Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vojtěch Jarník

O číslech derivovaných funkcí jedné reálné proměnné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 98--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109353

rallèles à $\overline{PF}$, $\overline{PG}$, $\overline{FH}$ et $\overline{PM}$, $\overline{PN}$, $\overline{PL}$. Les points de la courbe intégrale, par ex. D_1, sont aux deux tiers du segment $D'D''$.

L'avantage de la méthode b), comparée à la methode a), consiste en ce que la position de chaque point, p. ex. D_1, est indépendante de la division des segments $\overline{B'B''}$ et $\overline{C'C''}$ en trois parties égales. Il n'en est pas ainsi dans la méthode a), la position du point D_1 dépendant de la division des segments $\overline{FM}$, $\overline{GN}$, $\overline{HL}$ en trois parties égales. Or, cette division de segments très courts n'est pas une opération précise. Les erreurs de cette division pouvant s'additionner, dans la méthode a), on doit préférer la méthode b).

Il n'est pas nécessaire de supposer perpendiculaires les axes des coordonnées. On peut même employer, pour la courbe intégrale, un autre système d'axes (ξ_1, η_1) que celui des (ξ, η), employé pour la fonction intégreé (fig. 3.). L'essentiel est que la distance $\delta = \overline{OP}$ du pôle P soit parallèle à l'axe (ξ_1). Si les modules pour les coordonnées de la fonction f sont α, β et si $\alpha_1 = \alpha \dfrac{\sin \omega}{\sin \omega_1}$, le module pour les ordonées de la courbe intégrale est $\gamma = \dfrac{\alpha_1 \beta}{\delta}$.

O číslech derivovaných funkcí jedné reálné proměnné.

Napsal *Vojtěch Jarník.*

V tomto článku chci dokázati jistou větu o derivovaných číslech funkcí jedné proměnné. K tomu cíli předešlu jednoduchou větu pomocnou: Budiž $f(x)$ funkce konečná, definovaná v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jež nemá v tomto intervalu variaci konečnou. Potom množství čísel

$$\Psi(x', x'') = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

pro $a \leq x' \leq b$, $a \leq x'' \leq b$, $x' \neq x''$ není shora ani zdola ohraničeno.

Rozdělme $\langle a, b \rangle$ na konečný počet dílů:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b;$$

sestrojme rozdíly $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ pro $i = 0, 1, \ldots n-1$, a označme součet těch z nich, jež jsou kladné, P (není-li žádný kladný, klademe $P = 0$) a součet těch z nich, jež jsou záporné, $-N$ (není-li žádný z nich záporný, klademe $N = 0$). Označme dále

$$(1) \qquad T = P + N.$$

Patrně platí

(2) $$f(b) - f(a) = P - N.$$

Uvažujme všechna možná taková rozdělení $< a, b >$ a označme horní hranici T, P, N resp. τ, π, ν. Dle supposice je $\tau = +\infty$, musí tedy dle (1) býti alespoň jedno z čísel π, ν rovno $+\infty$. Potom však z (2) plyne, že i druhé z čísel π, ν je rovno $+\infty$. Je tedy $\pi = +\infty$, $\nu = +\infty$. Kdyby nyní bylo $\Psi(x', x'') < M$ (resp. $\Psi(x', x'') > -M$) pro všechna x', x'' z $< a, b > (x' \neq x'')$, bylo by $P < M(b-a)$ (resp. $N < M(b-a)$) pro všechna možná rozdělení intervalu $< a, b >$. To je však nemožno, a pomocná věta tím dokázána.

Věta I. Budiž $f(x)$ funkce konečná v $< a, b >$, jež v žádném uzavřeném intervalu $< a', b' >$, kde $a \leqq a' < b' \leqq b$, nemá variaci konečnou; potom existuje množina bodů x hustá v $< a, b >$ a taková, že v každém jejím bodě je aspoň jedno ze 4 derivovaných čísel funkce $f(x)$ rovno $+\infty$ a aspoň jedno rovno $-\infty$.

Zvolme, abychom to dokázali, libovolný interval $< \alpha, \beta >$ $(a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$. V něm dle pomocné věty existují dva body x_1', x_1'' takové, že $x_1' < x_1''$, $\Psi(x_1', x_1'') > 1$. V intervalu

$$< x_1' + \frac{x_1'' - x_1'}{4}, \; x_1'' - \frac{x_1'' - x_1'}{4} >$$

existují opět dva body x_2', x_2'' takové, že

$$x_2' < x_2'', \; \Psi(x_2', x_2'') < -2.$$

Obecně, našel-li jsem již body x_i', x_i'', najdu v intervalu

$$< x_i' + \frac{x_i'' - x_i'}{4}, \; x_i'' - \frac{x_i'' - x_i'}{4} >$$

dva body x_{i+1}', x_{i+1}'' takové, že $x_{i+1}' < x_{i+1}''$,

(3) $$(-1)^i \, \Psi(x_{i+1}', x_{i+1}'') > i + 1.$$

Platí tedy (4) $$x_1' < x_2' < \ldots < x_2'' < x_1'',$$

(5) $$x_{i+1}'' - x_{i+1}' \leqq \frac{1}{2}(x_i'' - x_i').$$

Mají tedy dle (4) a (5) body x_i' a x_i'' společnou limitu x_0 pro $\lim i = \infty$. Ježto pak $x_i' < x_0 < x_i''$, je

$$\Psi(x_i', x_i'') = \frac{f(x_i'') - f(x_i')}{x_i'' - x_i'}$$

jisté číslo, obsažené mezi čísly

$$\frac{f(x_i')-f(x_0)}{x_i'-x_0},\quad \frac{f(x_i'')-f(x_0)}{x_i''-x_0};$$

dále dle (3) je

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\, \Psi(x_i', x_i'') = +\infty, \quad \underline{\lim_{i=\infty}}\, \Psi(x_i', x_i'') = -\infty,$$

a tedy tím spíše

$$\overline{\lim_{x=x_0}}\, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty, \quad \underline{\lim_{x=x_0}}\, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty,$$

čímž jest věta I. dokázána.

Věta II. Hoví-li $f(x)$ předpokladům věty I. a je-li nad to spojitá v $< a, b >$, existuje množina bodů x hustá v $< a, b >$ a taková, že v každém jejím bodě jsou obě horní derivovaná čísla funkce $f(x)$ rovna $+\infty$, obě dolní derivovaná čísla rovna $-\infty$.

Ježto $f(x)$ je spojité v $< a, b >$, platí věta Diniova: v každém částečném intervalu (α, β) z (a, b) je horní resp. dolní hranice kteréhokoliv ze čtyř derivovaných čísel rovna horní resp. dolní hranici $\Psi(x', x'')$, když x', x'' jsou v (α, β) a $x' \neq x''$. Je tedy vidět dle pomocné věty, že v každém částečném intervalu z (a, b) má kterékoliv ze čtyř derivovaných čísel horní hranici $+\infty$ a dolní hranici $-\infty$. Zvolme nyní libovolný interval (α, β), kde $a \leq \alpha < \beta \leq b$; v něm existuje jistě x_1 takové, že $D_+ f(x_1) > 1$;*) existuje pak jisté číslo $h_1 > 0$ takové, že pro všechna x, hovící nerovninám $x_1 < x < x_1 + h_1$ je $\Psi(x, x_1) > 1$. Volme h'_1 menší z čísel $\beta - x_1$, h_1. V intervalu $(x_1, x_1 + h_1')$ existuje rozhodně bod x_2, v němž $D_- f(x_2) > 2$; potom existuje $h_2 > 0$ takové, že pro $x_2 - h_2 < x < x_2$ je $\Psi(x, x_2) > 2$. Volme h'_2 menší z čísel $\frac{x_2 - x_1}{2}$, h_2 a v intervalu $(x_2 - h'_2, x_2)$ najděme bod x_3, v němž $D^+ f(x_3) < -3$. Potom najdu opět $h_3 > 0$ tak, že pro $x_3 < x < x_3 + h_3$ je $\Psi(x, x_3) < -3$, a volím za h'_3 menší z čísel $h_3, \frac{x_2 - x_3}{2}$; v $(x_3, x_3 + h'_3)$ najdu x_4 tak, že $D^- f(x_4) < -4$; existuje opět $h_4 > 0$ tak, že pro $x_4 - h_4 < x < x_4$ je $\Psi(x, x_4) < -4$; volme h'_4 menší z čísel $\frac{x_4 - x_3}{2}$, h_4; v intervalu $(x_4 - h'_4, x_4)$ najdu x_5 tak, že $D_+ f(x_5) > 5$. Tak postupuje, dostávám posloupnost bodů

*) Volím obvyklé označení:

$$D^+ f(x) = \overline{\lim_{x'=x+0}}\, \Psi(x, x'),\quad D_+ f(x) = \underline{\lim_{x'=x+0}}\, \Psi(x, x'),$$

$$D^- f(x) = \overline{\lim_{x'=x-0}}\, \Psi(x, x'),\quad D_- f(x) = \underline{\lim_{x'=x-0}}\, \Psi(x, x').$$

(6) $\alpha < x_1 < x_3 < x_5 < \ldots . < x_6 < x_4 < x_2 \leqq \beta$

takových, že $\quad | x_{n+1} - x_n | < \frac{1}{2} | x_n - x_{n-1} |$.

Existuje tedy (7) $\quad \lim_{n=\infty} x_n = x_0$.

Ježto dále $\quad x_{2K} > x_0 > x_{2K+1}$

$x_{2K+1} < x_0 < x_{2K+2}$,

je tím spíše $\quad x_{2K} > x_0 > x_{2K} - h'_{2K}$

$x_{2K+1} < x_0 < x_{2K+1} + h'_{2K+1}$

a tedy (8) $\quad \Psi(x_0, x_{4K+1}) > 4K + 1, \quad \Psi(x_0, x_{4K+2}) > 4K + 2,$

$\Psi(x_0, x_{4K+3}) < -(4K + 3), \quad \Psi(x_0, x_{4K}) < -4K.$

Z (6), (7), (8) plyne však okamžitě věta II.

Poznámka. Věty I. a II. platí specielně pro funkce konečné (resp. konečné a spojité), nemající v žádném bodě $< a, b >$ derivaci. Taková funkce nemůže totiž v žádném intervalu míti variaci konečnou, ježto by potom podle známé věty existovala v tomto intervalu derivace všude až na množinu míry 0.

*

Sur les nombres dérivés des fonctions d'une variable réelle.

(Extrait de l'article précédent.)

Je démontre, dans cette courte note, par des moyens très élementaires, les théoremes suivants:

1. Étant donnée une fonction $f(x)$ finie dans l'intervalle fermée $<a, b>$, qui n'est à variation bornée dans aucun intervalle partiel de cet intervalle, on peut trouver un ensemble dense dans $<a, b>$, et tel qu'en chaque point de cet ensemble un nombre dérivé $f(x)$, au moins, soit égal à $+\infty$ et un au moins à $-\infty$.

II. Si, de plus, la fonction $f(x)$ es continue, on peut trouver un ensemble dense dans $<a, b>$, et tel qu'en chaque point de cet ensemble les deux nombres dérivés supérieurs de $f(x)$ soient égaux à $+\infty$, et les deux nombres dérivés inférieurs soient égaux à $-\infty$.

Je saisis cette occasion pour signaler deux errata dans l'extrait de mon article précédent (tome LII., page 55.). Au lieu de $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ (ligne 9 en remontant) et $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ (ligne 4 en remontant) il faut lire $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \neq 0$.