

Bohumil Bydžovský

Sur les matrices orthogonales symétriques

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 4, 189--194

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109337>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1936

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ČÁST MATEMATICKÁ

Sur les matrices orthogonales symétriques.

B. Bydžovský, Praha.

(Reçu le 10 avril 1936.)

Les matrices orthogonales, qui sont en même temps symétriques, ne peuvent pas être exprimées par les formules connues de Cayley, puisque ces formules supposent que l'équation caractéristique de la matrice orthogonale ne possède pas de racine égale à l'unité, condition qui n'est pas remplie dans le cas de symétrie. Mais on peut parvenir à exprimer toutes ces matrices par une autre voie, à l'aide du théorème que je vais démontrer et que je n'ai pas trouvé dans les travaux des auteurs qui se sont occupés de ces matrices spéciales.<sup>1)</sup>

1. Soit  $C$  une matrice orthogonale symétrique. Si  $C'$  désigne la matrice transposée, on a, d'une part  $C' = C^{-1}$ , d'autre part  $C = C'$ , donc  $C = C^{-1}$ ,  $C^2 = J$ ,  $J$  désignant la matrice unité. Comme  $(C - J)(C + J) = C^2 - J = 0$ ,  $p$  étant le rang de  $(C + J)$ , celui de  $(C - J)$  ne peut pas surpasser  $n - p$ . En effet, le système  $(C - J)x = 0$  est vérifié par toute colonne de la matrice  $(C + J)$ ; comme  $p$  de ces colonnes sont linéairement indépendantes, le système considéré a au moins  $p$  solutions linéairement indépendantes et son rang est au plus égal à  $n - p$ .

On suppose dans la suite que  $C$  n'est pas la matrice unité. Donc,  $n > p$ . Il suit alors de ce qui précède que l'équation caractéristique

$$|C + xJ| = 0$$

possède aussi bien la racine  $+1$  que la racine  $-1$ . Comme le rang de  $C + J$  est  $p$ , la multiplicité de la racine  $+1$  n'est pas inférieur à  $n - p$ , et il est évident, par un raisonnement analogue, que la multiplicité de la racine  $-1$  n'est pas inférieur à  $p$ . Donc, ces multiplicités sont précisément égales à ces deux nombres et le rang de  $(C - J)$  est, par conséquent, précisément égal à  $n - p$ . Il en suit

<sup>1)</sup> Frobenius, Crelles J. 84 (1878), p. 26; Hoffmann, Archiv, II. série t. 8 (1890) p. 225; Prym, Gött. Abh. t. 88, (1892) p. 3; L. Castoldi: Sul numero degli elementi arbitrari etc. Rend. Ist. Lomb. 1934.

que l'équation caractéristique de la matrice considérée est de la forme

$$(x + 1)^p (x - 1)^{n-p} = 0.$$

2. Déterminons les diviseurs élémentaires de la matrice

$$(C + xJ).$$

Les mineurs d'ordre  $(n - 1)$  de cette matrice ont l'unité positive pour leur racine au moins  $(n - p - 1)$ -uple, puisque le rang des mineurs de cet ordre de la matrice  $(C + J)$  ne peut pas dépasser le nombre  $p$ . On conclut de la même manière que ces mineurs ont l'unité négative pour leur racine au moins  $(p - 1)$ -uple. Donc, tous ces mineurs ont le diviseur commun

$$D_{n-1} = (x + 1)^{p-1} (x - 1)^{n-p-1} \quad (1)$$

et c'est le plus grand commun diviseur, puisque tout autre facteur linéaire commun aux mineurs de l'ordre  $(n - 1)$  — ce ne pourrait être que le facteur  $(x + 1)$  ou  $(x - 1)$  — augmenterait la multiplicité des racines de l'équation caractéristique, ce qui est exclu.

On démontre d'une manière analogue que le plus grand commun diviseur des mineurs de l'ordre  $(n - 2)$  est

$$D_{n-2} = (x + 1)^{p-2} (x - 1)^{n-p-2}$$

et ainsi de suite. Cette suite des plus grands communs diviseurs aboutit:

- a) à  $(x - 1)$  pour  $p < n - p$ ,
- b) à  $(x + 1)$  pour  $p > n - p$ ,
- c) à  $(x^2 - 1)$  pour  $p = n - p$ ,

et les plus grands communs diviseurs qui suivent sont tous égaux à l'unité.

Or, pour la matrice diagonale dont l'équation caractéristique est la même, à savoir

$$(x + 1)^p (x - 1)^{n-p} = 0,$$

les  $D_i$  sont évidemment les mêmes, et par conséquent, les diviseurs élémentaires sont les mêmes pour les deux matrices. Énonçons le résultat acquis:

La matrice  $(C + xJ)$ , où  $C$  est une matrice orthogonale symétrique telle que le rang de  $(C + J)$  est  $p$ , a les mêmes diviseurs élémentaires que la matrice  $(J_p + xJ)$ ,  $J_p$  désignant une matrice qu'on obtient en changeant les signes des  $n - p$  derniers éléments principaux de la matrice unité.

3. On sait que deux formes quadratiques — ou bien, ce qui revient au même — deux matrices symétriques sont l'une la transformée de l'autre par une transformation orthogonale à la condition — nécessaire et suffisante — que leurs matrices caractéristi-

ques possèdent les mêmes diviseurs élémentaires. Les matrices  $C, J_p$  sont symétriques et satisfont à cette condition; donc, il existe une matrice orthogonale  $A$  telle que

$$C = A'J_pA.$$

En exécutant cette multiplication et en tenant compte de l'orthogonalité de  $A$ , on obtient

$$C = A'J_pA = \begin{pmatrix} 1 - 2a_{p+1,1}^2 - \dots - 2a_{n1}^2 & -2a_{p+1,1}a_{p+1,2} - \dots - 2a_{n1}a_{n2}, \dots, & -2a_{p+1,1}a_{p+1,n} - \dots & \\ & & -2a_{n1}a_{nn} & \\ -2a_{p+1,1}a_{p+1,2} - \dots, & 1 - 2a_{p+1,2}^2 - \dots - 2a_{n2}^2, \dots, & -2a_{p+1,2}a_{p+1,n} - \dots & -2a_{n2}a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2a_{p+1,1}a_{p+1,n} - \dots, & -2a_{p+1,2}a_{p+1,n} - \dots - 2a_{n2}a_{nn}, \dots, & 1 - 2a_{p+1,n}^2 - \dots - 2a_{nn}^2 & \end{pmatrix} \quad (2)$$

ce qui est l'expression générale d'une matrice  $C$  orthogonale symétrique pour laquelle le rang de  $(C + J)$  est égal à  $p$ ,  $a_{ik}$  étant les éléments d'une matrice orthogonale convenablement choisie.<sup>2)</sup> On voit facilement qu'inversement toute matrice de cette forme, les  $a_{ik}$  étant les éléments d'une matrice orthogonale quelconque, est orthogonale symétrique.

4. L'expression (2) peut être remplacée par une autre, donnant en même temps une décomposition de la matrice  $C$  en des matrices plus simples. On se rend facilement compte que

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a_1^2 & -2a_1a_2, \dots & -2a_1a_n \\ -2a_1a_2 & 1 - 2a_2^2, \dots & -2a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ -2a_1a_n & -2a_2a_n, \dots & 1 - 2a_n^2 \end{pmatrix} = J - 2aa',$$

en désignant, de la manière usuelle, par  $a$  le vecteur contravariant aux composantes  $a_1, \dots, a_n$ , par  $a'$  le vecteur covariant aux mêmes composantes. Si  $a, b, c, \dots$  sont des vecteurs tels que

$$a'b = a'c = b'c = \dots = 0,$$

on a, de plus

$$\begin{aligned} (J - 2aa')(J - 2bb') &= J - 2aa' - 2bb', \\ (J - 2aa')(J - 2bb')(J - 2cc') &= J - 2aa' - 2bb' - 2cc' \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Ceci fait voir que l'expression (2) peut être remplacée par la suivante:

$$\begin{aligned} C &= J - 2a_{p+1}a'_{p+1} - \dots - 2a_n a'_n = \\ &= (J - 2a_{p+1}a'_{p+1})(J - 2a_{p+2}a'_{p+2}) \dots (J - 2a_n a'_n), \end{aligned} \quad (3)$$

$a_{p+1}, \dots, a_n$  étant les colonnes d'une matrice orthogonale. Ceci donne lieu au théorème suivant:

<sup>2)</sup> J'ai simplifié la démonstration de ce résultat, que j'avais obtenu d'abord par une voie plus compliquée, grâce à une suggestion de mon collègue, M. Petr.

Toute matrice orthogonale symétrique  $C$ , pour laquelle  $(C + J)$  a le rang  $p$ , est le produit de  $(n - p)$  matrices orthogonales symétriques de la forme

$$J - 2aa',$$

les  $a$  étant les colonnes d'une même matrice orthogonale.

Il est évident que l'inverse a encore lieu.

5. Si  $a_1, \dots, a_p$  sont les premières  $p$  colonnes de la matrice orthogonale  $A$  — voir formule (2) — on a

$$a_1a'_1 + \dots + a_na'_n = J.$$

En effet,  $a_r = A' \cdot i_r$ , en désignant par  $i_r$  la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf le  $r$ -ième élément principal, égal à l'unité. On a de même  $a'_r = i_r \cdot A$ . Donc  $\Sigma a_r a'_r = A' \Sigma i_r A = A' J A = J$ . Par conséquent

$$(J - 2a_1a'_1) \dots (J - 2a_p a'_p) (J - 2a_{p+1}a'_{p+1}) \dots (J - 2a_n a'_n) = J - 2(a_1a'_1 + \dots + a_n a'_n) = J - 2J = -J.$$

Il suit de cette équation que

$$(J - 2a_1a'_1) \dots (J - 2a_p a'_p) C = -J.$$

Mais, comme  $J - 2a_i a'_i$  est évidemment une matrice orthogonale symétrique, elle est égale à sa matrice inverse et la dernière relation donne

$$C = -(J - 2a_1a'_1) \dots (J - 2a_p a'_p), \quad (4)^3$$

d'où l'on voit que la matrice en question est égale aussi — au signe près — au produit de  $p$  matrices symétriques orthogonales de la forme

$$J - 2aa'$$

les  $a$  étant les colonnes d'une même matrice orthogonale.

6. On peut se renseigner de plus près sur les composantes d'une matrice  $C$  données par les formules (3), (4).

Puisque

$$(C - J)(C + J) = 0$$

toutes les colonnes de  $C + J$  sont des solutions du système

$$(C - J)x = 0. \quad (5)$$

Mais comme le rang de ce système est égal à  $n - p$  et celui de  $(C + J)$  est égal à  $p$ , toute solution de (5) est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $(C + J)$ . D'autre part, la formule (3) donne

$$C - J = -2a_{p+1}a'_{p+1} - \dots - 2a_n a'_n,$$

d'où il suit

$$(C - J)a_i = 0,$$

<sup>3)</sup> Ceci suit aussi directement de la formule (2).

pour  $i = 1, \dots, p$ . Donc,  $a_1, \dots, a_p$  sont des solutions du système (5), remplissant, de plus, les conditions d'orthogonalité, et, par suite, des combinaisons linéaires des colonnes de  $(C + J)$ . Ces combinaisons sont linéairement indépendantes, puisque ce sont des éléments d'une matrice orthogonale, dont le rang est toujours  $n$ .

Inversement, tout système  $a_1, \dots, a_p$  jouissant de ces propriétés, peut figurer dans la formule (4). En effet,  $a_1, \dots, a_p$  étant un système de solutions du système (5), remplissant les conditions d'orthogonalité, considérons le système

$$(C - J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p) x = 0. \quad (6)$$

Soit  $z$  une solution de ce système, on a

$$(C - J) z - 2(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p) z = 0. \quad (7)$$

Multiplions cette équation par  $a'_i$  du côté gauche. Comme  $(C - J) a_i = 0$ , on a  $a'_i(C - J) = 0$  et, il suit de (7):

$$a'_i(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p) z = 0.$$

Mais comme  $a'_i \cdot a_1 = \dots = a'_i \cdot a_p = 0$ , sauf  $a'_i \cdot a_i \neq 0$ , on a  $a'_i \cdot a_i a'_i \cdot z = 0$ , d'où l'on conclut aisément  $a'_i \cdot z = 0$  pour  $i = 1, \dots, p$ . Donc, l'équation (7) donne

$$(C - J) z = 0. \quad (8)$$

Ceci fait voir que toute solution du système (6) est, en même temps, une solution du système (5). Toute solution de ce dernier système est une combinaison linéaire des  $a_1, \dots, a_p$ , donc

$$z = k_1a_1 + \dots + k_pa_p.$$

On a, par conséquent,

$$(C - J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p) (k_1a_1 + \dots + k_pa_p) = 0,$$

d'où il suit

$$(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p) (k_1a_1 + \dots + k_pa_p) = 0. \quad (9)$$

Dans ce produit les termes

$$a_r a'_r \cdot k_s a_s = k_s a_r a'_r \cdot a_s = 0 \text{ pour } r \neq s,$$

puisque

$$a'_r \cdot a_s = 0 \text{ pour } r \neq s;$$

le terme

$$a_i a'_i \cdot k_i a_i = k_i a_i a'_i \cdot a_i = k_i a_i,$$

puisque  $a'_i \cdot a_i$  est une matrice  $i_1$  (v. num. 5). L'équation (9) donne le résultat

$$k_1 a_1 + \dots + k_p a_p = 0,$$

qui signifie que le système (6) n'a que des solutions nulles. Donc, son rang est égal à  $n$ .

Or, formons le produit

$$\begin{aligned} & (C - J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p)(C + J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p) = \\ & = C^2 - J^2 - 2(C - J)(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p) - 2(a_1a'_1 + \dots + \\ & + a_pa'_p)(C + J) + 4(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p)^2 = -2(a_1a'_1 + \dots + \\ & + a_pa'_p)(C - J) - 4(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p) + 4(a_1a'_1 + \dots + \\ & + a_pa'_p) = 0. \end{aligned}$$

Ici, on a fait usage de ce que  $a_i a'_i \cdot a_k a'_k = 0$  pour  $i \neq k$ ,  $a_i a'_i \cdot a_i a'_i = a_i a'_i$ . Le produit considéré étant nul et le premier facteur ayant le rang égal à  $n$ , le second a le rang égal à 0, donc

$$C + J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p = 0$$

d'où il suit

$$C = -J + 2a_1a'_1 + \dots + 2a_pa'_p. \quad (10)$$

On démontre facilement que  $(J - 2a_1a'_1) \dots (J - 2a_pa'_p) = J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p$ . Donc, (10) est bien la formule (4). On a le résultat:

Les systèmes  $a_1, \dots, a_p$ , figurant dans la formule (4), qui donne la décomposition d'une matrice orthogonale symétrique, sont un système de solutions du système (5) jouissant des propriétés de l'orthogonalité; inversement, tout système de  $p$  solutions de ce système jouissant de ces propriétés donne lieu à une telle décomposition. Ce système de solutions est, d'ailleurs, formé de  $p$  combinaisons linéaires des colonnes de la matrice  $(C + J)$ .

Il va sans dire que le même résultat s'applique à la formule (3), c. à d., aux systèmes  $a_{p+1}, \dots, a_n$ .

\*

## O souměrných maticích ortogonálních.

(Obsah předešlého článku.)

Každou takovou matici  $C$  lze vyjádřiti tvarem vzorce (2), jestliže  $p$  je hodnota matice  $C + J$  ( $J$  matice jednotková); při tom čísla  $a$  jsou prvky ortogonální matice vhodně volené. Každá taková matice je součin  $n - p$  a také součin  $p$  jednoduchých matic tvaru  $J - 2aa'$ , kde  $a$  jsou sloupce téže ortogonální matice (vzorce (3), (4)). Soustavy  $a_1, \dots, a_p$  vzorce (4) jsou řešení soustavy lineárních rovnic (5), která jsou zároveň ortogonální; toto řešení je ostatně lineární kombinací sloupců matice  $C + J$ .