y = u^{\Sigma \alpha_k} = u^{\alpha_1} \cdot u^{\alpha_2} \cdot u^{\alpha_3} \ldots u^{\alpha_n},$$

ukončíme-li řadu (15) členem n-tým. A tu platí podle vzorce (7) a (10) především

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k u^{\alpha_k - 1}}{u^{\alpha_k}} \, . \, u^{\alpha_1} \, . \, u^{\alpha_2} \, . \, u^{\alpha_3} \ldots u^{\alpha_n} \, . \, u' \, ,$$

z čehož po příslušném zkrácení vyjde napřed

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma \alpha_k u^{\Sigma \alpha_k - 1} \, . \, u' \, ,$$

tedy konečně se zřetelem k relaci (16) a (17) opět

$$\frac{dy}{dx} = n u^{n-1} \, . \, u'$$

souhlasně se vzorcem (10), ač tu značí n číslo irracionální.

Zjevno tudíž, že vzorec tento má platnost pro *libovolné reální číslo n.*

A na tomto základě možná snadno stanoviti derivaci *podílu* dvou funkcí původním podmínkám derivačním vyhovujících. Jestiť především

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \varphi(x) \, . \, \psi(x)^{-1} \, , \tag{18}$$

takže se tu podlé vzorce (4) a (10) obdrží

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \, . \, \psi(x)^{-1} - \varphi(x) \, . \, \psi(x)^{-2} \, . \, \psi'(x) \, ,$$

což se vyjadřuje účelnějším tvarem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x) \, . \, \psi(x) - \varphi(x) \, . \, \psi'(x)}{\psi(x)^2} \, .^{*)} \tag{19}$$

---

*) Ostatně přijde se k tomuto vzorci též přímo z výměru původního výrazem (2) daného. Jestiť tu podlé něho

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\dfrac{\varphi(x+\varepsilon)}{\psi(x+\varepsilon)} - \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{\varepsilon} \, ,$$

anebo zjednodušíme-li čitatele,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\psi(x)\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)\psi(x+\varepsilon)}{\varepsilon\psi(x)\psi(x+\varepsilon)} \, ;$$

Další zjednodušení derivačních dedukcí základních vztahuje se k nižším funkcím transcendentním.

Užijeme-li známého výměru

$$y \equiv e^u = \lim_{\omega=\infty} \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^\omega, \tag{20}$$

obdržíme podlé vzorce (10) napřed, značíce symbolem u funkci proměnné x,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\omega=\infty} \omega \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{\omega - 1} \cdot \frac{u'}{\omega},$$

uvážíme-li, že *derivace limity rovná se limitě derivace*; a z posledního výrazu vyplývá přímo

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot u', \tag{21}$$

jelikož po zkrácení faktorem ω platí

$$\lim \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{\omega-1} = \lim \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^\omega \cdot \lim \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{-1} = e^u.$$

A podobně obdržíme pro známou funkci logarithmickou

$$y = lu = \lim_{\varepsilon=0} \frac{u^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tag{22}$$

podlé vzorce (10) napřed

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon u^{\varepsilon-1} \cdot u'}{\varepsilon} = \frac{u'}{u} \lim_{\varepsilon=0} u^\varepsilon,$$

---

abychom pak upravili pravou stranu k limitování, připojme tam v čitateli rozdíl

$$\varphi(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x),$$

načež obdržíme přiměřeným členů seřaděním

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\psi(x) \lim \psi(x+\varepsilon)} \left[\psi(x) \lim \frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon} - \varphi(x) \lim \frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon}\right],$$

což vede přímo ke vzorci (19), jakmile užijeme známých pravidel k stanovení limit zde obsažených.

Možná tedy bez pravidla zvláštního derivaci součinu stanovícího určiti takto i pravidlo, podlé něhož se derivuje součin dvou funkcí, takže zodvození příslušného vorce (19) přímo zařaditi možná za vzorec (4).

a provedeme-li naznačené limitování, konečně

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}. \tag{23}$$

Znajíce pak derivovati funkci exponenciální, snadno si zjednáme derivační vzorce pro funkce jak hyperbolické tak kyklické. Jestiť na př., jakož známo,*)

$$K(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{24}$$

$$S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{25}$$

z čehož derivováním podle známého pravidla vyplývá

$$\begin{aligned} DK(x) &= S(x), \\ DS(x) &= K(x). \end{aligned} \tag{26}$$

Podobně se obdrží ze známé relace

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{27}$$

jednoduchým derivováním

$$ie^{ix} = D\cos x + iD\sin x = i\cos x - \sin x,$$

a porovnáním oboustranných členů konečně

$$D\cos x = -\sin x, \tag{28}$$

$$D\sin x = \cos x, \tag{29}$$

jakož známo.

Ač by možná bylo ještě další vzorce základní přímým derivováním stanoviti, jakož vidno na př. ze známé relace**)

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{1+ix}{1-ix},$$

kdež derivováním vznikne známý vzorec

*) Viz: *Studnička* „Výklady o funkcích monoperiodických", Praha, 1892, pag. 32.

**) Ibid. pag. 131.

$$D \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}, \tag{30}$$

nepřikládáme tomuto *přímému* spůsobu odvozovacímu tolik důležitosti praktické, abychom chtěli jím nahraditi obvyklý spůsob na obrácení závislosti založený. Třebať tu praemiss, nejsoucích tak na snadě, jako jest základ methody dosud užívané. Nicméně prospěšno s hlediska theoretického, možná-li se vyhnouti *nepřímým* methodám odvozovacím vůbec. Jak rychle se přijde tu neb onde k hledanému výsledku, o tom rozhoduje obsažnost těch kterých praemiss, při čemž arci jest snaha badatelova, aby *minimem logické práce dosáhl maxima logického úspěchu.*

Váhy a vážení.*)

Napsal

Dr. Vincenc Strouhal,
professor české university v Praze.

§ 1. Úvahy základní.

Rovnováha na jednotlivých strojích vede k podmínce, kterouž lze vždy vyjádřiti rovnicí tvaru

$$P : Q = b : a.$$

V rovnici této jest poměr dvou sil určen poměrem dvou délek. Lze-li délky tyto měřiti, jest dána možnost, rovnovahou samou zkoumati, po případě číselně stanoviti poměr dvou sil původu jakéhokoliv, a je-li jedna z obou známa, druhou určiti.

Má-li se určování toto díti se žádoucí přesností, musí stroj býti povahy takové, aby i nejmenší pozměnění poměru silového, pro který rovnováha platí, ihned způsobem očividným se ukázalo, aby tedy ihned nastal pohyb, ale nikoli pohyb bez ustání, stále se urychlující, jako by tomu bylo na př. u kladek neb kladkostrojů, nýbrž jen pohyb do nové rovnovážné polohy. To

*) Ukázka z „Mechaniky“. (Sborníku Jednoty českých mathematiků čís. IV.)