Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 4-5, 328--353,353a--353b

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109392

Prosinec 1918.

2. J. II. z. $14^h\ 28^m\ 43^s$.

● 3. 4^h kruhové zatmění Slunce u nás neviditelné — 9^h *konjunkce* Venuše s Měsícem — *Min. Algolu* $16^h\ 49^m$.

4. 23^h *konjunkce* Merkura s Měsícem.

5. J. I. z. $14^h\ 9^m\ 41^s$.

6. 7^h *konjunkce* Marta s Měsícem — *Min. Algolu* $13^h\ 38^m$.

7. J. I. z. $8^h\ 38^m\ 10^s$.

9. *Min. Algolu* $10^h\ 27^m$ — J. II. z. $17^h\ 03^m\ 25^s$.

☽ 10.

12. *Min. Algolu* $7^h\ 16^m$ — J. I. z. $16^h\ 3^m\ 48^s$.

13. J. II. z. $6^h\ 20^m\ 46^s$; Jupiter vychází v $5^h\ 25^m$.

14. J. I. z. $10^h\ 32^m\ 20^s$.

15. 22^h *Merkur* v konjunkci s *Venuší* (Merkur $1^0\ 48'$ sev.).

16. J. III. z. $5^h\ 37^m\ 45^s$; Jupiter vychází v $5^h\ 12^m$;

○ 17.

18. 5^h *Merkur ve spodní konjunkci se Sluncem* — 15^h *konjunkce* Jupitera s Měsícem.

19. J. I. z. $17^h\ 58^m\ 05^s$.

20. J. II. z. $8^h\ 55^m\ 22^s$.

21. J. I. z. $12^h\ 26^m\ 39^s$.

22. 5^h Slunovrat zimní: *začátek zimy*.

23. J. I. z. $6^h\ 55^m\ 17^s$ — J. III. z. $9^h\ 37^m\ 41^s$.

☾ 24.

26. *Min. Algolu* $15^h\ 21^m$.

27. J. II. z. $11^h\ 30^m\ 00^s$.

28. J. I. z. $14^h\ 21^m\ 07^s$.

29. *Min. Algolu* $12^h\ 10^m$.

30. J. I. z. $8^h\ 49^m\ 47^s$ — J. III. z. $13^h\ 37^m\ 00^s$.

31. 3^h *konjunkce* Merkura s Měsícem. *S.*

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a$$
$$x^6 + x^4y^2 + x\,y^4 + y^6 = b.$$

(Speciálně pro $a = 15$, $b = 85$.)

Dr. *Jar. Bílek.*

Řešení. Zaslal p. *Frant. Bukovský*, stud. VII. tř. g. v Praze III., jednor. dobrov.

Dané rovnice lze psáti ve tvaru

$$(x+y)(x^2+y^2)=a,\quad (x^4+y^4)(x^2+y^2)=b,$$

položiti pak $x+y=\xi$, $x^2+y^2=\eta$, takže $xy=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta)$, $x^4+ + y^4=(x^2+y^2)-2x^2y^2$ a rovnice nabudou tvaru

$$\xi\eta=a,\quad \eta^3-\tfrac{1}{2}(\xi^2-\eta)^2\eta=b.$$

Vypočteme-li z prvé rovnice η a dosadíme do druhé, dostaneme pro ξ rovnici $$a\xi^6-2(a^2-b)\xi^3-a^3=0.$$

x, y jsou pak kořeny rovnice $t^2-\xi t+\dfrac{1}{2}\left(\xi^2-\dfrac{a}{\xi}\right)=0.$

Ve speciálním případě dostáváme kořeny x, $y = 1, 2$, ostatní jsou složitější.

Jak poznamenává pan *Frant. Kotán*, stud. III. roč. pedag. v Příbrami, mohli bychom dané rovnice psáti ve tvaru

$$x^3\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=a,\quad x^6\left(1+\frac{y^4}{x^4}\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=b$$

položiti $y/x=t$, vyloučiti pak z obou rovnic x. Po snadné úpravě bychom dostali pro t reciprokou rovnici

$$(t^4+1)(b-a^2)+2b(t^3+t^2+t)=0.$$

2.

Ohniskem F kuželosečky vedena tetiva M_1M_2. Sestrojme bod G tak, že $M_1F=M_2G$. Jaké je geometrické místo bodu G, otáčí-li se tetiva M_1M_2 kolem ohniska.

Prof. *Fr. Granát.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Průcha*, stud. I. r. na Král. Vinohradech.

Společná rovnice kuželoseček v souřadnicích polárních zní:

$$\varrho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi} \tag{1}$$

béřeme-li ohnisko za pól a polopaprsek ohniskem kolmo ku řídící přímce vedený a ji neprotínající za osu polárnou. Tetiva ohniskem vedená nechť svírá s osou x úhel φ. Protíná-li danou kuželosečku v bodech M_1 a M_2, jsou úsečky $\varrho_1=\overline{FM_1}$ a $\varrho_2=\overline{FM_2}$ dány přímo rovnicí (1):

$$\varrho_1=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},\quad \varrho_2=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

neboť průvodič ϱ_1 svírá s osou x úhel φ a průvodič ϱ_2 úhel $\pi + \varphi$. Ihned pak máme rovnici hledaného geometrického místa:

$$\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2\,\varepsilon p \cos \varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}.$$

Přejdeme-li k souřadnicím pravoúhlým, o počátku F a ose x totožné s osou polárnou, bude poslední rovnice zníti

$$\varrho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \text{ a } \cos\varphi = x_1/\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

dosadíme-li

$$y_1^2 = x_1^2\,(\varepsilon - 1) + 2\,\varepsilon p\, x_1. \qquad (2)$$

Uvažujme nejprvé případ, že $\varepsilon \neq 1$, t. j. daná kuželosečka je ellipsou neb hyperbolou.

Pošineme-li počátek a osu y zvolených souřadnic pravoúhlých do středu dané kuželosečky $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, učiníme-li tedy: $x_1 = x +$ a $y_1 = y$, obdrží rovnice hledaného místa geometrického tvar

$$\frac{x^2}{e^2} \pm \frac{a^2 y^2}{b^2 e^2} = 1\,.$$

Je-li daná kuželosečka ellipsa (hyperbola) bude hledané geometricka místo tedy zase elipsa (hyperbola) o polosách e, be/a; a její hlavní osa (vedlejší) leží v hlavní ose (vedlejší) kuželosečky dané. Je-li daná kuželosečka parabolou, pak plyne pouhým dosazením $\varepsilon = 1$, do rovnice (2): $y_1^2 = 2px_1$ rovnice hledaného geometrického místa, je-li počátek souřadnic pravoúhlých v ohnisku paraboly dané. Jest to tedy jak vidno, zase parabola, s danou shodná, vzniklá z ní pošinutím o délku $\frac{1}{2}p$, mající tedy vrchol v ohnisku paraboly dané.

3.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = a$$
$$x^2 - y^2 + xy = b.$$

Rudolf Hruša.

Řešení. Zaslal p. *Frant. Bukovský,* stud. VII. tř. g. v Praze II., jednor. dobrov.

Dané rovnice upravme na tvar

$$(x^2 - y^2)^2 - x^2y^2 = a,\quad x^2 - y^2 + xy = b$$

a zaveďme nové neznámé $x^2 - y^2 = u$, $xy = v$, takže zní

$$u^2 - v^2 = a,\quad u + v = b.$$

Dělíme-li první rovnici druhou, dostaneme $u - v = a/b$. Další postup je již snadný.

4.

Na rameni daného úhlu γ jsou dány body A, B, jichž vzdálenosti od vrcholu k úhlu γ jsou a, b; nalézti na druhém rameni bod D tak, aby úhel ADB byl co největší.

Škol. rada *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. ***Miloslav Valouch***, stud. V. b, r. v Praze II. v Truhlářské ul.

Opišme nad AB jako tětivou kružnici tak, aby se dotýkala druhého ramene úhlu γ v bodě D. Obvodový úhel ADB jest větší než kterýkoli úhel AMB, leží-li M vně kružnice, a menší než kterýkoli úhel ANB, leží-li N uvnitř kružnice. Protože všechny body ramene úhlu γ, jež se dotýká sestrojené kružnice, leží vně až na dotyčný bod D, uvnitř pak neleží žádný bod jeho, jest úhel ADB ze všech největší. Vzdálenost bodu D od vrcholu úhlu γ rovná se $\sqrt{ab}$.

5.

Sestrojiti konfokální ellipsu a hyperbolu, je-li dán jich průsečík, střed a ohnisko.

Jan Kodl, posl. č. techn. v Praze.

Řešení. Zaslal p. ***Miloslav Valouch***, stud. V. b, r. v Praze II. v Truhlářské ul.

Je-li dán střed a ohnisko ellipsy (hyperboly), známe též druhé ohnisko; součet (rozdíl) průvodičů daného průsečíku obou kuželoseček rovná se délce hlavní osy hledané ellipsy (hyperboly). Sestrojíme-li na základě těchto prvků kterýmkoli známým způsobem ellipsu a hyperbolu, protnou se samozřejmě v daném bodě.

6.

V libovolném šestiúhelníku $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ buďtež po řadě strany půleny body Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6. Dokázati, že trojúhelníky $Q_1Q_3Q_5$ a $Q_2Q_4Q_6$ mají společné těžiště.

Zásob. off. *J. Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Bartuška*, stud. r. v Čes. Budějovicích.

Souřadnice bodů P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 buďtež x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; x_5, y_5; x_6, y_6. Pak půlicí body Q_1, Q_2, R_3, Q_4, Q_5, Q_6

mají souřadnice

$$\frac{x_1+y_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2};\ \frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2};\ \frac{x_3+x_4}{2},\ \frac{y_3+y_4}{2};$$

$$\frac{x_4+x_5}{2},\ \frac{y_4+y_5}{2};\ \frac{x_5+x_6}{2},\ \frac{y_5+y_6}{2};\ \frac{x_6+x_1}{2},\ \frac{y_6+y_1}{2}.$$

Souřadnice těžiště trojúhelníka $Q_1\,Q_3\,Q_5$ jsou

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\frac{x_5+x_6}{2}\right)=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6},$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}+\frac{y_5+y_6}{2}\right)=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6},$$

Souřadnice těžiště trojúhelníku $Q_2\,Q_4\,Q_6$ jsou pak

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_4+x_5}{2}+\frac{x_6+x_1}{2}\right)=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6},$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_4+y_5}{2}+\frac{y_6+1}{2}\right)=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6},$$

z čehož totožnost těžiště obou trojúhelníků vyplývá.

7.

Který trojúhelník s vrcholy na třech soustředných kružnicích má největší plochu?

Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení.

Označme vrcholy trojúhelníku A, B, C, společný střed kružnic O, jich poloměry $OA=r_1$, $OB=r_2$, $OC=r_3$ a nechť je $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$. Případ $r_1=r_2=r_3$, kdy jedná se o to, vepsati do kružnice trojúhelník o největší ploše, což nastane pro trojúhelník rovnostranný, pak nebudeme ani uvažovati.

Dále označme úhly $BOC=x$, $COA=y$, takže úhel $AOB=2\pi-x-y$. Plocha trojúhelníku ABC je pak

$$\tfrac{1}{2}r_2 r_3 \sin x+\tfrac{1}{2}r_1 r_3 \sin y-\tfrac{1}{2}r_1 r_2 \sin(x+y).$$

Jedná se tedy o vyšetřování funkce

$$f(x,y)=\frac{\sin x}{r_1}+\frac{\sin y}{r_2}-\frac{\sin(x+y)}{r_3}.$$

Pro ekstrémní hodnoty musí býti $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

t. j.
$$\cos x : \cos y : \cos(x+y)=r_1 : r_2 : r_3. \tag{1}$$

Snadno bychom se přesvědčili, že to nastane v případě, že výšky trojúhelníku ABC se protínají v společném středu kružnic O. (K tomuto výsledku lze přijíti též snadnou úvahou geometrickou.) Úhly x, y lze pak určiti takto: Aby podmínka (1) byla splněna, položme

$$r_1 = \lambda \cos x, \quad r_2 = \lambda \cos y, \quad r_3 = \lambda \cos(x+y). \tag{2}$$

Vyloučením x, y dostaneme k určení λ rovnici třetího stupně

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - (r_3{}^2 + r_2{}^2 + r_1{}^2)\lambda + 2r_1 r_2 r_3 = 0. \tag{3}$$

Ježto je

$$\varphi(-\infty) = -\infty.\ \varphi(-r_3) = r_3(r_1+r_2)^2,\ \varphi(-r_2) = r_2(r_2+r_3)^2,$$
$$\varphi(-r_1) = r_1(r_2+r_3)^2,\quad \varphi(0) = 2r_1 r_2 r_3,\quad \varphi(r_1) = -r_1(r_2-r_3)^2,$$
$$\varphi(r_2) = -r_2(r_1-r_3)^2,\quad \varphi(r_3)^2 = -r_3(r_1-r_2)^2,\quad \varphi(\infty) = \infty$$

má rovnice tato tři kořeny reálné, a sice $\lambda' < -r_3$, $\lambda'' > r_3$ [$= r_3$ je-li $r_1 = r_2$], $0 < \lambda''' < r_1$ [$= r_1$ pro $r_2 = r_3$]. Pro λ''' je však $r_1/\lambda''' > 1$, takže vzhledem ke (2) neodpovídá tomuto řešení reálný úhel x.

Abychom rozhodli, nastane-li skutečně ekstrémní hodnota, utvořme kvadratickou formu *)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2. \tag{4}$$

V našem případě je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\sin x}{r_1} + \frac{\sin(x+y)}{r_3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\sin(x+y)}{r_3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\sin y}{r_2} + \frac{\sin(x+y)}{r_3}.$$

Dikriminant Δ formy (4) lze uvésti na tvar

$$\lambda^2 \Delta = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}(x+y)(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) =$$
$$= \frac{1 - \cos x \cos y \cos(x+y)}{\cos x \cos y \cos z}, \text{ takže } \Delta = \frac{\lambda}{r_1 r_2 r_3}\left(1 - \frac{r_1 r_2 r_3}{\lambda^3}\right).$$

I vidíme, že pro $\lambda = \lambda''$ je $\Delta > 0$, takže nenastane ekstrémní hodnota, kdežto pro $\lambda = \lambda'$ je $\Delta > 0$, takže ekstrémní hodnota nastane, a bude $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lambda \frac{\sin y}{r_1 r_3} < 0$ pro $0 < y < \pi$ a dle (2) dokonce $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$, takže nastane maksimum. Pak je též $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$. Průsečík výšek leží uvnitř trojúhelníku ABC, $-\frac{1}{2}\lambda =$ poloměru kružnice opsané.

*) Viz na př. Weyr, Počet differenciálný, str. 260—267.

8.

Sestrojiti kuželosečku, dáno-li
a) ohnisko, tečna a dva body,
b) ohnisko, dvě tečny a jeden bod.

Mádle, posl. č. techn. v Praze.

Řešení. Zaslal p. *František J. Prokop*, stud. VI.*b* tř. r. ve Vršovicích.

Ke konstrukci použijeme vět:

Paty kolmic z ohnisek na tečny kuželosečky spuštěných leží na kružnici K opsané ze středu kuželosečky poloměrem rovným délce hlavní poloosy.

Kružnice L, opsané nad průvodiči bodů kuželosečky jakožto průměry, dotýkají se kružnice K opsané ze středu kuželosečky poloměrem rovným délce hlavní poloosy. U ellipsy kružnice ty dotýkají se K uvnitř, u hyperboly vně.

a) Z daného ohniska F spustíme kolmici na danou tečnu t. Obdržíme pak bod G. Pak dané body A, B spojíme s F a nad průměry $\overline{AF}$, $\overline{BF}$ sestrojíme kružnice L_1, L_2. Abychom vyhledali střed hledané kuželosečky, budeme řešiti úlohu: sestrojiti kružnici K (jejíž střed je středem hledané kuželosečky) tak, aby procházela daným bodem G a dotýkala se dvou daných kružnic L_1, L_2.

b) S daného ohniska F spustíme kolmice na dané tečny u, t. Paty těchto kolmic označme A, B. Daný bod P kuželosečky spojme s F a nad průměrem $\overline{CF}$ sestrojíme kružnici L. Chtějíce jako v prvém případě stanoviti střed hledané kuželosečky, řešíme úlohu tuto: Sestrojiti kružnici K tak, aby procházela dvěma danými body A, B a dotýkala se kružnice K.

9.

Jsou-li a, b, c strany trojúhelníku, a_1, b_1, c_1 vzdálenosti libovolného bodu od jeho vrcholů, dokažte, že platí nerovnosti

$$aa_1 + bb_1 \geqq cc_1$$
$$bb_1 + cc_1 \geqq aa_1$$
$$cc_1 + aa_1 \geqq bb_1.$$

Prof. *Jaromír Pilnáček*.

Řešení. Zaslal p. *Václav Svoboda*, domobranec, stud. VII. r. v Č. Budějovicích.

Pišme $\sphericalangle\, b_1c_1 = \alpha$, $\sphericalangle\, a_1c_1 = \beta$, $\sphericalangle\, a_1b_1 = \gamma$. Pak $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Patrně $(a_1 \sin\alpha + b_1 \sin\beta + c_1 \sin\gamma)^2 \geqq 0$.

Proveďme mocnění a nahraďme

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,\ \sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma$$

(což platí vzhledem k tomu, že $\alpha + \beta = 2\pi - \gamma$) a podobně pro ostatní úhly. Násobme dále celou nerovnost c_1^2 a přidejme na obě strany $(a_1 c_1 \cos\alpha + b_1 c_1 \cos\beta - c_1^2 \cos\gamma - a_1 b_1)^2$.

Levou stranu lze teď upraviti ve tvar

$$(b_1^2 + c_1^2 - 2b_1 c_1 \cos\alpha)(a_1^2 + c_1^2 + 2a_1 c_1 \cos\beta) = a^2 b^2,$$

ježto dle věty cosinové je

$$a^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1 c_1 \cos\alpha \quad b^2 = a^2 + c_1^2 - 2a_1 c_1 \cos\beta.$$

Poněvadž a, b jsou čísla kladná, nemění se nerovnost odmocněním a tedy $ab \geqq a_1 c_1 \cos\alpha + b_1 c_1 \cos\beta - c_1^2 \cos\gamma - a_1 b_1$.

Násobme kladným číslem $2a_1 b_1$ a přidejme na obě strany

$$a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 = 2a_1^2 b_1^2 + a_1^2 c_1^2 + b_1^2 c_1^2 - 2a_1^2 b_1 c_1 \cos\alpha - 2a_1 b_1^2 c_1 \cos\beta.$$

Potom $(aa_1 + bb_1)^2 \geqq c_1^2 (a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos\gamma)$.

Vzhledem ke kladnosti čísla $aa_1 + bb_1$ lze zase odmocniti a tedy $aa_1 + bb_1 \geqq cc_1$ a obdobně druhé dvě nerovnosti, jak bylo dokázati.

Jiný důkaz.

Vrcholy daného trojúhelníku označme A, B, C, onen libovolný bod O. Trojúhelníku ABC opišme kružnici, protínající OA, OB, OC v bodech A', B', C'. Pak je $OA . OA' = OB . OB' = OC . OC' = p$.

Z podobnosti trojúhelníků $OAB = OA'B'$ plyne $A'B' : OB' = AB : OA$, tedy $A'B' = \frac{OB' . AB}{OA} = OB' . OB \frac{AB}{OA . OB}$,

t. j. $A'B' = p \frac{c}{a_1 b_1}$, a též $B'C' = p \frac{a}{b_1 c_1}$, $C'A' = p \frac{b}{c_1 a_1}$.

I bude $A'B' : B'C' : C'A' = cc_1 : aa_1 : bb_1$.

cc_1, aa_1, bb_1 jsou úměrny stranám trojúhelníku. Z toho tvrzení ihned plyne.

Rovnost v některé z relací může dle věty Ptolomeovy jedině nastati leží-li body $OABC$ na téže kružnici.

10.

Dokažte, že kružnice opsaná polárnímu trojúhelníku kuželosečky $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ protíná pod pravým úhlem kružnici $x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2$.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Václav Svoboda,* domobranec, stud. VII. r. v Č. Budějovicích.

Řešme úlohu pro ellipsu; pro hyperbolu by byl důkaz zcela obdobný. Trojúhelník mějž vrcholy $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$; i platí podmínky polarity

$$R_1 \equiv \frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} - 1 = 0$$

a cyklickou záměnou $R_2 = 0$, $R_3 = 0$.

Opsaná kružnice K mějž rovnici

$$x^2 + y^2 + Ax + By + M = 0,$$

kde M je mocnost počátku ke kružnici K. Veličiny A, B, M jsou dány rovnicemi

$$P_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + M = 0, \text{ a obdobně } P_2 = 0, \; P_3 = 0.$$

Utvořme nové rovnice:

$$R_2 y_2 - R_1 y_1 \equiv S_3 \equiv \frac{x_3}{a^2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2) = 0,$$

$$R_2 x_2 - R_1 x_1 \equiv T_3 \equiv \frac{-y_3}{b^2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_1 - x_2) = 0,$$

a podobně další analogické S_1, T_1, S_2, T_2.

Z rovnic S plynou rovnice

$$x_3^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = - a^2 x_3 (y_1 - y_2) \dots (S'_3) \text{ a další dvě } (S'_1)\,(S'_2)$$

Z rovnic T plynou rovnice

$$y_3^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = b^2 y_3 (x_1 - x_2) \dots (T'_3) \text{ a další dvě.}$$

Znásobme P_1 výrazem $(x_2 y_3 - x_3 y_2)$, P_2 výrazem $(x_3 y_1 - x_1 y_3)$ P_3 výrazem $(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ a sečtěme, použivše rovnice (S'), (T'). I bude

$$- a^2 [x_3 (y_1 - y_2) + x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1] +$$
$$+ b^2 [y_3 (x_1 - x_2) + y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1)] +$$
$$+ M [x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3] = 0.$$

Zde se dá krátit výrazem v závorce, který značí dvojnásobnou plochu polárního trojúhelníka a tedy je různý od nully. Vyjde pak $M = a^2 + b^2$.

Tím je dokázáno, že tečny z počátku vedené ke K mají délku $\sqrt{a^2 + b^2}$ = poloměru K t. j. obě kružnice protínají se pod pravým úhlem.

Klademe-li všude $-b^2$ místo $+b^2$, máme výsledky pro hyperbolu.

11.

Jsou dány tři kužnice K_1, K_2, K_3 o poloměrech O_1, O_2, O_3; jest sestrojiti kružnici K, aby chordála kružnice K_1 a K procházela bodem A_1, chordála kružnice K_2 a K bodem A_2 a chordála kružnic K_3 a K bodem A_3. Prof. *Pleskot.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VII. g. v Praze III.

Chordála dvou kružnic jest geometrické místo středů kružnic, které dané dvě kružnice protínají pravoúhle. Opíšeme-li tedy z bodu A_1 jakožto středu kružnici $\overline{k_1}$ poloměrem rovným tečně z bodu A_1 ke kruhu K_1 vedené, pak kružnice K musí tuto kružnici pravoúhle protínati. Podobně zjednáme si kružnice $\overline{k_2}$ a $\overline{k_3}$ ze středu A_2 a A_3 opsané, jež kružnice K_2 a K_3 pravoúhle protínají. Kružnice K protíná tedy pravoúhle kružnice $\overline{k_1}$, $\overline{k_2}$, $\overline{k_3}$; průsečík chordál těchto tří kružnic jest tedy středem O kružnice K a její poloměr jest roven délce tečny z bodu O k některé z kružnic $\overline{k_1}$, $\overline{k_2}$, $\overline{k_3}$ vedené.

12.

Jsou dány tři kružnice K_1, K_2, K_3 o poloměrech r_1, r_2, r_3, které se navzájem vně dotýkají; těch dotýkají se jiné dvě kružnice K a K', jichž poloměry nechť jsou ϱ a ϱ'. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right).$$

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Václav Svoboda*, domobranec, stud. VII. r. v Č. Budějovicích.

Označme O střed kružnice K. Budiž dále

$$\sphericalangle\, O_2O_1O_3=\alpha,\quad \sphericalangle\, O_2O_1O=\alpha_1,\quad \sphericalangle\, OO_1O_3=\alpha_2,$$

tak že $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

Vypočtěme z trojúhelníku $O_1O_2O_3$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}}$$ a obdobně z trojúhelníku OO_1O_2

$$\sin\frac{\alpha_1}{2}=\sqrt{\frac{r_2\varrho}{(r_1+r_2)(r_1+\varrho)}},\qquad \cos\frac{\alpha_1}{2}=\sqrt{\frac{r_1(r_1+r_2+\varrho)}{(r_1+r_2)(r_1+\varrho)}}$$

a z trojúhelníku OO_1O_3

$$\sin\frac{\alpha_2}{2}=\sqrt{\frac{r_3\varrho}{(r_1+r_3)(r_1+\varrho)}},\qquad \cos\frac{\alpha_2}{2}=\sqrt{\frac{r_1(r_1+r_3+\varrho)}{(r_1+r_3)(r_1+\varrho)}}$$

Dosaďme tyto výrazy do rovnice

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}$$

a odstraňme jmenovatele. Vychází

$$(r_1+\varrho)\sqrt{r_2r_3}=\sqrt{r_1r_2\varrho\,(r_1+r_3+\varrho)}+\sqrt{r_1r_3\varrho\,(r_1+r_2+\varrho)}.$$

Dělme součinem $r_1 \varrho \sqrt{r_2 r_3}$ a označme

$$A = \sqrt{\frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{r_3}\right)}$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right)}$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}.$$

Potom bude $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r_1} = B + C$ a obdobně

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r_2} = C + A$$

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r_2} = A + B.$$

Z těchto rovnic vypočtěme na př.

$$2A = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 2\sqrt{\frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)}.$$

Povýšíme-li a převedeme-li vše na levou stranu, získáváme kvadratickou rovnici, jíž hoví $1/\varrho$:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{\varrho}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right) + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} - \frac{2}{r_1 r_2} - \frac{2}{r_1 r_3} - \frac{2}{r_2 r_3} = 0.$$

Jest tedy skutečně:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^1} = 2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

13.

Jest dán pravý úhel o vrcholu O a kružnice K o středu J, která se obou ramen dotýká: dále je dán bod P. Jest sestrojiti ke kružnici K tečnu, která protíná rameno úhlu v bodech A a B a to tak, že spojnici AB lze zříti z bodu P pod pravým úhlem.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *F. Havelka,* stud. VII. tř. r. g. v Praze III.

Všimněme si případu, kdy kružnice K je pravoúhlému trojúhelníku ABO vepsána (kružnice ta může býti trojúhelníku ABO též připsána). Sestrojme kružnici k nad průměrem OS, kdež S je střed přepony AB. Kružnice ta prochází patrně středem M úsečky OP.

Dokážeme o ní dále, že se kružnice K dotýká.*) Označíme-li totiž d vzdálenost středů obou kružnic, bude $d^2 = (\varrho - \frac{1}{4}a)^2 + (\varrho - \frac{1}{4}b)^2 = 2\varrho^2 - \frac{1}{2}\varrho(a+b) - \frac{1}{16}c^2 = \varrho^2 + \varrho[\varrho - \frac{1}{2}(a+b)] + \frac{1}{16}c^2 = \varrho^2 - \frac{1}{2}c\varrho + \frac{1}{16}c^2 = (\varrho - \frac{1}{4}c)^2$, ježto v pravoúhlém trojúhelníku poloměr kružnice vepsané $\varrho = \frac{1}{2}(a+b-c)$. Je tedy $\pm d = \varrho - \frac{1}{4}c$, z čehož tvrzení přímo plyne. Můžeme tedy sestrojiti kružnici k na základě toho, že dotýká se kružnice K a prochází body O a M. Pak již snadno sestrojíme bod S a na základě toho, že $SA = SB = SO$, i trojúhelník OAB.

14.

Strany trojúhelníka jsou kořeny rovnice

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

Jsou-li α, β, γ úhly jeho, čemu se rovná

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma?$$

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Frant. Bukovský*, stud. VII. g. v Praze III.

Dle známých vzorců je

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

a podobné výrazy pro $\sin\beta$ a $\sin\gamma$.
Sečtením čtverců těchto výrazů nabudeme:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 4s(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right)$$

$$= 4s(s-a)(s-b)(s-c)\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}.$$

Dle předložené rovnice platí:

$$a + b + c = 2s = p, \quad \text{tedy } s = \tfrac{1}{2}p.$$

$$ab + ac + bc = q,$$

I bude $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)$

$$= p^2 - 2c.$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) = s^3 - 2ps^2 + qs - r = \tfrac{1}{8}(4pq - p^3 - 8r).$$

Dosazením těchto hodnot do součtu $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ obdržíme:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{p(p^2-2q)(4ps - p^3 - 8r)}{4r^2}.$$

---

*) Kružnice ta je kružnicí Feuerbachovou („devíti bodů") pravoúhlého trojúhelníku (Vojtěch, r. VI. str. 78.). Ta i pro trojúhelník obecný se dotýká kružnice vepsané a všech tří kružnic připsaných.

15.

Danému trojúhelníku opsati trojúhelník rovnostranný o největší ploše. Prof. *Ed. Pleva.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Průcha*, stud. r. na Král. Vinohradech.

Geom. místo vrcholů B_1 nad stranou AC jest kruhový oblouk nad tětivou $\overline{AC}$ a středovém úhlu příslušném 120^0.

Podobně pro vrcholy C_1 jest geom. místem oblouk k_2.

Jest nyní úlohou: Vésti bodem A sečnu tak, aby součet tětiv $\overline{AB}_1 + \overline{AC}_1$ byl největší. Je známo a dá se snadno ukázati, že ona sečna stojí kolmo na společné sečně kružnic k_1 a k_2.

Stanoví tudíž kolmice v bodě A nad společnou sečnou postavená na kružnicích vrcholy B_1 a C_1. Spojnice těchto s vrcholy B a C určí třetí vrchol A_1 hledaného trojúhelníku.

16.

Dokažte, že kružnice opsaná z ohniska ellipsy jako středu poloměrem b jest půlena kružnicí opsanou nad hlavní osou jako průměrem. Na základě této vlastnosti sestrojiti ellipsu, je-li dáno ohnisko F, délka vedlejší osy b a dvě tečny t_1 a t_2. Týž.

Řešení. Zaslal pan *Václav Svoboda*, domobranec, studující VII. r. v Č. Budějovicích.

Vedeme-li ohniskem F kolmici k hlavní ose, půlí tato kružnici poloměrem b kolem F opsanou a protíná ji v bodech, jejichž vzdálenost od středu $= \sqrt{e^2 + b^2} = a$. Tyto body leží tedy na kružnici kolem středu opsané poloměrem a, čímž prvá část úlohy jest dokázána.

Je-li nyní dáno F, b, t_1, t_2, sestrojme kružnici k_1 poloměrem b kolem F a paty T_1, T_2 kolmic $FT_1 \perp t_1$, $FT_2 \perp t_2$. Poněvadž kružnice k_2, opsaná nad hlavní osou jako průměrem, má procházeti body T_1, T_2, vidíme, že jde o to, sestrojiti kružnici k_2 jdoucí dvěma danými body T_1, T_2 a protínající danou kružnici diametrálně. Sestrojíme-li libovolnou kružnici k'_2, procházející body T_1, T_2, seče chordála k_1, k'_2 přímku T_1T_2 v témž bodě T jako chordála k_1, k_2, neboť chordály tří kružnic procházejí týmž bodem. Chordála k_1, k_2 neboli FT udává směr vedlejší osy. Střed pak nalezneme jak průsečík hlavní osy a symmetrály bodů T_1, T_2.

17.

Dokažte, že

$$1 + \frac{1}{2}\binom{k+1}{1} + \frac{1}{2^2}\binom{k+2}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k} = 2^k$$

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Václav Svoboda*, domobranec, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích.

Z binomické věty plyne

$$2^{2k} = (1+1)^{2k} = 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k}{2} + \ldots + \binom{2k}{2k-1} + 1 =$$

$$= 2 + 2\binom{2k}{1} + 2\binom{2k}{2} + \ldots + 2\binom{2k}{k-1} + \binom{2k}{k},$$

a tedy

$$2^{2-k} = 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k}{2} + \ldots + \binom{2k}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}.$$

Pišme

$$\binom{2k}{p} = \binom{2k-1}{p-1} + \binom{2k-1}{p-1}$$

ve všech členech, vyjímaje poslední. Potom

$$2^{2k-1} = 2 + 2\binom{2k-1}{1} + 2\binom{2k-1}{2} + \ldots + 2\binom{2k-1}{k-2}$$

$$+ \binom{2k-1}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{2k}{k},$$

$$2^{2k-2} = 1 + \binom{2k-1}{1} + \binom{2k-1}{2} + \ldots + \binom{2k-1}{k-2}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2k-1}{k-1} + \frac{1}{2^2}\binom{2k}{k};$$

podobně

$$2^{2k-3} = 1 + \binom{2k-2}{1} + \binom{2k-2}{2} + \ldots + \binom{2k-2}{k-3}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2k-2}{k-2} + \frac{1}{2^2}\binom{2k-1}{k-1} + \frac{1}{2^3}\binom{2k}{k},$$

a tak dále, až konečně

$$2^k = 1 + \frac{1}{2}\binom{k+1}{1} + \frac{1}{2^2}\binom{k+2}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\binom{2k-1}{k-1}$$

$$+ \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k}.$$

18.

Dokažte, že

$$\binom{k}{l}-\binom{k-1}{l}+\binom{k-2}{l}-\binom{k-3}{l}+\ldots=\frac{1}{2}\binom{k}{l}+$$
$$+\frac{1}{2^2}\binom{k-1}{l-1}+\frac{1}{2^3}\binom{k-2}{l-2}+\ldots+\frac{1}{2^l}\binom{k-l+1}{l}+\frac{1}{2^l}\varepsilon,$$

kdež $\varepsilon=0$ neb 1 dle toho, je-li $k-l$ liché neb sudé.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Václav Svoboda*, domobranec, stud. VII. r. v Č. Budějovicích.

Zjištěme nejprve správnost identity

$$\frac{(1+a)^{k+1}\pm 1}{(1+a)\ \ +1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+a)^{k+1}-\dfrac{a^{k+1}}{2^{k+1}}}{(1+a)\ \ -\dfrac{a}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{a^{k+1}}{2^{k+1}}\pm 1}{\dfrac{a}{2}+1};$$

kdež pro sudé k platí horní, pro liché dolní znaménko, tak aby všechna tři naznačená dělení vycházela beze zbytku. Provedeme-li je, máme

$$(1+a)^k-(1+a)^{k-1}+(1+a)^{k-2}-(1+a)^{k-3}+\ldots\pm 1$$
$$=\frac{1}{2}(1+a)^k+\frac{1}{4}a(1+a)^{k-1}+\frac{1}{2^3}a^2(1+a)^{k-2}$$
$$+\ldots+\frac{a^k}{2^k}+\frac{a^k}{2^{k+1}}-\frac{a^{k-1}}{2^{k-2}}+\frac{a^{k-2}}{2^{k-1}}-\frac{a^{k-3}}{2^{k-2}}+\ldots$$
$$+(-1)^{k-l}\frac{a^l}{2^{l+1}}+\ldots\pm 1.$$

Položíme-li činitele při a^l na obou stranách sobě rovny, obdržíme:

$$\binom{k}{l}-\binom{k-1}{l}+\binom{k-2}{l}-\binom{k-3}{l}+\ldots+(-1)^{k-l}$$
$$=\frac{1}{2}\binom{k}{l}+\frac{1}{2^2}\binom{k-1}{l-1}+\frac{1}{2^3}\binom{k-2}{l-2}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^l}\binom{k-l+1}{1}+\frac{1}{2^{l+1}}+(-1)^{k-l}\cdot\frac{1}{2^{l+1}}.$$

Poslední pak dva členy dávají buď 0 nebo $\frac{1}{2^l}$ dle toho, je-li $k-l$ sudé nebo liché.

19.

V kladném trojúhelníku ABC veďme těžnici do bodu D příčku DE do středu strany AC, příčku EF do středu AD, příčku FG do středu DE atd. levotočně. Stanovte souřadnice mezného bodu té spirály lomené, její délku a podobně pro spirálu pravotočnou, vzdálenost obou mezných bodů jakož i rozdíl délek obou spirál. Týž.

Řešení. Zaslal p. *F. Havelka*, stud. VII. tř. r. g. v Praze III.

Nazveme si strany trojúhelníku a, b, c, těžnici $CD = t$. Body, v nichž se spirála lomí, nazveme C, D, E, F, G, H, J, K, nyní se vše opakuje v měřítku šestnáctkráte menším C_1, D_1, . . .; jest však již ΔFHG podobný a podobně položený s ΔADC, s poměrem podobnosti záporném $(-\frac{1}{4})$ ΔKD_1C_1 je s ΔADC podobný a podobně položený s poměrem podobnosti kladným $(\frac{1}{16})$ atd. Nazveme-li část spirály $CDEFG = d$, bude délka celé spirály levotočné

$$S_l = d + \frac{1}{4} d + \frac{1}{4^2} d + \ldots = \frac{4}{3} d.$$

Jest však $d = t + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}(4t + 2a + b + c)$, tedy $S_l = \frac{1}{3}(4t + 2a + b + c)$, a podobně pro spirálu pravotočnou $S_p = \frac{1}{3}(4t + a + 2b + c)$, takže $S_l - S_p = \frac{1}{3}(a - b)$.

Mezný bod bude patrně středem podobnosti trojúhelníků ADC, FHG, KD_1C_1 atd. Dostaneme ho tedy na př. jako průsečík přímek AF a DH. Abychom určili jeho polohu, zvolme kosoúhlou soustavu souřadnic: kladný směr osy x: DA, kladný směr osy y: DC. Přímka AF utíná na osách úsečky $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}t$, má tedy rovnici $x/c + y/t = 2$, přímka DH jde počátkem D a bodem $H(\frac{1}{8}c, \frac{1}{2}t)$, takže má rovnici $y/x = t/c$. Pro souřadnici jich průsečíků najdeme $(\frac{1}{10}c, \frac{2}{5}t)$. Pro pravotočnou spirálu by bylo obdobně $(-\frac{1}{10}c, \frac{2}{5}t)$, takže oba mezné body leží na rovnoběžce se základnou vedenou ve $\frac{2}{5}$ výšky a jich vzdálenost je $\frac{1}{5}c$.

20.

Opište trojúhelníku rovnoramennému ellipsu nejmenší plochy. Určete sklon tečny v koncových bodech základny k výšce.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VII. tř. g. v Praze III.

Osu x položme do výšky $(= p)$ daného trojúhelníka, osu y do jeho základny $(= 2q)$. Poloosy hledané ellipsy buďtež a, b. Její střed S má pak souřadnice $(p - a, o)$, ellipsa tedy rovnici

$$\left(\frac{x - (p - a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ellipsa musí procházeti koncovým bodem základny $(0, q)$, t. j. musí platiti rovnice

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2+\left(\frac{q}{b}\right)^2=1.$$

Z této rovnice vypočteme $b=aq/\sqrt{p(2a-p)}$.

Plocha ellipsy je tedy $P=\pi ab=\pi a^2 q/\sqrt{p(2a-p)}$.

Uvažujme extrémní hodnoty funkce $y=a^4/(2a-p)$.

Derivováním nalezneme

$$y'=\frac{6a^4-4pa^3}{(2a-p)},\quad y''=\frac{4a^2(6a^2-8ap+3p^2)}{(2a-p)^3}.$$

Z kořenů rovnice $y'=0$ má význam pouze $a=\frac{2}{3}p$, pro nějž $y''>0$, takže nastane v tomto případě skutečně minimum.

Pro druhou rovnici pak nalezneme

$$b=2q/\sqrt{3}.$$

Souřadnice jejího středu jsou $(\frac{1}{3}p, 0)$: Opsaná ellipsa o minimální ploše má střed v těžišti trojúhelníka. Jako směrnici tečny k této ellipse v koncovém bodě základny $(0, q)$ snadno nalezneme: q/p.

Tečny v koncových bodech základny tvoří tedy s rameny rovnoramenného trojúhelníku lichoběžník.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Určiti směr světelných paprsků tak, aby vržené stíny tří daných mimoběžek na půdorysně omezovaly trojúhelník rovnostranný. Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Ferd. Roch,* stud. VII. tř. z. v. reálky v Uh. Brodě.

Libov. bodem 1 v prostoru veďme rovnoběžky s danými mimoběžkami a vyšetřme jich stopy $1'$, $2'$, $3'$ na půdorysně. Nalezněme isogonický střed I trojúhelníka $1'2'3'$. Nad každou stranou sestrojíme trojúhelník rovnostranný, jemuž opíšeme kružnici. Všechny tyto tři kružnice se protínají v isogonickém středu I trojúhelníka $1'2'3'$. Spojnice $\overline{1\mathrm{I}}$ jest hledaný směr paprsků světelných.

2.

Na kouli jest dán bod *M* a v půdorysně π jeho kosoúhlý průmět M'; sestrojiti k ploše kulové v bodě *M* tečny t_1, t_2 k sobě kolmé, aby jich šikmé průměty t_1', t_2' jdoucí bodem M' byly též k sobě kolmé. Zás. off. *J. Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Ludvík Hruban*, stud. v VII. tř. reálky v Prostějově.

Tečny t_1, t_2 jsou v rovině tečné τ plochy kulové sestrojené v bodě M a jich půdorysné stopníky jsou v průsečících půdorysné stopy p^τ s plochou kulovou jdoucí body M, M' a mající střed na p^τ.

3.

Sestrojiti plochu kulovou, která dotýká se tří stěn daného čtyřstěnu a čtvrtou stěnu protíná v kružnici daného poloměru. Prof. *Jar. Pilnáček.*

Daná úloha patrně přechází v úlohu, do kužele rotačního, který dotýká se tří stěn daného čtyřstěnu, vepsati kouli, protínající čtvrtou stěnu v kružnici o poloměru daném r.

Řešení. Zaslal p. *Karel Prucha*, stud. VI. tř. I. české reálky na Král. Vinohradech.

Plocha kuželová protíná čtvrtou stěnu v kuželosečce a každá z koulí vepsaných ve fokální kružnici této kuželosečky. Tato fokální kružnice dotýká se kuželosečky ve dvou reálných neb imag. bodech (viz na př. článek Dra. *Frant. Kadeřávka* v této příloze v roč. XLVI. str. 65.). Při elipse možno snadno nalézti konstrukci středu příslušné fokální kružnice, jejíž poloměr r je dán. Nechť elipsa ta má střed S a osy $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Opišme kružnici k nad průměrem $\overline{CD}$ a kružnici k' nad průměrem $\overline{F_1F_2}$ (F_1 a F_2 jsou ohniska elipsy). Na hlavní osu $\overline{AB}$ přenesme od středu S poloměr r, který jest dán a v bodě E takto získaném vztyčme kolmici $\overline{EF} \perp \overline{AB}$, při čemž bod F jest průsečík této kolmice s kružnicí k. V S sestrojme dále $\overline{SG} \perp \overline{SF}$, kdež G je na kružnici k'. Pata kolmice s bodu G na $\overline{AB}$ spuštěné je pak středem hledané fokální kružnice. Takové kružnice jsou patrně dvě symetrické dle osy $\overline{CD}$. Vztyčíme-li pak kolmici ve středu té, která úloze vyhovuje, na rovinu elipsy, protne nám osu plochy kuželové ve středu hledané plochy kulové. Patrně pro r platí omezení.

$$0 \leqq r \leqq \overline{SD}.$$

Jiné řešení zaslal p. *V. Holeček*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

Budiž vrchol kužele V a ohniska elipsy obsažené v čtvrté stěně F_1, F_2 jsou patrně stopy paprsků spojujících vrchol V s koncovými body kolmého průměru $\overline{MN}$ některé plochy kulové vepsané do rot. kužele. Bude-li průměr $\overline{MN}$ náležeti hledané ploše kulové, tu rozdělí se rovinou ϱ čtvrté stěny na úseky u_1, u_2, jež snadno z podobnosti přísl. trojúhelníků určíme, označíme-li písmenou v vzdálenost vrcholu V od ϱ a písmenami m, n, vzdálenosti ohnisek F_1 a F_2 od

paty výšky v na rovině ϱ, $e = \overline{SF_1} = SF_2$, kde S je střed elipsy, že $u_1 = v(e + x)/m$, $u_2 = v(e - x)/n$.
Pro vzdálenost pak středu kružnice poloměru r od středu S dostáváme

$$x = \pm \sqrt{e^2 - \frac{mnr^2}{v^2}},$$

kterýžto výraz se dá snadno sestrojiti. Pro úlohu s kužely mají význam obě plochy kulové, pro čtyřstěn jen jedna.

Pan *Frant. Verner*, stud. VI. tř. reálky v Jevičku, sestrojuje k hledaným plochám kulovým v rovině ϱ čtvrté stěny dvě tečny, které jsou ve vzdálenosti r rovnoběžny s orthogonálným průmětem osy rotačního kužele do roviny ϱ. A pak homothetií sestr. plochy hledané.

4.

Sestrojiti rotační plochu kuželovou, je-li dán vrchol její V, dva body povrchu M_1, M_2 a rovina ϱ, jež seče plochu v parabole. Prof. *Ed. Pleva.*

Řešení. Zaslal p. *J. Kapitán*, stud. VI*a* tř. r. v Praze III.

Rovina $\sigma \parallel \varrho$ jdoucí vrcholem V je rovinou tečnou hled. kužele a $\overline{VM_1}$ a $\overline{VM_2}$ jsou dvě površky jeho. Nanesme na tyto površky stejné délky od vrcholu V, dostaneme body A_1, A_2 a v rovině σ opišme stejnou délkou kružnici l o středu V. Sestrojíme-li z průsečíku spojnice $\overline{A_1A_2}$ s rovinou σ tečny ke kružnici l, určují tyto spojnicí $\overline{A_1A_2}$ roviny řídících kružnic hledaných ploch kuželových. Kružnice ty dají se snadno v příslušných rovinách sestrojiti.

5.

Danou elipsou v půdorysně proložte rotační plochu válcovou a omezte ji kruhovou hranou tak, aby se touto dotýkala nárysny. Prof. *Jar. Volf.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Prucha*, stud. VI. tř. ř. reálky na Král. Vinohradech.

Poloměr hledané rotační plochy válcové dán je malou poloosou dané elipsy. Osa této plochy je v rovině proložené hlavní osou kolmo k půdorysně a její směr určen úhlem α, který svírá s půdorysnou, při čemž

$$\sin \alpha = r/a = b/a.$$

Takové plochy válcové jsou dvě. Nárysnou stopou je opět elipsa, která mějž hlavní osu $\overline{AB}$. Roviny jdoucí vrcholy této hlavní osy kolmo k ose rot. plochy válcové, určují na této kružnice povrchové, které dotýkají se nárysny. V úloze patrně vyžaduje se ona, která je s elipsou danou na téže straně nárysny.

c) Z fysiky.

1.

Odvoďte urychlení, kterým padá na Atwoodově padostroji přívažkem m zatížená hmota M na základě věty vyřčené v třetím odstavci článku. Niť považujte za bezváznou a rovněž kladku, přes niž je vedena. *K.*

Řešení, jež zaslal p. *Fr. Šimer*, z VIII. akad. g. v Praze.

Po jedné straně padostroje padá hmota $M+m$ neznámým urychlením γ, napínajíc niť silou $(M+m)(g-\gamma)$. Po druhé straně stoupá závaží M týmž urychlením γ, napínajíc niť silou $M(g+\gamma)$. Ježto celkové napětí nitě je po celé její délce stejné, musí

$$(M+m)(g-\gamma)=M(g+\gamma)$$

čili

$$\gamma=\frac{m}{2M+m}.$$

(Poznámka: Na str. 71. (Přílohy str. 23.) ř. 22. shora je chyba tisku: Místo $\gamma>g$ má správně býti $\gamma<g$.)

2.

Dokažte tvrzení 4. odstavce článku, zejména o profilu vlny a výpočtu poloměru křivosti, užívajíce poznatků své pomocné knihy od proff. *Bydžovského* a *Vojtěcha* „Mathematika pro nejvyšší třídu středních škol“. Zvláště pak diskutujte vzorec (11) článku a ukažte, že existuje jistá nejmenší postupná rychlost vln na povrchu vodním a vypočtěte příslušnou délku vlnovou. Podobnou úvahu proveďte pro rtuť a znázorněte graficky vztah mezi V a λ. Jak lze z měření délky kraťounkých vlnek („čeřivých“) podmíněných hlavně povrchovým napětím vypočísti tuto fysikální konstantu kapaliny? *K.*

Řešení dle p. *Fr. Šimera* z VIII. ak. g. v Praze a p. *Václava Svobody* ze VII. r. v Č. Budějovicích.

Máme dokázati, že trochoida, opsaná bodem, který se nachází na poloměru $\left(\text{délky } \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ kruhu ve vzdálenosti a_0 od středu, valí-li se kruh ten po přímce, je v prvém přiblížení — za malého a_0 — podobna sinusoidě. Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic tak, že středy kruhu valícího se po přímce $y=\frac{\lambda}{2\pi}$ opisují osu X. V počáteční poloze kruhu leží jeho střed S_1 v bodě $x_1=-a_0$, $y_1=0$, bod trochoidu opisující v počátku souřadnic. Otočí-li se kruh o úhel ω posune se jeho střed do polohy S_2 o souřadnicích

$$x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{2\pi}\omega = -a_0 + \frac{\lambda}{2\pi}\omega, \quad y_2 = 0$$

a bod kreslící bude míti souřadnice

$$x = x_2 + a_0 \cos\omega, \quad y = a_0 \sin\omega.$$

Můžeme-li ve výraze

$$x = x_2 + a_0 \cos\omega = \frac{\lambda}{2\pi}\omega + a_0(\cos\omega - 1)$$

druhý člen proti prvému zanedbati, je

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda}x \qquad \text{a dosazením} \qquad y = a_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x$$

rovnice trochoidy, jak bylo dokázati.

Zvratná hodnota poloměru křivosti plyne dle známého vzorce (Bydžovský-Vojtěch § 63., Vojtěch str. 175—176) z derivací jakožto

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kde

$$y' = \frac{2\pi}{\lambda}a_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x, \quad y'' = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x.$$

Ve vrchu resp. dolu vlny je

$$\sin\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm 1, \quad \cos\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$$

a tedy absolutní hodnota

$$\left|\frac{1}{r}\right| = a_0\frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

Ve výraze pro postupnou rychlost vln

$$V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{F}{s}\frac{2\pi}{\lambda}}$$

převládá pro vlny velmi dlouhé prvý člen, na jakosti kapaliny nezávislý, pro vlny velmi krátké druhý. Každé rychlosti V přísluší dvě různé délky vln

$$\lambda_{12} = \frac{\pi}{g}\left(V^2 \pm \sqrt{V^4 - \frac{4gF}{s}}\right),$$

které se stávají stejnými za nejmenší vůbec možné rychlosti postupné

$$v = \sqrt[4]{\frac{4gF}{s}},$$

kde

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{g} v^2 = 2\pi \sqrt{\frac{F}{gs}}.$$

Vlny délky $\lambda_1 > \lambda_0$ nazýváme obyčejnými čili gravitačními, vlny $\lambda_2 < \lambda_0$ vlnkami kapillárními neboli čeřivými.

Pro vodu ($F = 76\ dyn/cm$, $s = 1\ g/cm^3$) plynou hodnoty $\lambda_0 = 1{\cdot}75\ cm$ a nejmenší možná postupná rychlost $v = 23{\cdot}37\ cm/sec$; pro rtuť ($F = 491\ dyn/cm$, $s = 13{\cdot}55\ g/cm^3$) pak $\lambda = 1{\cdot}21\ cm$, $v = 19{\cdot}42\ cm/sec$. Grafické znázornění plyne z čísel tabulky

λ	0	0·25	0·5	1	1·21	1·75	2	3	4	5	6	∞	*cm*
V voda	∞	—	32·1	25·1	—	23·37	23·4	25·0	27·3	29·6	31·9	∞	*cm/sec*
V rtuť	∞	30·8	23·1	19·6	19·42	—	20·6	23·3	26·1	28·7	31·2	∞	*cm/sec*

Změříme-li u krátkých čeřivých vlnek V a λ můžeme dle dostatečně přesného vzorce

$$V^2 = \frac{F}{s} \frac{2\pi}{\lambda}$$

počítati F. O methodě té viz na př.: Strouhal-Kučera, Mechanika str. 743.

3.

Zkuste na podkladě citované knihy proff. Bydžovského a Vojtěcha nahraditi elementární úvahu 5. odstavce článku úvahou infinitesimální. I nedovedete-li toho, vypočtěte, na kolik procent amplitudy povrchové klesne amplituda v hloubce rovné délce vlnové. Ve které hloubce klesne rozruch způsobený mořskými vlnami délky 20 metrů a výšky ($2a_0$) 6 metrů na kmity amplitudy 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm*? *K.*

Řešení dle pp. *Fr. Šimera* a *Fr. Kotána.* z III. paed. v Příbrami.

V hloubce h pod klidnou hladinou buď vrstva tloušťky (a při šířce rovné 1 také průřezu) Δh. Průřez pod dolem vlny je pak $\Delta h + \Delta a$, pod vrchem $\Delta h - \Delta a$, označíme-li rozdíl amplitud $a_{n+1} - a_n = \Delta a$. Pro nestlačitelnou kapalinu je

$$V . \Delta h = V_d(\Delta h + \Delta a)$$
$$V\Delta h = V_v(\Delta h - \Delta a).$$

Dělíme-li obě rovnice Δh, dosadíme za V_d a V_v výrazy (2) a (3) článku prof. Kučery, krátíme V a odečteme druhou rovnici od prvé, zbude

$$\frac{\Delta a}{\Delta h} = -\frac{2\pi a}{\lambda}$$

čili po přechodu k limitě

$$\frac{da}{dh} = a' = -\frac{2\pi a}{\lambda}.$$

Integrací rovnice

$$\frac{a'}{a} = -\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{plyne} \quad \text{lognat}\, a = -\frac{2\pi}{\lambda} h + c$$

čili

$$a = e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} + c.$$

Pro $h = 0$ je $a = a_0$, tedy $a_0 = e^c$, takže

$$a = a_0 e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}.$$

Je-li $h = \lambda$, pak $\frac{a}{a_0} = e^{-2\pi}$, neboli a v procentech a_0 vyjádřeno $100e^{-2\pi} = 0{\cdot}19$. V hloubce rovné délce vlnové je amplituda kmitů $0{\cdot}19\,\%$ mplitudy povrchové. Ze vzorce

$$h = \frac{\lambda}{2\pi}(\log a_0 - \log a)$$

plyne, že amplituda mořské vlny délky 20 metrů a výšky 6 *m* klesne na 1 *dm* již v hloubce 10·83 *m*, na 1 *cm* v 18·16 *m*, na 1 *mm* v 25·49 *m*.

4.

Zkuste výsledek 7. odstavce článku dovoditi cestou elementární, sledujíce obdobný postup úvahy. Vypočtěte numericky energii mořské vlny dimensí v úloze 3. udaných, a horizontální šířky 10 metrů. Jak veliká je postupná rychlost té vlny a kolik koňských sil by se v nejpříznivějším případě (zařízením pracujícím s účinností rovnou 100%) dalo z ní získat na pevném stanovišti?

Model délky 10 stop potřebuje 0·5 koňské síly, aby mohl být pohybován rychlostí 3 mil za hodinu proti odporové síle vln. Kolika koňských sil potřebovala by loď modelu podobná, ale 250 stop dlouhá k dosažení „odpovídající" rychlosti $3\sqrt{250:10} = 15$ mil za hodinu proti odporující síle vznikajících vln? *K.*

Řešení dle pp. *Fr. Šimera* a *Fr. Kotána.*

Hmota tenké kapalinové vrstvy tloušťky δ mezi hloubkami h a $h + \delta$, šířky jedničkové a délky rovné délce vlnové λ je $s\lambda\delta$ a ježto rychlosti pohybu částic jsou $\frac{2\pi V}{\lambda} a_h$, kde a_h je střední amplituda kmitů v oné vrstvě, je kinetická energie vrstvy rovna

$$\frac{1}{2} s\lambda\delta \left(\frac{2\pi V}{\lambda}\right) a_h^2 .$$

Myslíme-li celou kapalinu na podobné vrstvy rozdělenou a označíme-li pokračující hloubku indexy 0, 1, 2 . . ., je celková hledaná kinet. energie

$$E_k = \frac{1}{2} s\lambda\delta \left(\frac{2\pi V}{\lambda}\right)^2 (a_0^2 + a_1^2 + a_3^2 + \ldots).$$

Dle článku prof. *Kučery* je

$$a_n = a_0 \left(1 - \frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)^n$$

a řada na pravé straně je geometrická o podílu rovném

$$\left(1 - \frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)^2$$

menším než 1. Řada konverguje a její součet jest

$$\frac{a_0^2}{1 - \left(1 - \frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)^2} = \frac{a_0^2}{\frac{4\pi}{\lambda} \delta},$$

když ve jmenovateli zanedbáme člen $s\delta^2$. Dosazením plyne

$$E_k = \tfrac{1}{2} \pi s a_0^2 V^2$$

jak bylo dokázati.

Dosazením $a_0 = 300\ cm$, $\lambda = 2000\ cm$,

$$V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = 559\ cm/sec, \quad s = 1\ g/cm^3$$

a šířky $b = 1000\ cm$ plyne celková energie vlny

$E = \pi s a_0^2 V^2 b = 883 \,.\, 10^{11}\ erg = 8{\cdot}83 \,.\, 10^6\ Joule = 9 \,.\, 10^5\ kgm.$

S vlnou postupuje pouze energie potenciálná $^1/_2 E$; celá prošla by zařízením za jednu dobu kmitovou $T = \frac{\lambda}{V}$, za jednu vteřinu projde jím pouze $\frac{1}{2} \frac{E}{T} = 1{\cdot}256 \,.\, 10^5 \frac{kgm}{sec} = 1677$ HP. Kdyby zařízení pracovalo beze ztrát, mělo by výkonnost skoro 1700 koňských sil!

Celková síla odporová vln budiž u modelu f, u lodi F, hmota vytlačené vody u modelu m, u lodi M, rychlost modelu v, lodi V, a konečně pracovní effekt u modelu w, u lodi W. Za „odpovídajících“ rychlostí platí dle Froudova zákona $\frac{f}{m} = \frac{F}{M}$. Spotřebovaný pracovní effekt je úměrný součinu z odporové síly a rychlosti, takže odporová síla jest úměrna podílu z effektu a rychlosti. Proto

$$\frac{w}{mv} = \frac{W}{MV} \quad \text{a} \quad W = w \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{V}{v} .$$

Hmoty M a m jsou úměrny třetím mocninám lineárních dimensí, takže

$$W = w \cdot \frac{L^3}{l^3} \frac{V}{v} = 0{\cdot}5 \,.\, 25^3 \,.\, 5\,\mathrm{HP} = 39.062 \text{ koň. sil.}$$

5.

Jakou rychlostí musí se táhnouti barka v průplavu hloubky dvou metrů, aby byla vynaložená práce co nejmenší?

V mělkém průplavě hloubky H, omezeném po stranách vertikálními stěnami, nachází se na dně příčná překážka výšky a, malé proti H. Voda v průplavě se pohybuje rovnoměrně rychlostí V. Dokažte, že na povrchu vodním, právě nad překážkou objeví se příčné vlně podobné vzedmutí vody, je-li $V > \sqrt{gH}$, a že se tamže objeví korytu podobná příčná depresse, je-li $V < \sqrt{gH}$. *K.*

Řešení dle p. *Fr. Šimera.*

Barka musí se pohybovati rychlostí vln, jež vzbuzuje. Tato jest $V = \sqrt{gH} = 4{\cdot}43\ m/sec$ čili přibližně 16 kilometrů za hodinu.

Rozdělme hloubku H na n stejných vrstev tloušťky $\frac{H}{n}$. Výšku příčného vzedmutí nad hladinou označme y, které při depresi bude záporné. Proudové trubice jednotkové horizontální šířky mají pod klidnou hladinou průřez $\frac{H}{n}$, nad překážkou pak $\frac{H+y-a}{n}$. Pro nestlačitelnost vody platí

$$V_v \frac{H+y-a}{n} = V \,.\, \frac{H}{n},$$

$$V_v = V \frac{1}{1 + \frac{y-a}{H}} .$$

Dle (5) rovnice článku prof. *Kučery* platí pro horní trubici

$$\left(P_0 + \frac{1}{2} s V_v^2\right) - \left(P_0 + \frac{1}{2} s V^2\right) = - gsy,$$

čili $V^2 - V_v^2 = 2gy$, t. j. po dosazení

$$V^2 \left\{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{y-a}{H}\right)^2}\right\} = 2gy.$$

Za malého y a a (proti H) jest dostatečně přesně

$$V^2 \frac{y-a}{H} = gy, \quad y = \frac{V_a^2}{V^2 - gH}.$$

Čítatel jest vždy kladný. Je-li tedy $V^2 > gH$ je y kladné, vzniká vzedmutí, je-li $V^2 < gH$, je y záporné, vzniká depresse.

Pro $V^2 = gH$ vycházelo by y nekonečně veliké. Tento případ jsme však již sami vyloučili, předpokládajíce y malé, takže jsme mohli v čítateli výraz $\left(\frac{y-a}{H}\right)^2$ proti prvé jeho mocnině, ve jmenovateli pak dokonce $\frac{y-a}{H}$ proti 1 zanedbati.

Seznam řešitelů úloh.

Pánové: *Jan Bartuška*, r. Č. Budějovice, m. 1—3, 5, 6, 11, 13, 16; *Jos. Bečvář*, VII. r. Písek, m. 1—6, 8, 11, 14, 15, 16, 19, 20, d. 2—5, f. 1—5; *Frant. Bukovský*, VII. g. Praha III., j. dobrov., m. 1—7, 14, 15, 19; *Zdeněk Deyl*, VI. r. Hradec Králové, m. 2, 3, 4, 7, 15; *Lambert Dračka*, VI. r. Jevičko, m. 3; *Václav Dvořák*, VII. r. g. Pelhřimov, d. 3, 5; *A. Fingerland*, VIII. g. Jičín, f. 1—5; *F. Havelka*, VII. r. g. Praha II. Truhlářská ul., m. 1, 3, 5, 6, 11, 13-17, 19, 20, d. 2, 4; *V. Holeček*, VI r. Kutná Hora, m. 3—8, 11, 14, 15, 16, 20. d. 1—5: *Emilian Honzík*, Va r. Písek, d. 1; *Jos. Hrdlička*, VII r. g. Roudnice, m 1, 3, 6, 14; *Ludvík Hruban*, VII. r. Prostějov, m. 1, 2, 3, 5, 6, d. 1—5; *Josef Hrubíšek*, Kyjov, Morava, m. 1, 3—6, 14; *Alois Janáček*, r. Hradec Králové, m. 3, 5, 16. d. 2-5: slečna *Jaroslava Janáčková*, priv. VI r. Příbram, m. 3. 5; pánové: *Václav Juna*, VII. r. Karlín, m. 3; *Jiří Kapitán*, VIa r. Praha III., m. 1, 2, 3, d. 2-5; *Otto Kopecký*, VIII. r. g. Chrudim, m. 1—7, 14, 16; *K. Köppel*, VIII. r. g Domažlice, m. 1 3, 6 16, d. 2-5; *Frant. Kotán*, III pedagog. Příbram, m. 1—20, d. 1—5. f. 1-5; *Josef Křenek*, VII. g. Valaš. Meziříčí, m. 1—8, 14, 16-20, f. 1; *Bohumil Kruta*, VI. r. Vel. Meziříčí, m. 1, 3; *Jaroslav Louda*, VIb r. Č. Budějovice, m. 3, 5, 8, d. 4, 5; slečna *Růžena Lukavská*, VI. d. r. g. Plzeň, m. 1, 3; pánové: *František Mackerle*, VII. r. Jevičko, m. 5, d. 4, 5; *Josef Mašl*, VII. r. g. Kolín, m. 5, 6, f. 1; *F. Matouš*, VIb r Čes. Budějovice, m. 13, d. 2, 4, 5; *Josef Melichar*, Louny, m. 3 d. 2-5; *Jaroslav Mrkos*, VII. g. Praha III., m. 1—7, 11, 13—17, 19, 20; *K. Munzar*, r. Hradec Králové, m. 1—6, 11, 14, 16, 19, 20; *Zdeněk Nevařil*, Vb r. Praha III., m 4, 5, 7; *Joža Plašil*, VII. r. Král. Vinohrady, m. 3, 5, d. 3, 4; *Jaroslav Pokorný*, VI. r. Nymburk, m. 15. d. 1—5: *František J. Prokop*, VIb r. Vršovice, m 1—6, 8, 10, 11, 13 až 16, d. 3—5; *Karel Průcha*, r. Král. Vinohrady, m. 1—16, 19, d. 1—5; *V. Průcha*, r. g. Beroun, m. 1, 2, 4, 5, 6, 14; *Ferd. Roch*, VII r Uh Brod, m. 4, 5, 6, 8, 11, 13, 16, d. 1 až 5; *Jaroslav Rozsypal*, VIII. g Kroměříž, m. 1—7, 10—17, 19, 20, f. 1, 3; *V. Ruml*, VIb r. Vršovice, m. 1, 3, 5, 6, 8, 13, 16, d. 5; *V. Slaný*, r. Vel. Meziříčí, m 1, 3, 7, 11, 16, d. 2; *Břetislav Staller*, V. r. Vel. Meziříčí, m. 1, 3, 4; *J. Staněk*, VI. r. g Moravské Budějovice, m. 7; *Václav Svoboda*, domobranec 91. p pl.. VII. r. Č. Budějovice, m. 1 20, f. 1 až 5; *František Šimer*, Praha f. 1—5; *B. Štěpánek*, Vb, m. 4, 11, d. 3; *Oldřich Štiller*, VI. r. Mor Ostrava, m. 1, 3, 4. 5, d. 2, 4, 5; *Alois Tomančák*, VII. r. Příbor, m 16, d. 4; *Miloslav Valouch*, V. r. g. Praha, Truhlářská ul, m. 3—6; *Miroslav Vepřek*, VII., Telč, m 3, d. 3, 4, 5; *Boleslav Vybíhal*,

r. Prostějov, m. 1. 2, 3. 8, 16, d. 2, 4, 5; *G. Vincent*, VII. r. Příbor, m. 1—4, 20 d. 1, 4, 5; *František Werner*, VI. r. Jevíčko, m. 3, 5, d. 3, 4, 5.

Udělení cen.

Redakce úloh přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto pp. řešitelům ceny, vypsané výborem »Jednoty českých mathematiků a fysiků.

Z mathematiky.

Ceny první:

František Kotán, stud. III. r. pedagog. v Příbrami,
Jaroslav Mrkos, stud. VII. g. v Praze III.,
Karel Průcha, stud. r. na Král. Vinohradech,
Jar. Rozsypal, stud. VIII. g. v Kroměříži,
Václav Svoboda, stud. VII. r. v Č. Budějovicích, dom. 91. p. pl.,

Ceny druhé:

Frant. Bukovský, stud. VII. g. v Praze III., j. dobrov.
F. Havelka, stud. VII. r. g. v Praze II. v Truhlářské ul.
V. Holeček, stud. VI. r. v Kutné Hoře,
Josef Křenek, stud. VII g. ve Valašském Meziříčí,
František J. Prokop, stud. VIb r. ve Vršovicích.

Ceny třetí:

Jan Bartuška stud. r. v Č. Budějovicích,
Jos. Bečvář. stud. VII. r. v Písku,
Otto Kopecký, stud. VIII r. g. v Chrudimi,
K. Munzar, stud. r. v Hradci Král.,
Ferd. Roch, stud. VII. r. v Uherském Brodě.

Spis: Studnička, Úvod do analytické geom. v rovině (Sbor. sv. VII.) obdrží p. *F. Bukovský* a p. *K. Průcha.*

Z deskriptivní geometrie.

Karel Průcha stud. VI. r. I. na Král. Vinohradech,
Ferd. Roch, stud. VII. r. v Uh. Brodě,
V. Holeček, stud. VI. r. v Kutné Hoře,

Z fysiky:

Šimer František, stud. VIII. tř. akad. gymnasia v Praze,
Svoboda Václav, stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích,
Kotán Frant., stud. III. roč. pedagogia v Příbrami,
Fingerland Ant., stud. VIII. tř. gymnasia v Jičíně.
Bečvář J., stud. VIIa reálky v Písku.

Z **fondu Jaromíra Mareše** uděleny byly ve smyslu jeho stanov tyto ceny: p. *Václav Svoboda*, stud. r. v Čes. Budějovicích a p. *Jaroslav Mrkos*, stud. g. v Praze III. obdrží spis: Ed. Weyr, Počet differenciálný, p. *Vladimír Svoboda*, žák ob. šk. v Čes. Budějovicích Vynálezy a pokroky.