Rovnice jsou až na jediný periodický faktor r tytéž jako pro specielní případ, kdy obě tělesa rotují v kruhu. Volíme-li

$$dt = \frac{r^2}{c}\, dv,$$

dostaneme rovnice, vzhledem k tomu, že $c^2 = a\,(s^1 - e^2) = p$, kde p je parametr ellipsy

$$x'' - 2y' = \frac{r}{p} \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$$y'' + 2x' = \frac{r}{p} \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

při čemž v je pravou anomalií a je mezi r, v a p vztah

$$\frac{r}{p} = \frac{1}{1 + e \cos v},$$

takže rovnice mají definitivní tvar

$$\frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} = \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} = \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Došli jsme k úplné analogii. Při pohybu v kruhu je neodvisle proměnnou čas, jenž je úhlem rovnoměrné rotace systému, jako pravá anomalie úhlem nerovnoměrné rotace v pohybu elliptickém.

Několik podrobností k pohybu elliptickému.

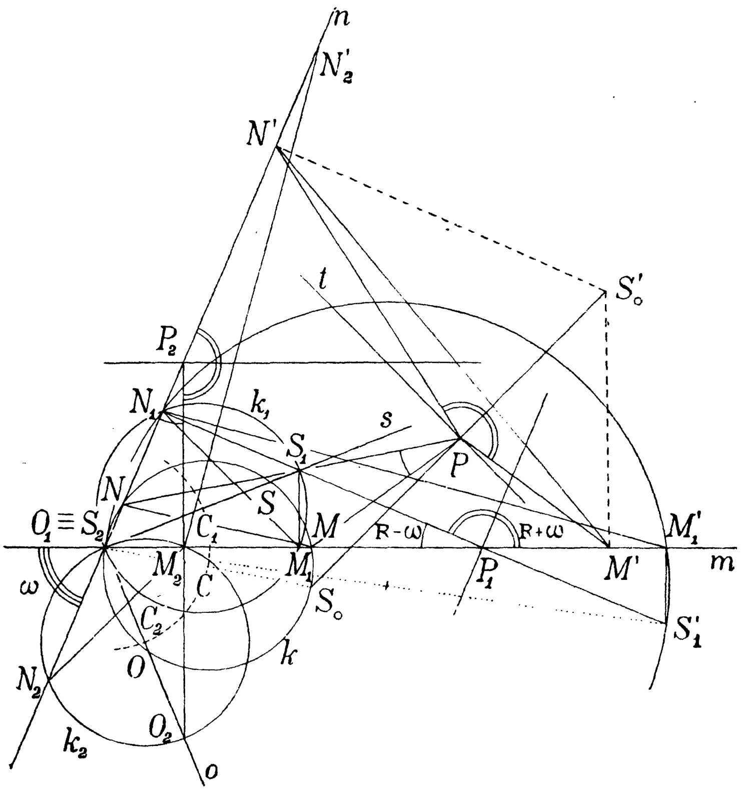
Píše Dr. **Jos. Kounovský.**

Dán-li pohyb neproměnného útvaru rovinného přímými trajektoriemi dvou bodů útvaru, vytvořuje každý bod roviny při tomto pohybu ellipsu. Pozorujme *mechanické vytvoření ellipsy, určené svými sdruženými průměry, jsou-li oběma základními trajektoriemi elliptického pohybu právě polohy průměrů daných.*

1. Budiž dána ellipsa dvěma sdruženými poloprůměry O_1P_1 a O_1P_2 na přímkách m a n (Obr. 1.). Jest tedy především určiti trojúhelník MNP, jehož vrchol P opisuje danou ellipsu, pohybují-li se vrcholy M a N resp. po trajektoriích m a n.

Sestrojme $P_1N_1 \perp n$ a $P_2M_2 \perp m$; učiníme-li $P_1M_1 = P_2M_2$ a $P_2N_2 = P_1N_1$, jsou $\triangle M_1N_1P_1 \cong \triangle M_2N_2P_2$ již dvě polohy žádaného trojúhelníka.

Sestrojíme-li pro polohu P_1 okamžitý střed otáčení S_1, který nachází se na P_1N_1 tak, že $M_1S_1 \perp m$, patrno, že vskutku



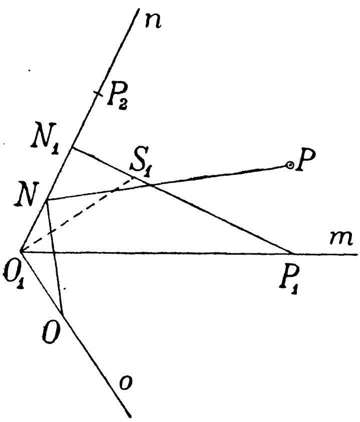
Obr. 1.

délka normály ellipsy $P_1S_1 = O_1P_2$, což jest vztah základní. Body kružnice k_1, opsané $\triangle M_1N_1O_1$ a procházející okamžitým středem otáčení S_1, vykonávají při uvažovaném pohybu přímé trajektorie v paprskovém svazku O_1; na př. bod S_1 probíhá přímku $s \equiv S_1O_1$ a bod k němu diametrálný O_1 přímku $o \perp s$.

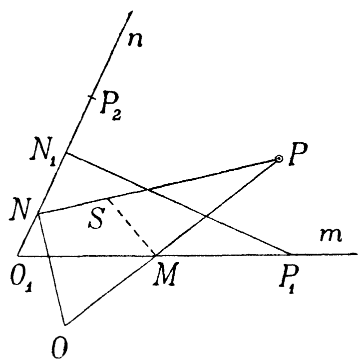
Učiníme-li obdobně $P_1M'_1 = P_2M_2$ a $P_2N'_2 = P_1N_1$, obdržíme dvě polohy jiného trojúhelníka $\triangle M'_1N_1P_1 \cong \triangle M_2$

N'_2P_2, který vrcholem P při pohybu druhých vrcholů po základních trajektoriích opisuje danou ellipsu; pro polohu P_1 sestrojen okamžitý střed otáčení S'_1, $P_1S'_1 = O_1P_2$.

Označíme-li poloosy ellipsy a, b, jest $O_1S_1 = a - b$, $O_1S'_1 = a + b$. Svírají-li obě základní trajektorie úhel ω, jest $M_1N_1 = (a - b) \sin \omega$, $M'_1N_1 = (a + b) \sin \omega$. V obr. vyznačena obecná poloha pohybujících se trojúhelníků MNP a $M'N'P$, jichž rozměry jsou: $MN = (a - b) \sin \omega$, $M'N' = (a + b) \sin \omega$, $MP = M'P = b_1 \sin \omega$, $NP = N'P = a_1 \sin \omega$, značí-li $a_1 = O_1P_1$ a $b_1 = O_1P_2$ délky daných sdružených poloprůměrů. Úhel pohy-



Obr. 2.



Obr. 3.

bujícího se trojúhelníka při vrcholu P jest $R - \omega$ resp. $R + \omega$. Okamžitými středy otáčení S_0 a S'_0 pro tuto obecnou polohu prochází normála bodu P, tečna $t \perp PS_0$.

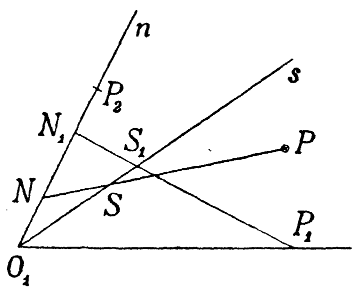
2. Tuto *kinetickou konstrukci dalších bodů ellipsy dané sdruženými průměry možno zjednodušiti.*

Užijeme na př. pohybu základního trojúhelníka $O_1P_1N_1$ (Obr. 2.). Sestrojíme-li okamžitý střed otáčení pro tuto polohu, $P_1S_1 = O_1P_2$, jest trajektorie bodu O kolmice $o \perp O_1S_1$. V obr. znázorněno vytvoření obecného bodu P ellipsy pravým úhlem ONP.

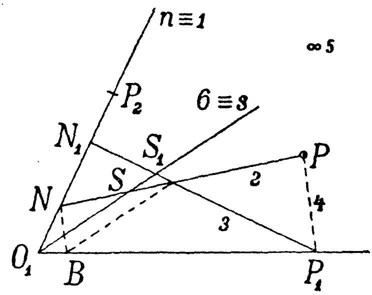
Obr. 2. podává také konstrukci: *Ellipsa dána průměrem* O_1P_1, *polohou sdruženého* n *a bodem* P. *Omeziti průměr na* n. Sestrojíme dle předešlé konstrukce pravý úhel PNO a $O_1S_1 \perp O_1O$; pak $O_1P_2 = P_1S_1$.

Jiné řešení této úlohy patrno z obr. 3. Sestrojí se opět pravoúhlý $\triangle PNO$; jeho přepona PO určí na trajektorii m polohu bodu M a $MS \perp PO$ protíná PN v příslušné poloze S pohybujícího se okamžitého středu otáčení S_1 z polohy základní, takže $O_1P_2 = PS$.

Jinou konstrukci obecného bodu P ellipsy ze sdružených průměrů ukazuje obr. 4. Sestrojen základní $\triangle O_1P_1N_1$ a okamžitý střed otáčení S_1 pro tuto polohu a užito pohybů bodů N a S na trajektoriích n resp. s. V obrazci zakreslena obecná poloha pohybující se bodové trojiny NSP na přímce; konstrukci tuto možno provésti proužkem papíru.



Obr. 4.



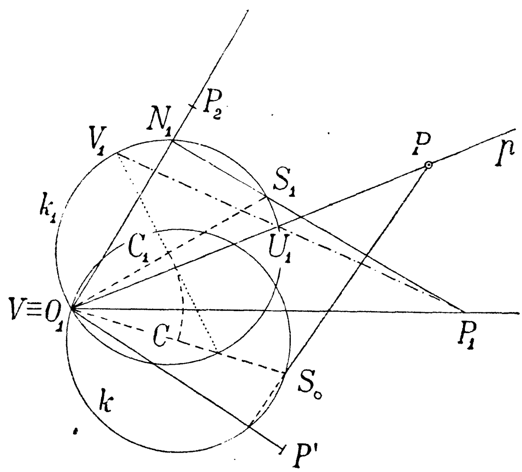
Obr. 5.

Tohoto vztahu možno také použíti, dána-li ellipsa průměrem O_1P_1, polohou průměru sdruženého n a bodem P, k omezení průměru sdruženého. Sestrojíme základní polohu P_1N_1 a obecnou $PN = P_1N_1$ a hledáme trajektorii s středem O_1 tak, aby $PS = P_1S_1 = O_1P_2$. Trajektorii s sestrojíme na př. (obr. 5.) projektivně jako šestou tečnu paraboly určené tečnami $n \equiv 1$, $PN \equiv 2$, $P_1N_1 \equiv 3$ a $PP_1 \equiv 4$ (∞ vzdálená tečna 5) větou Brianchonovou, kde $O_1 \equiv 1.6$; bod Brianchonův jest B. Podobné trojiny bodové NSP a $N_1S_1P_1$, řezy to tečen paraboly pevnými jejími tečnami 2 a 3, jsou vskutku v tomto případě shodny.

3. Obraťme se nyní k úloze: *Dána ellipsa svými sdruženými průměry O_1P_1 a O_1P_2; omeziti další libovolný její průměr p.*

Konstrukci provedeme užitím kružnice k_1, opsané v základní poloze $\triangle O_1M_1N_1$ a procházející okamžitým středem otáčení S_1, diametrálným k bodu O_1 (Obr. 6.). Uvažujeme spolu pohyb spojnice $P_1 U_1$, kde U_1 jest průsečík $k_1 . p$. Tento bod pohybuje se na přímé trajektorii p a druhý průsečík V_1 spojnice $P_1 U_1$ s kružnicí k_1 na trajektorii $O_1 V_1$. Zaujme-li při pohybu tento průsečík polohu $V \equiv O_1$, vidno, že $VP = V_1 P_1$ jest délka žádaného poloprůměru a P bodem ellipsy.

Sestrojíme-li pro polohu P okamžitý střed otáčení S_0 na přímce $VS_0 \perp VV_1$, $VS_0 = O_1 S_1$, udává délka normály PS_0 délku poloprůměru $O_1 P'$, sdruženého ku $O_1 P$, $O_1 P' \perp PS_0$. Pravé úhly sestrojí se výhodně užitím kružnic k_1 a k.

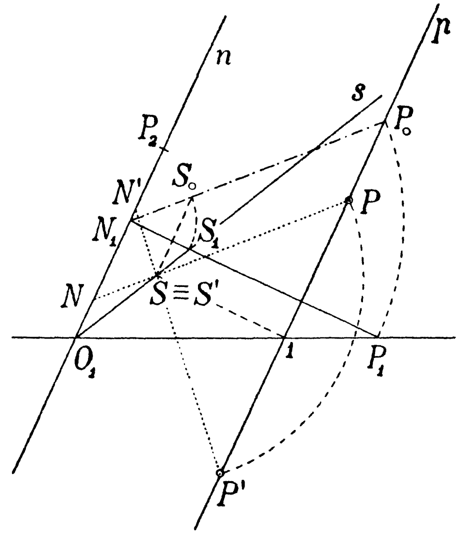


Obr. 6.

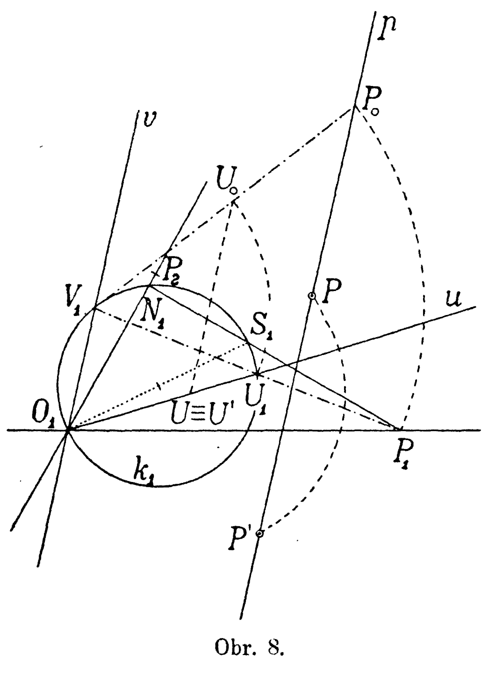
4. Dále naskytá se tu úloha: *Sestrojiti průsečíky ellipsy dané sdruženými průměry s přímkou.*

Buďiž především přímka rovnoběžna s jedním z daných sdružených průměrů, na př. $p \parallel O_1 P_2$ (Obr. 7.). Sestrojme základní $\triangle\, O_1 P_1 N_1$ i s okamžitým středem otáčení S_1, $P_1 S_1 = O_1 P_2$, a trajektorii s tohoto bodu. Jest patrně určiti ty dvě polohy NSP a $N'S'P'$ ~~základní~~ trojiny bodové $N_1 S_1 P_1$, pro které $S \equiv S'$ a body P a P' jsou na p. Rovnoramenný trojúhelník SPP' má půlící bod 1 základny PP' na průměru $O_1 P_1$; tedy kolmice $1S \perp p$ určí bod S na s a $SP = SP' = S_1 P_1 = O_1 P_2$, čímž průsečíky sestrojeny.

K bodu $S \equiv S'$ možno dospěti také tak, že sestrojíme zá-


n
p
s
P_2
P_0
S_0
N'
P
N_1
S_1
N
$S \equiv S'$
O_1
1
P_1
P'

Obr. 7.


p
P_0
v
U_0
P_2
V_1
N_1
P
u
S_1
O_1
$U \equiv U'$
U_1
P_1
k_1
P'

Obr. 8.

kladní trojinu mezi rovnoběžkami n a p v poloze $N_1 S_0 P_0$ a učiníme pak $S_0 S \parallel p$.

Sestrojíme-li soustavu rovnoběžek s jedním průměrem, možno takto ellipsu danou dvojinou sdružených průměrů rychle vytvořiti.

Je li přímka p polohy obecné (Obr. 8.), sestrojíme základní polohu kružnice k_1 a středem ellipsy přímku $v \parallel p$, jež jest trajektorií pro základní polohu $V_1 \equiv v \,.\, k_1$; dále použijeme ještě pohybu bodu U, jehož základní poloha $U_1 \equiv k_1 \,.\, V_1 P_1$, na trajektorii u. Nyní jest umístiti trojinu VUP resp. na přímkách v, u, p. Umístíme zase základní trojinu mezi rovnoběžkami v a p v poloze $V_1 U_0 P_0$, $V_1 P_0 = V_1 P_1$, $V_1 U_0 = V_1 U_1$, a učiníme pak $U_0 U \parallel p$, čímž určí se bod $U \equiv U'$ na u; sestrojíme-li $UP = UP' = U_1 P_1$, jsou průsečíky P a P' přímky p s ellipsou určeny.

Sem náleží také úloha: *Sestrojiti trojúhelník MNP daného tvaru a velikosti tak, aby jeho vrcholy nacházely se resp. na daných přímkách m, n, p.* Zvolí se na př. přímky m a n za základní trajektorie pohybu elliptického o středu $O_1 \equiv m \,.\, n$, sestrojí se jedna poloha $M_1 N_1$ a kružnice k_1 opsaná trojúhelníku $O_1 M_1 N_1$ a určí se průsečíky přímky p s ellipsou vytvořenou pohybem třetího vrcholu P_1 základního trojúhelníka, opět pomocnými trajektoriemi u a v, kde $v \parallel p$.

Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kuželoseček.

Dr. Q. Vetter. — (Dokončení.)

§ 8. *Vedeme-li ke každé kuželosečce $\Sigma_1 \nu$ v průsečících s H_1 tečny, prochází z nich jedna vždy bodem z_1 a druhá z'_1; podobně i tečny v průsečících s H'_1 procházejí vždy bodem z_1 a z'_1.* (Steiner, l. c. 475.)

Nechť rovina přímkou H_1 (obr. 1.) kolmo na půdorysnu vedená protíná plochu α v kuželosečce Θ. Kužel ϑ, dotýkající se α podél této křivky, má vrchol v a', pólu přímky H_1 vzhledem k A. Tečná rovina ϱ ke kuželi γ podél Q protíná Θ ve dvou bodech, v nichž vedeme tečné roviny ke kuželi ϑ. Průsečnice těchto rovin s ϱ promítají se ve zmíněné tečny. Lze ukázati, že tyto průsečnice vytvoří dvě zborcené plochy 4. stupně