Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 2, 85--110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109319

Zde obdržíme veškeré relace geometrie Euklidovy, položíme-li

$$\lim \varepsilon = 1.$$

Theorie Lobačevského předpokládá

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{-1}}{|\varrho|},$$

kdež ϱ značí určitou konstantu.

Je-li konečně

$$\varepsilon = \frac{1}{|\varrho|},$$

pak máme základní větu pro prostor Riemannův.

Že však geometrie neeuklidovská jest nutným členem našich názorů geometrických, dokázal Klein *). Jak známo, rozlišeny byly vlastnosti obrazců dle toho, zda se při promítání mění čili nic. Vlastnosti polohy promítáním se nemění. To neplatí však všeobecně o vlastnostech metrických. Teprve když Cayley **) ve svém pojednání „Memoirs upon Quantics" dokázal, že každá vlastnost metrická obsažena jest v projektivním vztahu obrazce ku pevné kuželosečce, nebylo třeba rozlišení svrchu uvedeného. Klein dokazuje l. c. souvislost bádání Cayleyových s geometrií neeuklidovskou.

Věstník literární.

Eléments de la théorie des Fonctions elliptiques par *Jules Tannery* et *Jules Molk.* Tome I. Introduction. — Calcul différentiel (Ire Partie). Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893.

Tento první ze čtyř svazkův, z nichž se celý spis bude skládati, věnován úvodu a první části oněch úvah o theorii elliptických funkcí, jež náležejí počtu differencialnému.

Úvodem, zabírajícím 132 strany, spis velice získal; po-

---

*) Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Ann. Svazek 4.

*) Phil. Trans. 149.

dáváť ve třech kapitolách úvahy o nekonečných řadách a produktech, o theorii celistvých transcendentních funkcí, a zaokrouhluje tak spis v jednotnější celek. Úvahy o funkcích, založené na theorii integralů vzatých v komplexních mezích, do tohoto úvodu pojaty nebyly, jakožto obecně známé na fakultách francouzských. Následující pak theorie elliptických funkcí vychází z nejmarkantnější vlastnosti jejich, totiž z dvojperiodičnosti; methoda i označení — až na nepatrnou odchylku — jsou *Weierstrassovy*. V tomto prvním svazku zavedena funkce σ, a odvozeny její vlastnosti, jakož i vlastnosti funkcí ζ a $\wp$ z ní plynoucích. Druhý svazek bude obsahovati theorii funkcí ϑ a obecné vlastnosti dvojperiodických funkcí, odvozené hlavně z *Hermite-ova* jich rozkladu na jednoduché elementy, čímž bude zakončena část spisu vztahující se k počtu differencialnému. Svazek III. pak bude obsahovati problem inverse a theorii integralův elliptických, poslední konečně různé applikace. Než naznačme již obsah I. svazku této theorie elliptických funkcí, jež, jak z naznačeného obsahu patrno, jest rázu elementarnějšího než na př. spis *Halphenův*, bohužel však ne zcela dokončený. — Předpokládajíce základní věty o jednoduchých nekonečných řadách jakožto známé, přistupují auktoři v I. kapitole ku konvergenci nekonečných součinův, a ukazují na analogii absolutně konvergujících součinů se součiny o konečném počtu faktorův. Následují nekonečné řady a součiny dvojité, jichž členy totiž závisí na dvou indexech. — Součet takové řady se arci definuje jakožto limita jistých součtů, vznikajících sečítáním členův; jest patrno, že teprve přesným vytčením způsobu, kterým se tyto součty mají tvořiti, jest ona limita definována. K této základní stránce poukázáno s největší pečlivostí a zároveň vytčena ona volnost u tvoření zmíněných součtův, jíž se nejčastěji užívá u absolutně konvergentních řad a to sčítání dle řádků nebo dle sloupců. Jakožto příklad vyšetřena konvergence dvojité řady

$$\sum\sum\frac{1}{(\lambda\alpha^2+2\,\mu\alpha\beta+\nu\beta^2)^p},$$

kde p značí celistvé číslo kladné, λ, μ, ν realná čísla a s. taková, že výraz $\lambda\alpha^2+2\,\mu\alpha\beta+\nu\beta^2$ při realných celistvých α, β jest vždy kladný, vyjma při $\alpha=0$, $\beta=0$; indexy α, β nabývají všech celistvých hodnot, kladných i záporných, mimo kombinaci $\alpha=0$, $\beta=0$. — Výsledku, že řada konverguje při $p>1$ použito pak k vyšetření konvergence řady v theorii elliptických funkcí důležité $\sum\sum\frac{1}{(\alpha A+\beta B)^n}$, v níž A, B jsou dvě čísla o podílu imaginarném, a shledáno, že konverguje absolutně při

$n \geqq 3$. Kapitolu ukončují zcela obdobné úvahy o dvojných nekonečných produktech.

V kap. II. definována stejnoměrná konvergence řad a součinův, jichž členy závisí na jedné proměnné, ukázáno, že takové řady, jsou-li jednotlivé členy spojitými funkcemi, definují též spojitou funkci, a vytčena integrace této funkce integrováním jednotlivých členův. Následují řady mocninové, v analysi tak důležité; vytčeny o nich známé dvě věty *Abel-ovy*, pojem kružnice konvergenční, pojem celistvé funkce transcendentní, nerovnost *Cauchy-ova*, z níž posouditi lze abs. hodnotu koefficientů řady, applikována tato nerovnost na odvození důležité věty, že každá celistvá trancendentní funkce pro dosti velké hodnoty proměnné se stává libovolně velkou a konečně odvozen princip methody neurčitých koefficientův.

Dále pojednáno dle *Weierstrass-a* o řadách a součinech, jichž členy jsou mocninové řady, hlavně se zřetelem k seřadění dle mocností proměnné; a podána applikace na odvození derivace mocninové řady a jejího rozvoje *Taylor-ského*, ukázáno, že stupeň nullového místa takové funkce jest celistvý a konečný, a provedena integrace její. Vrátivše se k řadám, jichž členy jsou mocninové řady, ukazují auktoři, za jakých výminek se takové řady jako obyčejné součty derivují, a odvozují inversi mocninové řady. Kapitolu zakončuje důležitá stať o propagaci funkce, definované mocninovou řadou; poukázavše ku případu, kdy nelze funkci za kruh konvergenční propagovati jedním příkladem, který p. *Mat. Lerch* byl uveřejnil (Acta mathematica, t. X), vykládají jasně podstatu propagace a dospívají k *Weierstrassovu* pojmu analytické funkce. Jakožto applikace následuje důkaz existence integralů linearných differencialných rovnic druhého řádu.

Kapitola III. jedná o celistvých funkcích transcendentních, nejprve o funkci exponentialné, z níž vyvozeny řady pro funkce goniometrické a hyperbolické, pak o nekonečných součinech podávajících tyto funkce; tyto vyvozeny z rozkladu na kořenové faktory funkce celistvé $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m - \left(1-\frac{x}{m}\right)^m$, jejíž limita pro $m = \infty$ jest $2 \sin \mathrm{hyp}\, x$. Ze součinů vycházejí logarithmickým derivováním *Eulerovy* formule podávající $\operatorname{cotg} x$ a $\operatorname{tg} x$ jakožto nekonečné řady o racionalných členech. K týmž a obecnějším řadám vede rozklad na parcialné zlomky lomené funkce

$$i\,\frac{\left(1+\frac{\lambda x i}{m}\right)^m+\left(1-\frac{\lambda x i}{m}\right)^m}{\left(1+\frac{x i}{m}\right)^m-\left(1-\frac{x i}{m}\right)^m},$$

jejíž limita pro $m = \infty$ jest patrně $\frac{\cos \lambda x}{\sin x}$.

Kapitolu zakončuje *Weierstrassova* obecná formule, podávající celistvou transcendentní funkci o daných nullových místech ve tvaru absolutně konvergujícího nekonečného součinu (rozklad na primarné faktory), dále důkaz, že jednoznačná funkce, která v konečnu mimo poly nemá singulárných míst, jest podílem dvou celistvých funkcí, a konečně věta *Mittag-Lefflerova*, která podává výraz pro jednoznačnou funkci o daných polarných nebo podstatných singularitách.

Následující I. kapitola první části „počtu differencialného“ obsahuje obecné úvahy o periodických funkcích: pojem periody, přímé utvoření celistvé funkce o jedné periodě pomocí předchozí věty *Weierstrassovy*, pojem dvou period podstatně různých, a následující věty objasňující povahu periodických funkcí: „Je-li jednoznačná funkce $f(u)$ v bodě u_0 pravidelnou nejsouc stálou, tu existuje kladné číslo ε, pod něž neklesá absolutní hodnota žádné periody funkce $f(u)$; dvě periody o realném poměru se redukují na jedinou periodu, jejíž jsou celistvými násobky; má-li funkce dvě periody o imaginarném poměru, tu existují dvě *primitivní* periody, z nichž totiž každou periodu lze sčítáním a odčítáním odvoditi.“ Z toho je již zřejmo, že nemohou existovati tři periody podstatně různé.

Po důkazu věty *Liouville-ovy*, že dvojperiodická funkce celistvá jest nutně konstantou, auktoři obracejí se přirozeně k jednoznačným funkcím o nekonečném množství polův, to jest ku podílu dvou funkcí celistvých; neboť do této kategorie náležejí patrně všecky dvojperiodické funkce nemající v konečnu jiných singularit než polův a jež se zovou elliptickými funkcemi v širším smyslu. *Weierstrass* vychází, jakož patrno též z krásné, dosud nedokončené publikace: „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor *K. Weierstrass* bearbeitet und herausgegeben von Dr. *A. Schwarz*“, z algebraického addičního theoremu, a omeziv se na jednoznačné funkce, dochází k těmto elliptickým funkcím, což jest pochod methodicky snad nejdokonalejší. Funkce ty, jakož snadno plyne, jsou obsaženy v typu

$$e^{g(u)}\frac{[\sigma(u-\alpha_1)]^{\mu_1}\ \ldots\ [\sigma(u-\alpha_p)^{\mu_p}]}{[\sigma(u-\beta_1)]^{\nu_1}\ \ldots\ [\sigma(u-\beta_q)]^{\nu_q}}.$$

Zde $\sigma(u)$ značí celistvou funkci o nullových bodech $ma+nb$, shodných dle period a, b s bodem o, $g(u)$ jest funkcí celistvou, a exponenty μ a ν kladná čísla celistvá.

Druhá a poslední kapitola, obírající se specialnými funkcemi, podává v § I. nejjednodušší funkci σu, kteráž, značíme-li $2\omega_1$, $2\omega_3$ periody, jest dána absolutně konvergentním součinem

$$\sigma u = \sigma(u \mid \omega_1, \omega_3) = u\Pi\left\{\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\},$$

kde $s = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, a m, n nabývají všech celistvých kladných i záporných hodnot, mimo kombinaci o, o. — Z funkce σu se odvozuje funkce další, jež označena dle *Halphen-a* ζu, logarithmickým derivováním

$$\zeta u = \zeta(u \mid \omega_1, \omega_3) = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum\left\{\frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2}\right\},$$

a z ní opětným derivováním nejjednodušší dvojperiodická funkce, *Weierstrassovo* $\wp(u)$

$$\wp(u) = -\zeta'(u) = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du} = \frac{1}{u^2} + \sum\left\{\frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2}\right\}.$$

Poloviční periody ω_1, ω_3 — u Weierstrasse ω, ω' — vedou k poloperiodě — $(\omega_1 + \omega_3)$, kterou auktoři označují ω_2, lišíce se také v tom od *Weierstrassa*, jenž zavádí $\omega'' = \omega + \omega'$; změna odůvodněna větší stručností a souměrností ve formulích.

Z definičních rovnic vyplývá ihned, že $\sigma(u)$ a $\zeta(u)$ jsou liché funkce, $\wp(u)$ však sudá, plynou dále t. z. vztahy homogennosti, a rozvinutí v řady mocninové, n. př. řada

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3u^2\sum\frac{1}{s^4} + 5u^4\sum\frac{1}{s^6} + \ldots,$$

platná v okolí bodu o. Vytknuvše, kterak se mění funkce $\wp, \zeta, \sigma$, zvětší-li se argument o periody $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, ukazují auktoři ještě, že $2\omega_1$, $2\omega_3$ jsou primitivní periody funkce $\wp(u)$.

V § II. odvozeny dvě důležité relace mezi uvažovanými funkcemi, z nich plynoucí addiční theoremy, jakož i základní differencialní rovnice prvního řádu, které hoví $\wp(u)$:

$$\begin{aligned}\wp'^2 u &= 4(\wp u - \wp\omega_1)(\wp u - \wp\omega_2)(\wp u - \wp\omega_3)\\ &= 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3,\end{aligned}$$

kde $$g_2 = 60 \sum \frac{1}{s^4}, \quad g_3 = 140 \sum \frac{1}{s^6}.$$

Z této pak plyne zajímavé faktum, že veškeré součty $\sum \frac{1}{s^{2r}}$ v předchozích řadách se vyskytující, lze vyjádřiti jakožto racionalné celistvé funkce dvou hodnot g_2, g_3 o racionalných koefficientech; hodnoty g_2 a g_3, jež slují *invarianty*, stanoví, právě tak jako periody, funkce σ, ζ, $\wp$.

V § III. převeden dvojitý nekonečný součin pro $\sigma(u)$ na jednoduchý, z něho odvozeny jednoduché nekonečné řady pro $\zeta(u)$ a $\wp(u)$, a odtud důležitá relace

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \pm \frac{\pi}{2} i,$$

kde $$\eta_1 = \zeta(\omega_1), \quad \eta_3 = \zeta(\omega_3).$$

V § IV. zavedeny za příčinou pohodlnějšího označení *kofunkce* $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ rovnicemi

$$\sigma_\alpha u = \frac{e^{-\eta_\alpha u} \sigma(u + \omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = \frac{e^{\eta_\alpha u} \sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma\omega_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

jakož i jich logarithmické derivace $\zeta_\alpha u$, dané též rovnicemi

$$\zeta_\alpha u = \zeta(u + \omega_\alpha) - \eta_\alpha,$$

odvozeny pro ně formule analogické k formulím, pro původní funkce vyvinutým, a applikovány na vyčíslení hodnoty $\wp \frac{u}{2}$, specialně $\wp \frac{\omega_\alpha}{2}$. Po několika úvahách o homogennosti zakončen § úvahami o specialném, pro applikace však zvlášť důležitém případě, kdy ω_2 a $\frac{\omega_3}{i}$ jsou realné, kladné hodnoty.

§ V. jedná o transformaci period $2\omega_1$, $2\omega_3$ na dvě aequivalentní periody $2\Omega_1$, $2\Omega_3$, t. j. o relacích mezi funkcemi příslušnými oněm resp. těmto periodám; tu ihned patrno, že funkce σ, ζ, $\wp$ jsou v obou případech tytéž, kdežto pro kofunkce vychází, že se buď též reprodukují, buď zaměňují.

Poslední § věnován obecnému případu transformace, kdy totiž nové periody jsou linearné homogenní funkce původních o celistvých koefficientech, jichž determinant ovšem nemizí. Problem redukován na jednodušší, požadující, by se vyjádřily funkce příslušné periodám $\frac{2\omega_1}{n}$, $2\omega_3$ pomocí funkcí původních, a tento řešen přiměřeným seřaděním primarných faktorů v součinu pro $\sigma(u \mid \frac{\omega_1}{n}, \omega_3)$. Na konec připojeno vzhledem ku pozdějším statím několik základních úvah o linearných substitucích s dvěma proměnnými, hlavně pro případ celistvých koefficientův.

Kniha pánů *Tannery-ho* a *Molka* nabývá zvláštní ceny svým úvodem, jenž podává způsobem přesným, jasným a vybraným některé z hlavních rysů funkční theorie; následující theorie elliptických funkcí — poskytujíc hojných applikac ku obecným úvahám úvodu — jest jednak výbornou pomůckou k vniknutí do jemnějších částí funkční theorie, jinak pak uvádí čtenáře způsobem přirozeným a snadným do theorie, které dnes mathematikům postrádati nelze.

Doporučuji spis tento našim kruhům vědeckým co nejvřeleji a končím přáním, by se v brzku i naší literatuře dostalo knihy obdobné; vyplnila by dojista mezeru velice citelnou.

Eduard Weyr.

Geometrie pro vyšší gymnasia. Sepsal *Alois Strnad*, professor při c. k. vyšší realce v Praze. Nakladatel Fr. Kytka, knihkupec v Praze r. 1893.

V mathematické literatuře naší, pokud se vztahuje ku střednímu školství, v novější době učiněn valný pokrok — před několika lety doplněna byla výborným spisem — algebrou — sepsaným zvěčnělým professorem realky Karlínské *Frant. Machovcem* algebrou stejně dobrou a praktickou, sepsanou professorem Klatovského gymnasia *Dr. Taftlem* a algebrou důkladně spracovanou ředitelem realky Plzeňské *Hozou.* Knihy tyto vyhovují zplna úkolu svému a schváleny byvše vysokým c. k. ministerstvem kultu a vyučování, jsou jakožto učebné knihy zavedeny na českých středních školách našich. V nejnovější době — na sklonku loňského roku školního — překvapil nás však známý a dovedný spisovatel professor *Alois Strnad* dvěma učebnicemi pro vyučování geometrie, jednak pro vyučování na vyšších gymnasiích, jednak pro vyučování na vyšších školách realných, o nichž plným právem již předem lze říci, že jménu páně spisovatelovu činí čest a jeho odbornou činnost spisovatelskou chválou zahrnují.

Po drahná léta — od let sedmdesátých — vyučovalo se geometrii na školách středních dle učebných knih Jandečkových, Šandových a Močníkových (překlad z němčiny), učebnic to dobrých, z nichž zvláště knihy Jandečkovy pro přesné a logické uspořádání a spracování látky učebné, pro dokonalou souvislost jedné stati s druhou a dovednou stručnost i jasnost všech pouček a definic u všech nás došly obliby: tím lze též vysvětliti, proč knihy tyto tak dlouho, ač během času vždy víc a více odchylovaly se od osnovy učebné a od instrukcí v té příčině platných, se udržovaly a dosud udržují — vždyť milerád každý z nás doplňoval a opravoval, co doplnění a opravy jakési vyžadovalo, ježto knihy Jandečkovy poskytovaly jinak záruky, že dobře lze vésti studující mládež při geometrickém vyučování jimi a že žádaného výsledku u nich lze se dodělati.

Než žádoucno, ano i nutno již bylo, aby u věci té jakási oprava se stala. To seznal i pan školní rada Jandečka sám a důkazem toho jest, že započal letošního roku vydávati v novém vydání své knihy učebné — planimetrie páté vydání jest již v rukou mládeže školní.

U valné míře však zavděčil se všem přátelům středního školství professor *Strnad* vydáním svých geometrií pro vyšší gymnasia a vyšší realky.

Jsa výborným učitelem a znalcem mathematického studia vůbec, ano odborníkem na slovo vzatým, mohl plným právem podrobiti se úkolu, aby spracoval a vydal geometrii pro studující mládež vyššího gymnasia. S nevšední dovedností a zručností, s jistotou plnou, ano s jakousi elegancí v provádění, vykonal úkol svůj a předložil práci svou veřejnosti — a dílo jeho jest dobré a záslužné.

Kniha páně *Strnadova*, řídíc se postupem i obsahem svým přesně osnovou učebnou, poskytuje jasný přehled veškerého učiva geometrického osnovou vyšším gymnasiím předepsaného věnujíc, jak toho i instrukce vším právem žádají, novějšímu měřictví, jež v posledních letech tak značných a znamenitých pokroků učinilo, že ho nelze více mlčením pominouti aneb pouze několika větami odbýti, náležitého místa (viz: prvky úběžné, souměrnost v rovině a prostoru, body harmonicky sdružené, věty Cevovu a Menelaovu, pol a poláru, chordálu dvou kružnic, zákon reciprocity atd.). Látka urovnána jest bedlivě, s náležitým taktem didaktickým a v postupu takovém, aby potřebné vědomosti i algebraické i geometrické již předpokládány býti mohly — vůbec snažil se všemožně pan spisovatel, aby podal žákům ve formě co možno dokonalé látku úplnou, náležitě upravenou a pečlivě spracovanou.

Učebnice tato obsahujíc veškeré partie, s nimiž jest se žákům vyššího gymnasia seznámiti, vydána jest, jak toho i instrukce pro vyučování na vyšších gymnasiích žádají, jakožto celek v jediném svazku, čítá 285 stran a rozdělena jest na 36 statí se 150 paragrafy a to:

Planimetrie čítá 113 stran a rozvržena jest na 14 statí se 62 paragrafy.

Trigonometrie čítá 45 stran a rozvržena jest na 6 statí se 22 paragrafy.

Stereometrie čítá 59 stran a rozvržena jest na 8 statí se 32 paragrafy.

Analytika čítá 64 stran a rozvržena jest na 8 statí se 34 paragrafy.

Planimetrie počíná krátkým úvodem, v němž pojednáno jest o základních pojmech a větách geometrických, o přímce a rovině, jichž definice zastoupeny jsou — s čímž nelze než úplně souhlasiti — zásadami. Paragrafem čtvrtým počíná vlastní planimetrie a to přímkou a úhlem. Definice úhlu neuspokojuje zplna, než přesnější a žákům pochopitelnější jest než jiné definice v jiných učebnicích se vyskytující, jako na příklad: „Úhel jest rozdíl směru dvou nerovnoběžek aneb odchylka jedné přímky od druhé atd.“ Velmi pěkně provedena a vhodně umístěna jest stať o souměrnosti útvarů geometrických dle osy a středu (§ 11.) a že zařaděna je stať tato před naukou o trojúhelníku, jest, má-li se hojného její užívání v nauce o trojúhelníku, kruhu a mnohoúhelnících, vůbec ve všech takřka partiích geometrie na zření, v ohledu každém správné. Že pan autor rozšířil ihned na počátku stať o kružnici a kruhu o pojednání o úhlu středovém, o oblouku a tětivě, o vzájemné poloze přímky a kružnice a o vzájemné poloze dvou kruhův, jakož i o přímce jakožto místě geometrickém a že o stati této pojednává před statí o shodnosti trojúhelníkův, jest odůvodněno se stanoviska didaktického úplně — vždyť nejenom usnadněn jest takto žákům značně postup další a poskytnuta jim náležitá průprava k sestrojování různých úkolův o trojúhelníku a kružnici, nýbrž i zaručeno tím, že všemu náležitě bude porozuměno a — což zajisté nad jiné důležito — že osvojeno bude v míře také, v jakéž další partie geometrie toho stále vyžadují.

Stať o úměrnosti úseček jest zpracována pílí veškerého uznání hodnou, velmi instruktivně a tak důkladně, že jistě utkví žákům v mysli a to tím více, ježto ve spojení s následující statí o podobnosti trojúhelníků svého upotřebení nalézá při odůvodnění důležitých vět a úloh strojných o přímce, trojúhelnících a o kružnici. · Zřejmo tedy, že dbalým byl toho pan autor, aby postupováno bylo od jednodušších případů ku případům složitějším, od konkretních k abstraktním a aby takto žákům práce byla usnadněna. Z té příčiny zajisté následuje také stať o podobnosti mnohoúhelníků po stati o podobnosti trojúhelníků. Rozšíření a upotřebení nauky o podobnosti útvarů geometrických v poloze středové, stať o obsahu úhelníkův, o obvodu a obsahu kruhu zamlouvají se velmi jak svým uspořádáním tak i provedením a jsou toho důkazem, že šetřeno vždy a všude logické souvislosti stati jedné se statí druhou.

V § 63. až do § 95. pojednává pan spisovatel o geometrických útvarech v prostoru se rozprostírajících v témž postupu, touž jasností a přehledností v uspořádání a provedení jednotlivých částí a touž obezřelostí jako v planimetrii. Autor počíná nauku tuto statí o poloze přímky v rovině, v níž pojednává o prvcích útvarů prostorných, o určitosti roviny, o průsečnosti dvou rovin, o přímce k rovině kolmé a o přímkách rovnoběžných vespolek a s rovinou. V stati této zamlouvá se nám zvláště zmínka učiněná o zákoně duality či reciprocity, k němuž dán podnět seřaděním několika vět týkajících se bodův a rovin, jakožto prvků dualných a přímky jakožto prvku neutralního. Po té následuje stať o vzájemné poloze rovin, v níž jedná se o rovinách rovnoběžných a různoběžných, o průmětu bodu a přímky a o souměrnosti útvarů geometrických, k čemuž připojena i stať o strojných úlohách prostorových, aby co možná buzena byla geometrická představivost a samostatnost žákův; v stati této poukázáno též k tomu, že každou úlohu strojnou lze pokládati za řešenou, rozloží-li se v řadu úloh prvotných a úkolů geometrie rovinné. Veškeré věty této stati obecné jsou velmi pečlivě a přehledně seřaděny, důkazy jsou jednoduché a jasné a což zvláště se zamlouvá, pouze na nejhlavnější a nejpotřebnější zredukovány. Že pan spisovatel připojil ke stati této i význam geometrických míst v prostoru a několik vět o geometrických místech, které z vět již dokázaných lze vyvoditi — to lze jen chváliti.

Nauka o trojhranu, mnohohranu a mnohostěnu jest stručně a při tom tak důkladně spracována, že vyhovuje každému přání v té příčině projevenému. Že přijal pan autor do knihy své hranolec a pojednává o zvláštních jeho druzích, jak toho i instrukce a to vším právem doporučují, zamlouvá se nám velmi a to zvláště pro případné upotřebení jeho v nauce o obsahu — že však obvyklý a jednoduchý důkaz věty Eulerovy nahrazen důkazem Steinerovým, s tím nelze nám zplna souhlasiti, ježto důkaz ten pro gymnasialní žáky, jimž o promítání těles na roviny buď málo nebo dokonce ničehož není známo, jest netoliko velmi obtížný, nýbrž i nesrozumitelný.

Velmi krásně pojednáno jest o útvarech sférických — zvláště líbí se nám spojení sférického trojúhelníka s trojhranem k němu náležejícím a vývoj vlastností sférického trojúhelníka z vlastností trojhranu příslušného. Stanovení obsahu trojbokého jehlanů komolého rozkladem dvěma rovinami v součet tří jehlanův úplných, jakož i odvození krychlových obsahů hranolu, jehlanu úplného a komolého z obsahu prismatoidu a stanovení obsahu trojbokého hranolu šikmo seříznutého, jest v každém ohledu provedeno zdařile.

Trigonometrii autor počíná stanovením směrův úseček a úhlův a dospívá, spojuje s délkou úsečky i znamení směru a s velikostí úhlu i směr otočení, k tomu, že lze úsečky i úhly míti za veličiny relativní a takto s nimi nakládati; při tom neopomenul pan spisovatel ihned poukázati k jednoznačnosti úseček a mnohoznačnosti úhlův. Po té pojednává o průmětu bodu, úsečky a lomené čáry i otevřené i uzavřené, stanoví polohu bodů v rovině souřadnicemi rovnoběžnými a přechází k vyšetřování vzájemnosti mezi měřením délek a měřením úhlův — k funkcím úhloměrným — jež definuje a graficky znázorňuje. Po té pojednává o změně hodnoty i znaménka funkcí goniometrických, roste-li úhel od nuly do 360°, stanoví meze, ve kterýchž každá z nich jest uzavřena a které z nich jsou funkce přetržité (tangens, cotangens) a které spojité (sinus, cosinus).

Poukazuje na to, že geometrické funkce daného úhlu jsou veličiny na sobě tak závislé, že hodnotou jedné dány jsou též hodnoty ostatních, vypočítává číselné hodnoty goniometrických funkcí úhlů 30°, 45° a 60° a hodnoty funkcí úhlu, dána-li jest hodnota jedné jeho funkce, k čemuž připojuje i sestrojení úhlu, dána-li některá jeho funkce goniometrická. Po té pojednává o funkcích dvou neb několika úhlův a to tak obratně a způsobem tak jasným a pochopitelným, že není si ničehož více přáti — zvláště zdařile vysvětluje, že funkce geniometrické jsou funkce periodické, z čehož pak následuje, že $f(2n\,\mathrm{R} \pm \alpha) = (\pm) f(\alpha)$ a $f[(2n \pm 1)\,\mathrm{R} \pm \alpha] = \pm \operatorname{cof}(\alpha)$, při čemž zajisté jenom nedopatřením nebo vinou sazečovou vynecháno dvojí znaménko při $2n \pm 1$. Velmi případně podán jest, a to na základě promítání, výklad funkce součtu neb rozdílu dvou úhlův, dvojnásobného a polovičného úhlu, jakož i součtu a rozdílu funkcí geniometrických, při čemž každý vzorec důležitější i příkladem objasněn jest.

Připojení o užití funkcí goniometrických v arithmetice a řešení rovnic goniometrických jest velmi případné a to tím více, ježto partie tato opětně vrácena knize, do kteréž náleží — připomínáme však zde, že bylo by bývalo dobře, kdyby pan autor na jednom příkladě byl žákům ukázal, jak sobě v praxi počínati, obsahuje-li goniometrická rovnice několik funkcí neznámého úhlu. Uspořádání a současně praktické užití trigonometrie jest úplně ve smyslu instrukcí provedeno a to způsobem tak obratným, že nelze ničehož více žádati. Zmínka o triangulaci a řešení úlohy Pothenotovy v geodaesii tak důležité zajisté slouží jen ke zvýšení ceny knihy samé.

Průpravou k analytické geometrii jest panu spisovateli stanovení geometrického významu výrazův algebraických, sestrojení výrazů linearných a grafické počítání, k čemuž připojeno i řešení několika a to velmi vhodně vyvolených úkolů geometrických užitím algebry. Stať tato překvapuje mile svou stručností a přec svou celostí a přesností. Velmi pěkně podána zvláště stať o grafickém mocnění a odmocnění a řešení rovnic stupně druhého.

Žeť počíná pan autor analytickou geometrii určením bodu v přímé řadě, při čemž na zření má jednoznačné určení bodu jednak dělícím poměrem ke dvěma daným bodům základním, jednak dvojpoměrem ke třem bodům základním, jest se stanoviska didaktického a methodického zcela správné a odůvodněno hojným užitím v statích následujících. Že transformace souřadnic omezena toliko na pošinutí soustavy směrem rovnoběžným, při čemž počátek jiný, na otočení soustavy o jistý úhel a na přechod ze soustavy pravoúhlé do kosoúhlé, shledáváme zcela v pořádku a chválíme za to pana autora, ježto podává žákům toliko to, čehož pro další porozumění jest jim nutno a ne více.

Velmi důkladně a srozumitelně vyložena je stať o geometrickém významu rovnic o dvou proměnných; grafické znázornění několika případův, jako sinoidy, křivky úmrtnosti na základě tabulky Deparcieuxovy a křivky pravděpodobného věku, zajisté uspokojí každého.

Odvození rovnice přímky v obecné poloze z rovnice přímky počátkem procházející jest daleko instruktivnější, než odvození ono, s nímž setkáváme se v jiných učebnicích geometrických. Velmi důkladně spracována jest stať o stanovení podmínky, kdy tři přímky dané rovnicemi svými procházejí jedním bodem; při úloze té vzpomenul pan autor i věty Laméovy: $P_1 + \lambda P_2 = 0$ (při proměnném λ značí rovnice tato svazek paprskův, jehož středem jest průsečník přímek P_1 a P_2).

Že vyvozuje pan spisovatel rovnici tečny kruhu ihned při spojení přímky s kruhem a stanoví tuto vyšetřením podmínky, že přímka jest tečnou kruhu, vyhovují-li souřadnice dotyčného bodu podmínce $x = p \cos \beta$, $y = p \sin \beta$, jest věci samé přiměřeno a po stránce methodické odůvodněno zcela. Zvláště podařilo se pěkně panu spisovateli naznačiti, jak sestrojiti lze tečnu k ellipse a to jednak na základě geometrického místa bodů sdružených souměrně s jedním ohniskem ellipsy vzhledem k tečnám jejím, kteréžto geometrické místo, jak známo, jest kružnicí opsanou z druhého ohniska poloměrem rovným hlavní ose, jednak na základě geometrického místa pat kolmic, spuštěných s ohniska na tečny ellipsy. Že nahradil autor obtížný a při tom zdlouhavý způsob vyšetřiti a stanoviti rovnici průměru kuželoseček případem jednodušším a žákům daleko srozumitelnějším, jímž ze známé směrnice sečny a ze závislosti souřadnic středu rovnoběžných tětiv na souřadnicích koncových bodův těchto rovnice průměru se stanoví, dotvrzuje naši hořejší poznámku, že záleželo panu spisovateli na tom, aby ve všech partiích podával žákům toliko učivo způsobem přiměřeným a přístupným

Z poznámek s hora uvedených vysvítá, že v knize páně *Strnadově* náležitě dbáno jest i stránky vědecké i methodické. Učivo jest vesměs přiměřeně rozčlánkováno a postup z větší části synthetický. Aby žák netoliko větám geometrickým vůbec, jakož i důsledkům z nich plynoucím porozuměl, anobrž i těchto v praxi upotřebovati dovedl, o to postaráno jest hojným a pečlivým výběrem úkolův i spekulativných i konstruktivných.

Terminologie jest všude případná a jednotná a shoduje se celkem s terminologií při vyučování geometrickém obvyklou. Toliko s názvem „linie“ nesouhlasíme a viděli bychom to rádi, kdyby místo cizího slova toho užíváno bylo slova našeho „čára“ — proč zaváděti slova cizí, když terminologie naše vykazuje případné označení pojmu některého?

O slohu vším právem lze tvrditi, že jest stručný a vždy jasný. V poučkách, výměrech a výkladech jest dbáno mimo věcnou správnost a přesné formulování i jasného výkladu i logického uspořádání. Ku chvály hodným stránkám geometrie *Strnadovy* náležejí i poznámky historické v počtu hojném a výběru vhodném, které zajisté k oživení zájmů žákův přispějí a výklady samé učiní zajímavějšími. I umístění ukazatele názvů před obsahem knihy, jenž obsahuje hlavní názvy geometrické v jazycích cizích, lze knize připočítati k dobrému.

Zevnější úprava knihy jest velmi slušná a úhledná, tisk jest jasný a zřetelný a dle potřeby i různé velikosti a z různých druhů volený, jak toho zajisté přehlednost a důležitost jednotlivých vět vyžadují. Obrazce, jichž počet 228, jsou v ohledu každém velmi slušné a vzorně typograficky provedeny — že však pan autor stejnými písmeny označuje i vrcholy i délky stran úhelníkův, s tím nemůžeme nijak souhlasiti, ježto označením tímto žák v omyl bývá uváděn a důkazy samy někdy nejasnými se stávají.

Cena knihy jest mírná — nevázaný exemplář prodává se za 1 zl. 80 kr., vázaný v plátně za 2 zl.

Hrubých chyb tiskových v učebnici této vůbec není — za to však zbyly ještě chyby drobnější. Tyto však lze omluviti jednak, že knihy této vydání jest prvé, jednak že i při nejsvědomitější a nejpřesnější přehlídce při posledním přenášení tisku na papír sem tam některá přípona, některé znaménko nebo značka sazeči vypadne a takto příčinou tiskové chyby se stává. Doufáme však, že při druhém vydání chyb těch již v knize této nebude.

Na stránce 69. § 38. 4. v obrazci 74. místo ab' a ba' stůj aa' a bb'.

Na stránce 71. § 40. 3. místo ac stůj bc.

Na stránce 83. § 46. 1. místo $a'b'c'd'e'$ stůj $ab'c'd'e'$.

Na stránce 105. § 58. 3. místo am stůj af.

Nová tato učebnice vyniká tedy všemi vlastnostmi dobré knihy, i neváháme ji doporučiti všem pánům kollegům odborníkům a chováme přesvědčení, že v krátké době zavedena bude ku prospěchu školy a žáků ne-li na všech, tedy na většině našich škol středních. Prof. *Jos. Koch.*

Geometrie pro vyšší školy realné. Sepsal *Alois Strnad*, prof. na c. k. české realce Pražské. Nakladatel Fr. Kytka, knihkupec. Praha 1893.

V letech 1864—67 byla sepsána V. Jandečkou, nyní c. k. školní radou ve výslužbě, *Geometria pro vyšší školy realné*, skládající se ze čtyř svazkův, a to *planimetrie*, *trigonometrie*, *stereometrie a analytické geometrie v rovině*, jíž spravovalo se vyučování téměř na všech školách středních, a o níž jde všeobecný úsudek: Geometria Jandečkova jest dílo výborné. Jest jen želeti, že učebnice zmíněná, která již několika vydání se dočkala, dosud dle nové osnovy učebné a příslušné instrukce upravena nebyla, a že za příčinou tou školní potřebě v každé příčině vyhovovati nemůže. Tomu hleděl odpomoci prof. *Al. Strnad*, chvalně známý pěstitel geometrie, sepsav učebnici novou, jejíž název svrchu uvádíme. Hned jak se proslýchalo, že jal se spisovati tak potřebné dílo prof. Strnad, těšili jsme se na práci zdařilou. Studiem knihy této přesvědčili jsme se, že v mínění svém nebyli jsme sklamáni.

Souhlasíme, že pan spisovatel pojal do *jednoho* svazku veškero osnovou předepsané učivo geometrické pro vyšší školy realné, a to *planimetrii*, *trigonometrii rovinnou*, *stereometrii*, *trigonometrii sférickou a geometrii analytickou*, protože žáci stále mají před očima celek, a že se tím usnadňuje opakování oněch partií, které jim časem z paměti vymizely.

Učebnice jest uspořádána dle jednotlivých částí a každá část dle oddílů (§.) běžně číslovaných a přiměřenými nadpisy opatřených.

Spisovatel počíná krátkým úvodem, ve kterém pojednává mimo jiné o přímce a rovině, kterýchžto útvarů nedefinuje, uváděje pouze zásady, z nichž další vlastnosti jejich plynou.

Vlastní geometrie počíná přímkou a úhlem, který dle instrukcí definován jest jakožto část roviny omezené dvěma polopaprsky o společném počátku. Jsme přesvědčeni, že si je toho p. autor úplně vědom, že definice tato není úplně přesná, a že ji z různých definic o úhlech, kterým též leccos lze vytýkati, volil proto, že je pro žáky nejsrozumitelnější; z té příčiny s p. autorem souhlasíme. Pěkně a stručně probrána a náležitě vložena jest před trojúhelníkem souměrnost osová a středová, čímž docíleno, že na příslušných místech k důležitým vlastnostem, jež se k souměrnosti útvarů vztahují, mohlo býti poukázáno. Že část nauky o kruhu vřaděna jest před shodnost trojúhelníkův, nesouhlasí sice s osnovou, má však ten prospěšný účel, aby si žáci odvození oněch základních úloh strojných osvojili a v nich se upevnili, jichž užívá se při sestrojování trojúhelníkův, z něhož důležité znaky o shodnosti trojúhelníků vyplývají. Odtud počínaje, pan spisovatel dokazuje věty, velikost úhlů nebo úseček vyslovující, shodností trojúhelníků, čímž důkazy tyto stávají se jednoduššími a průzračnějšími, proti důkazům na souměrnosti, oklopení nebo otočení založeným. Při úměrnosti úseček na paprscích, jest též dokázáno všeobecné pravidlo o úměrnosti veličin, jehož na příslušných místech spisovatel výhodně užívá k jednoduchým důkazům vět, úměrnost veličin vyslovujících. Že část o útvarech podobných počíná trojúhelníky podobnými, že na základě jich se dokazuje podobnost mnohoúhelníkův a pak teprve se přichází k rozšířenému pojmu podobnosti, jest schvalovati, neboť postup ten, kterého se pan autor důsledně i na jiných místech přidržel, odpovídá uznané zásadě, aby se při vyučování kráčelo od jednoduššího k složitějšímu. Rozšířeného výměru o podobnosti vůbec a podobnosti středové zvláště velmi pěkně užil pan spisovatel v oddílech jednajících o podobnosti kružnic, kdež pojednáno též o význačných bodech trojúhelníka, o přímce Eulerově a o kruhu devíti bodův. Pochvalné zmínky zasluhují podané pokyny o způsobu řešení úloh (§ 29.) a řešení strojných úloh užitím podobnosti (§ 50.); v obou případech řešení jest provedeno na příkladech vhodně volených. Též se zamlouvá, že metrické relace, z nichž na př. uvádíme větu Pythagorovu, větu Ptolemaeovu atd., jsou uvedeny v jednom oddíle v náležitý souvislý celek. Na tomto místě jest vhodně připojena část z novější geometrie, jednající stručně v jednotlivých oddílech o příčkách trojúhelníka, o polu i polaře kruhu a o chordále dvou kružnic. Pěkným uspořádáním zamlouvá se část o obsahu úhelníkův, kdež velmi jednoduše proveden jest důkaz rozšířené věty Pythagorovy, v níž čtverce na odvěsnách a přeponě nahrazeny jsou podobnými mnohoúhelníky, které mají své stejnolehlé strany ve stranách trojúhelníka pravoúhlého. Obzvláště pečlivě, důkladně, při tom však stručně a přesně pojednává pan autor o obvodu a obsahu kruhu, které definovány jsou jako společná mez obvodův a obsahů dvou proměnlivých mnohoúhelníků kruhu vepsaných a opsaných při nekonečném vzrůstání počtu jejich stran.

V *goniometrii* jsou úsečky a úhly důsledně jakožto veličiny relativní pojímány a označeny, při čemž neopomenuto k jednoznačnosti úsečky ab a mnohoznačnosti úhlu $\sphericalangle$ AB poukázati. Pojímáním tímto, zavedením souřadnic rovnoběžných, dokázanou větou o průmětu lomené linie a užíváním vzorců $a_1b_1 = ab \cos \beta$, $a_2b_2 = ab \sin \beta$, vyvozování vzorců goniometrických jest rázu všeobecného a jednoduchého. Rádi bychom viděli, kdyby ku platnosti hořejších vzorců bylo poukázáno i v tom případě, ve kterém $\overline{ab}$ i β mají hodnoty záporné, neboť k odvození vzorce pro $\cos(\alpha + \beta)$ použito jest vzorce $P_1(nm) = \overline{nm} \cos \underline{(R + \alpha)} = -r \sin \alpha \sin \beta$, kdež pro úhel $(R + \alpha)$ (obr. 130.) nm a β jsou negativní. Tím by obrazce 128, 129, 130 ještě ve větší souhlasnost uvedeny býti mohly. Jinak jest provedený důkaz bezvadný. Pěkně a stručně podal spisovatel výpočet a užití funkcí goniometrických; řešení rovnic goniometrických jest několika instruktivními příklady objasněno. Líbilo se nám rozdělení vět trigonometrických ve věty základní (věta sinusova, tangentova a cosinusova) a věty pomocné (úměru Cagnoliho, funkce polovičních úhlů v trojúhelníku atd.). Odvození všech těchto vzorců vyznačuje se jednoduchostí a přesností. Trigonometrie jest zakončena některými přiměřenými úlohami z praktické geometrie, z mathematické geografie a astronomie.

Týž směr, kterým se pan spisovatel ubíral v planimetrii, zračí se i ve *stereometrii*. Ve všeobecné části stereometrie volený postup jest příčinou, že jednotlivé věty přehledně jsou uspořádány a důkazy zjednodušeny, tak že část tato, ve které též k souměrnosti útvarů prostorových přiměřeně prohlédáno bylo a do níž i některé úlohy strojné jsou pojaty, v krátkém čase se žáky probrána býti může. Pečlivě jest pojednáno o trojhranu; zvláště shodnost trojhranů ve všech případech jest dokázána velmi jednoduše a pěkně. Že pan spisovatel zmínil se též stručně o homologii, jest schvalovati. Též souhlasíme, že obvyklý důkaz Eulerovy věty o mnohostěnech vypuklých jest nahrazen důkazem Steinerovým, který proti onomu jest názornější. Při plochách líbil se nám postup, ve kterém pan autor napřed vytvořuje plochy a pak je teprve jako geom. místa definuje. Jednoduchým způsobem provedeny jsou též důkazy, že šikmý válec a šikmý kužel má dvě osnovy kruhových řezův. Na základě vlastností trojhranu jsou vyvinuty vlastnosti sférického trojúhelníka srozumitelně a jasně. Též ve stereometrii jsou povrchy a obsahy těles oblých přesně vyčísleny na základě proměnlivosti a limit. Že obsah komolého jehlanu jest vyvozen geometricky rozkladem jeho v součet tří jehlanův úplných, které mají s ním stejnou výšku a jichž základny jsou: zpodní základna jehlanu komolého, svrchní základna téhož a střední měřicky úměrná obou, má výhodu tu, že jest názornější než způsob obvyklý. Rádi jsme viděli, že z obsahu hranolce jsou též odvozeny vzorce pro obsahy hranolu, jehlanu atd., a že při plochách rotačních vyvozena jest též první a druhá věta Guldinova. Vzorec pro obsah koule jest též pěkně vyvozen z věty *Cavalieriovy*, a odvození obsahu kulové úseče a vrstvy provedeno jest způsobem, který velmi napomáhá k snadnému zapamatování vyvinutých vzorcův.

Jako na jiných místech tak i ve *sférické trigonometrii* pozorovali jsme snahu páně spisovatelovu pokračovati od snažšího k složitějšímu. Nejprve pojednáno jest o trojúhelníku pravoúhlém, tak že dle uvedeného důležitého pravidla Neperova snadno vzorce k řešení sférického trojúhelníka pravoúhlého žáci v paměť vštípiti si mohou, čímž docíleno, že některé úlohy stereometrické řešiti se mohou již před řešením sfér. trojúhelníka kosoúhlého, jak toho žádají instrukce. Postupem svrchu řečeným zároveň bylo umožněno pojednati snadno o sfér. trojúhelníku kosoúhlém na základě sfér. trojúhelníků pravoúhlých, jak jsme to při odvozování základních vět a to *sinusové* a *cosinusové* pozorovali. Tím, že pan autor věty řečené též z trojhranu vyvodil, dává se žákům příležitost poznati, že podobná cesta jako při sférickém trojúhelníku pravoúhlém i zde vede k cíli. I ve sférické trigonometrii pěkně ve zvláštních oddílech pojednáno jest o větách základních a pomocných. Dle pokynův instrukcí jest vyvozen též vzorec L'Huilierův a poukázáno k užití sférické trigonometrie k sestrojení sítí kartografických, čehož obého v knize Jandečkově se pohřešuje. Úlohami z mathematické geografie a sférické astronomie budí se v žácích zájem pro sfér. trigonometrii. Že sférická trigonometrie připojena jest k stereometrii, stalo se zajisté jen z důvodů formálných; není nic na závadu, aby ve škole vykládána býti mohla až po analytické geometrii, jak ustanoveno v osnově učebné.

Analytická geometrie počíná průpravou k analytické geometrii, v níž podává se význam výrazův algebraických, sestrojení výrazů lineárných a grafické počítání, kdež velmi pěkně jsou graficky řešeny rovnice druhého stupně. Též k užití algebry při řešení úloh geometrických byl vzat náležitý zřetel.

Vlastní analytická geometrie počíná bodem v přímé řadě. Zde řeší pan autor některé úlohy týkající se vzdálenosti dvou bodův, poměru dělícího tří bodův a dvojpoměru čtyř bodův, čímž úlohy tyto k dalšímu častému upotřebení jsou pěkně připraveny, jak toho na př. úlohy v § 136. a později odvození rovnice kruhu atd. vyžadují. Srozumitelně jest podán a přiměřenými příklady objasněn geometrický význam rovnic o dvou proměnných. Že pan autor napřed vyvinuje rovnici přímky jdoucí počátkem souřadnic a pak teprve přichází k rovnici přímky v poloze obecné (obyčejná rovnice přímky), se stanoviska methodického schvalovati sluší. Vzorec pro vzdálenost bodu od přímky (§ 143.) jest zcela správně a všeobecně z normální rovnice přímky odvozen, předpokládá-li se, že průvodiče bodu p (obr. 232.) lze považovati za kladného, kdežto průvodič bodu q může býti buďto hodnoty kladné nebo záporné dle toho, je-li téhož nebo protivného směru jako kladný směr polopaprsku, který úhel β určuje, neboť přímka N může též protínati prodloužený polopaprsek $\overline{op}$ přes počátek o. V tomto případě arci lze učiniti záporného průvodiče $\overline{oq} = (p - v)$ kladným dle § 135., 3., ale pak přímka N má rovnici $x \cos (180 + \beta) + y \sin (180 + \beta) - (v - p) = 0$, kdež $(v - p)$ jest hodnoty kladné, rovnice tato však přejde v následující $x \cos \beta + y \sin \beta - (p - v) = 0$, tak že opět $(p - v)$ vypadne záporně, a kladnost i zápornost průvodiče přece, ač mlčky, při odvození vzorce (23) se předpokládá. Znaménko hodnoty v, jak ze vzorce (23) plyne, jest určité i v tom případě, je-li $p = o$, a to záporné nebo kladné dle toho, je-li průvodič $\overline{oq}$ kladný nebo záporný vzhledem ku kladnému směru polopaprsku oq úhlem β určeného. Dovolujeme si panu autorovi dáti zde na uváženou, zda-li by nebylo výhodno hned při odvození normální rovnice přímky poukázati k tomu, že rovnice $x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$ má platnost všeobecnou, ať jest p hodnoty kladné nebo záporné anebo též 0 rovné, a že z pravidla, není-li jinak ustanoveno, p jest hodnoty kladné, a to by vyžadovalo, aby platnost vzorců $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ od žáků náležitě poznána byla pro kladné i záporné hodnoty veličin r a α. Též při transformaci souřadnic, ve které otočení soustavy nastane (§ 137., 2.), jest uvedených všeobecně platných vzorců užito. Úlohy týkající se průsečíku a úhlu dvou přímek, řešeny jsou zcela správně a i podmínky rovnoběžnosti, splynutí a kolmosti dvou přímek jsou pěkně vyvinuty.

Že pan autor užil věty Laméovy k řešení některých úloh, jest schvalovati. Souhlasíme, že v analytické geometrii kružnice vztah mezi ní a přímkou jest odvozen na základě normální rovnice přímky, z níž jednoduše plyne rovnice tečny kružnice ve tvaru normálném a z této rovnice tečny, je-li dán její bod dotyčný. Na tomto místě pan autor užil výhodně transformace souřadnic k vyvození rovnice tečny kruhu, daného rovnicí normálnou. Též zamlouvá se stručné pojednání o polu a poláře kružnice a chordále dvou kružnic. Do geometrie ellipsy pojaty jsou jen nejdůležitější vlastnosti, týkající se křivky samé, přímky a ellipsy a průměrův ellipsy, též k příslušným konstrukcím byl vzat zřetel nejnutnější a tím docíleno, že část tato se žáky v přiměřeném čase dobře může procvičena býti. Postup zde zvolený můžeme nazvati zdařilým. Týmž směrem ubírá se pan autor i při analytické geometrii hyperboly a paraboly. V závěrku jest vyložen analytický význam křivek stupně druhého a kuželoseček, a vyvozeny polární rovnice ellipsy, hyperboly a paraboly.

V celku jest nám říci, že na první pohled zdála se nám býti učebnice poněkud objemnou, přesvědčili jsme se však, že pan autor vystříhal se vší rozvláčnosti a že do jednotlivých částí pojal tolik, kolik učitel se schopnými žáky jest s to probrati.

Předností učebnice jest, že těsně přiléhá k chvalně známým učebnicím Hozovým a Jarolímkovým, kterých na nižších třídách realních se užívá, i jsme přesvědčeni, že z této přilehlosti vyučování na vyšším stupni se usnadní, a že prospěch žáků z toho plynoucí bude značný. V příčině postupu kráčí pan spisovatel cestou vlastní, všechny části a oddíly jsou uvedeny v náležitý souvislý celek, výklady jsou veskrze přísně vědecké, při tom též úplně jasné a žákům přiměřené. Též věty, důkazy, důsledky i dodatky vyznačují se přesností a jednoduchostí. Terminologie vědecká jest bezvadná. Na příslušných místech vřaděny jsou vhodně volené příklady číselné a přiměřené poznámky historické. Obrazce jsou velmi pěkně a zvláště ve stereometrii názorně provedeny, a i typografická úprava knihy jest úhledná. Ve prospěch učebnice připojen jest na konci též abecední ukazovatel geometrických názvů českých, německých a francouzských. Zřetel majíce ku předcházející úvaze, můžeme s dobrým svědomím vysloviti se, že učebnice Strnadova jest dílo původní a velice cenné, ve kterém novější pokrok geometrický v plné míře se zračí, a že náležitě vyhoví účelu, k jakému sepsána byla; z té příčiny ji pánům odborníkům co nejvíce doporučujeme. *).

Na konec uvádíme ještě několik smysl rušících tiskových chyb, jakýmž v prvním vydání i při nejbedlivější korrektuře nelze se úplně vyhnouti a které celkové hodnotě knihy nejsou na ujmu.

Na str.	88	řádek	9.	zdola	místo	$a'bc'd$	čti	$a'b'c'd'$.
„	126	„	15.	„	„	v	„	o.
„	144	„	8.	„	„	338	„	32·8.

*) Dovídáme se, že prof. Strnad připravuje k tisku cvičebnou knihu geometrie pro vyšší realky a gymnasia. *Red.*

Na str. 200 obr. 171. místo *s* čti *o*.
„ 235 řádek 3. zdola místo α čti a
„ 239 „ 8. shora „ $\sphericalangle atb = \beta$ „ $\sphericalangle atb = 2\beta$
Na str. 239 řád. 13. shora místo „určíme“ čti „od roviny základny *abcd* .. určíme.“

Na str. 262 řádek 9. shora míst $ed \perp ab$ čti $cd \perp ab$.

Prof. *V. Jeřábek.*

Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Von Dr. *Wilhelm Killing*. Erster Band. Paderborn 1893.

Základy, na nichž spočívá stavba vědy geometrické, byly v našem století — zvláště za posledních 25 let — nejen důkladně ohledány a v některých částech nedostatečnými shledány, ale byly též dle uznané potřeby upevněny, prohloubeny i rozšířeny. Není sice tato práce dosud úplně ku konci přivedena, ale přece již pokročila tak daleko, že žádoucno jest přehlédnouti a zjistiti výsledky dosavadních snah.

Úkol tento vytknul sobě spis svrchu jmenovaný, který již zevně jeví se jakožto časový tím, že věnován jest stoleté památce narozenin Lobačevského, prvního budovatele nových základů geometrie. První svazek, jenž právě vyšel, obsahuje 357 stran a rozdělen jest na čtvero oddílů.

Oddíl první počíná výkladem o podstatě proslulého 5. postulatu (11. axiomatu), na kterém založena jest Euklidova nauka o rovnoběžkách; tato jest, jak známo, nejkřehčejším kamenem v základech geometrie. Postulat Euklidův lze nahraditi jinými, více neb méně ekvivalentními; ale všechny pokusy, učiniti z něho theorem přesně dokázaný, ukázaly se marnými (§ 1—5). Po stručném výkladu o geometrii na plochách stálé křivosti negativní (§ 6.) přistupuje se k důkazu, že vedle geometrie euklidovské theoretický stejně oprávněna jest nauka Lobačevského, dle které bodem mimo přímku daným vésti lze ku přímce dvé rovnoběžek a součet úhlů trojúhelníka jest menší dvou pravých (§ 8—10). Důsledky toho vzhledem k útvarům prostorovým, jakož i trigonometrie a geometrie analytická ve smyslu nové theorie jsou dalším předmětem úvah (§ 11—16). Geometrie Lobačevského předpokládá přímku nekonečnou; to není však nutný požadavek vědecký, ba můžeme též vytvořiti přesnou theorii geometrickou, pokládajíce přímku za uzavřenou. Tu pak můžeme buď s Riemannem za to míti, že každé dvě přímky z jednoho bodu vycházející ještě ve druhém bodě určitém se setkávají, aneb můžeme rozhodnouti se pro názor Newcombův a Kleinův, že dvě přímky ze společného bodu vycházejíce, k bodu tomu se vracejí, podruhé se nesetkavše (§ 17—20). Geometrie Euklidova operuje v prostoru, jehož křivost rovna jest nulle, geometrie Lobačevského v prostoru s křivostí negativnou, Riemannova pak v prostoru křivosti positivné. Vyšetřováním o vzájemných vztazích těchto různých theorií (§ 21—26) ukončuje se oddíl první, jímž prokázána jest oprávněnost útvarů neeuklidovských.

Oddíl druhý věnován jest vyvození nejdůležitějších vlastností projektivných bez užití délek a úhlů, rovněž i bez postulatu o rovnoběžkách, platných tudíž i v geometrii neeuklidovské. Pojem harmonické čtveřiny bodové a paprskové rozšiřuje se na pojem dvojpoměru vůbec; tohoto pak lze užiti k definování určitého druhu souřadnic, jímž poloha bodu v rovině neb v prostoru může se stanoviti obecně a zcela neodvisle od pomůcek metrických (§ 1—6). Vyšetřujeme-li souřadnicemi těmito úlohu o pošinování přímé řady samé v sobě, jsme vedeni ke třem různým případům, hledíc k realnosti bodů samodružných při tom se vyskytujících; tyto tři případy odpovídají třem již dříve uvažovaným odvětvím geometrie (§ 7). Další dedukce sprostředkují přechod od projektivnosti k metrice podávajíce definice délky a úhlu ve smyslu Cayleyově jakožto veličin úměrných s logarithmem zvláštního dvojpoměru (§ 8—12).

Oddíl třetí pojednává o prostoru n-dimensionálném. Vysloviv přesvědčení své, že třírozměrnost prostoru zkušeností co nejpřísněji jest stvrzena, odmítá autor všechny pokusy, které by měly stvrditi, že prostor o více rozměrech existuje, aneb že jej se zkušeností lze srovnati. Prohlašuje však, že geometrie takového prostoru logicky jest možna a vědecky prospěšna (§ 1—4). Nejstarší theorie tímto směrem se nesoucí jest Grassmannova Ausdehnungslehre (§ 5); mnohé pak problemy, jež geometrie analysi kladla, přirozeně vedly od dvou a tří veličin proměnných ku počtu jich zcela obecnému. Výsledky, ku kterým analyse takto dochází, mohou co nejpohodlněji býti vysloveny užitím terminologie geometrické, byť i postrádaly možnosti v prostoru obyčejném. Obecná stanoviska tím získaná jsou na prospěch geometrii euklidovské, projektivné i neeuklidovské (§ 6—10). Analytické úvahy spisovatelovy přijímají v dalším postupu ráz geometrický, podávajíce zejména theorii mnohostěnů v prostoru n-dimensionalním (§ 11—15).

Oddíl čtvrtý v podstatě má ráz kynematický. V prostorech dosud vyšetřovaných platí tento obecný zákon o pohybu: Pohybuje-li se jakékoli těleso, jest pohybem jeho určen též pohyb tělesa druhého, které s prvním pevně jest spojeno, a to neodvisle od způsobu, jímž toto spojení jest uskutečněno. Lze však mysleti si též takový druh prostoru, ve kterém pohyb tělesa jednoho připouští různé pohyby tělesa druhého, závislé na způsobu, jakým obě tělesa jsou spojena. Po přípravných výkladech o geometrii na rozvinutelných plochách v prostoru euklidovském (§ 1—3) přistupuje spisovatel k odůvodnění nové formy prostoru a jejímu analytickému stanovení. Základní myšlenky Cliffordovy o tom zpracoval Klein; pro velikou různost forem zde možných uvedeny ve spise tomto jen nejdůležitější z nich a vyloženy hlavní jich vlastnosti (§ 4—9). Dle theorie této nejsou veškeré přímky shodné; každým bodem prochází nejméně jedna přímka uzavřená a také přímky nekonečné. Uzavřené přímky nemají vesměs délku stejnou.

Svazek tento ukončen jest krátkým přehledem látky, jejíž některé podrobnosti a řešení některých otázek zde se vyskytnuvších odkázáno jest do svazku druhého.

Naznačili jsme obsah díla Killingova — ovšem jen stručně a v hlavních rysech jeho; co jsme pověděli, dostačí však přece, abychom ocenili bohatství látky v něm nashromážděné. Mimo stať ve II. díle geometrie Clebsch-Lindemannovy neznáme spisu, který by o všech směrech základů této vědy, jak se až po naše časy vyvinuly, přehledně a soustavně pojednával jako spis svrchu řečený; jsa tomu výhradně věnován, může zajisté zevrubně a důkladně o věci se rozepsati.

Že každou theorii podrobně a z různých stanovisek objasňuje, a zase různá ta stanoviska v jednotný celek pojí — jak zvláště závěrečný přehledný odstavec každého oddílu dosvědčuje — můžeme jen chváliti. Také příjemně působí střízlivost úvah spisovatelových a opravdovost, která obtíže a případné snad nedostatky soustavy nezakrývá, ale otevřeně přiznává a vysvětluje.

Jednoho však přáli bychom si při díle tomto, které chce býti kompendiem nauky dosud ve vývinu se nalezající: větší zřetel k methodě historické. Čtenář díla takového jistě by rád aspoň o nejpodstatnějších kusech poznal jich původ a bezprostřední náhledy a výroky původců, aby mohl rozeznati, co jim náleží a co jest vlastním majetkem zpracovatelovým. Snad by tím kniha utrpěla na své jednolitosti, ale získala by velice na instruktivnosti. V té příčině dosti se nám zamlouvala malá brošurka *) nedávno vyšlá, která vyličuje vývoj geometrie neeuklidovské, ačkoli nepokládá ji za samostatný a oprávněný obor vědy, nýbrž pouze za façon de parler. Kniha Killingova vyhovuje tomuto našemu přání jen částečně, totiž doklady literárními dosti hojnými. Jinak rádi doznáváme, že vědeckou cenou obsahu svého i soustavným jeho zpracováním jest skutečnou

*) Dr. A. Karagiannides. Die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Berlin 1893.

učebnicí geometrie neeuklidovské, jejíž horlivým pěstitelem a samostatným pracovníkem spisovatel ohvalně znám jest.

Prof. *A. Strnad.*

L'Hyperespace à (n — 1) **dimensions.** Par *G. Fontené.* Paris, Gauthier — Villars et fils, 1892.

Kdežto spis německý, o kterém jsme právě zprávu podali, zahrnuje v sobě celou theorii novějších bádání o základech geometrických, jest kniha francouzská, již tuto oznamujeme, rázu zcela specialného. Úkolem, jejž řeší, jest stanovení metrických relací v prostoru mnohorozměrném.

Základem pojednání svého, které obsahuje XVIII + 132 strany velké osmerky, činí autor obecnou korrelaci útvarů prostorových, dle které každému bodu prostoru přísluší určitá rovina a naopak. Je-li paprsek P spojnicí řady bodové, odpovídá bodu m této řady určitá rovina, která týž paprsek v bodě n seče; pseudodistance bodů mn jest pro daný paprsek stálou veličinou, kterou spisovatel jmenuje parametrem paprsku. Pokládáme-li P za osu svazku rovin, přijdeme k dualnému pojmu parametru osy. Užitím těchto pojmů lze vyjádřiti metrické vztahy při řečené korrelaci, též přesně určiti positivní a negativní smysl při útvarech v prostoru mnohorozměrném a to i tenkráte, nemá-li prostor tento základní vlastnost prostoru realného, dle které lze útvary v něm se nalezající přemísťovati beze změny jich metrických vlastností.

Užívaje zvláštní, k svému účelu volené symboliky a terminologie, rozvádí autor základní myšlenku svou úvahami, které původností a všeobecností vynikají, jichž obsah však stručným referatem nelze vystihnouti. *Prof. A. Strnad.*

Fysika pro nižší třídy škol středních. II. Pro školy realné. Sepsal *Em. Leminger*, professor při c. k. štátní střední škole v Kutné Hoře. Páté vyd. S 278 obr. Cena 85 kr. Vázaná 1 zl. 5 kr. V Praze. Nakladatel I. L. Kober 1892.

O knize, která v nedlouhé poměrně době pětkrát byla vydána, možno směle tvrditi, že požadavkům školní knihy náležitou měrou vyhovuje. Pročítáme-li bedlivě jednotlivé její odstavce, přihlížejíce zároveň k uspořádání jejich, shledáme, že celkem tomu tak jest jak nahoře řečeno. Učivo vybráno a sestaveno dle instrukcí pro nižší třídy realných škol vydaných, sloh jest jednoduchý a srozumitelný, zákony přírodní po každém odstavci stručně a přehledně tučným písmem vyznačeny, u základných výjevů fysikalních připojeny dějepisné poznámky, ano i výslovnost cizích jmen (mužů o silozpyt zasloužilých) v závorce připojena, což zajisté vše jen chvály hodno jest.

Četné obrazce jsou čistě a vkusně provedeny, takže knížce té neschází než *poněkud změněná úprava*, *přiměřená k nejnovějšímu min. nařízení* o vyučování fysice v nižších třídách středních škol vydanému, kterou pan spisovatel zajisté záhy podnikne a s úplným zdarem provede.

Prof. *Fr. Hromádko.*

Úkoly a návod ku počítání z paměti. Doplněk ku početnicím pro školy obecné, měšťanské i všeliké střední. Sestavil *Martin Kuchynka*, prof. na c. k. učit. ústavu v Praze. Druhé, přepracované a valně rozmnožené vydání. V kommisi Fr. Řivnáče, r. 1893. Cena 1 K.

Ve zprávě o 1. vyd. této sbírky v č. 1. XIX. poukázali jsme k jejímu významu pro vydatnější a soustavnější pěstování počítání z paměti ve školách našich. Náhled náš, tehdy vyslovený, že počítáním z paměti působiti třeba proti mechanickému užívání početních pravidel, vtělen jest v nové osnově vyučovací pro nižší gymnasia a real. gymnasia z r. 1892. Tím lze očekávati, že nové vydání této sbírky dojde obecné pozornosti odborníkův.

Vydání druhé obsahuje 684 úkoly, o 44 více než první; také některé nepřípadné úlohy 1. vyd. nahrazeny jsou novými, a místo zl. a kr. zavedena kor. měna (K, h). Vnější uspořádání sbírky zůstalo však stejné, aby obou vydání mohlo současně býti užíváno. Podstatného obohacení dostalo se 2. vyd. novým oddílem, „Pokyny ku řešení a výsledky úkolů," jenž zabírá téměř třetinu objemu knížky.

V „pokynech" podává pan auktor v příkladech *návod ku počítání z paměti vůbec* se všemi praktikami tohoto umění, čímž předložená sbírka povznáší se nad prosté sbírky toho druhu. Řešení praktických úkolů provedeno naskrze v duchu počítání z paměti.

Z tohoto krátkého srovnání obou vydání, jež pan auktor v předmluvě k druhému vydání sám podává, lze seznati, že předložená sbírka v novém vydání ještě znamenitě zdokonalena jest. Kdo úkoly této sbírky se obíral. uznamenal zajisté bohatost a všestrannost její, ale též kritický výběr, jímž v různé obory mathematiky, zvláště v praktické její části, sáhnuto bylo.

Uvítali-li jsme proto „Úkoly" od prof. Kuchynky s upřímnou radostí, doporučujeme i druhé vydání laskavému povšimnutí všech našich pánů počtářů co nejvřeleji.

Prof. *J. Pour.*

Základové mathematického a hvězdářského zeměpisu, jejž na oslavu jubilejního sjezdu abiturientů c. k. gymnasia klatovského z roku 1867, konaného dne 1., 2. a 3. srpna 1892 v Klatovech, jim na milou upomínku věnuje *Fr. Hromádko*, tehdejší jejich gymnasijní učitel. — V Praze 1893. Nákladem vlastním, 68 str. 8^0. Cena 40 kr.

„Účelem tohoto spisu jest podati dospělejší mládeži studující a vzdělanému čtenářstvu vůbec stručnou rukojeť mathematického a hvězdářského zeměpisu, obsahující základné vědomosti o zemi a jejím postavení k ostatním tělesům nebeským, o soustavě sluneční atd. O důležitosti předmětu toho pro mládež a vzdělané čtenáře vůbec netřeba šířiti slov, neboť vědomosti z něho čerpané povznášejí myslícího ducha lidského do hvězdných prostor všehomíra, poskytujíce mu zábavu nejušlechtilejší . . .“ — Tato slova, z předmluvy spisu vzata, charakterisují nejlépe dílko, které leží před námi. Vedle vlastního určení měl autor patrně při sestavování toho spisu ještě účel jiný, jejž naznačil na konci předmluvy.

Že naše učebnice fysikální z mathematického zeměpisu obsahují jen velice nepatrné ukázky, o tom není sporu. A přece jest dle našeho mínění vzdělavatelský účinek jeho pro mládež nepoměrně větší než mnohá stať ze silozpytu. Z důkazů o kulové podobě naší země, jež uvedl spisovatel na str. 13 (celkem 7), mohl důkaz pátý a sedmý jakožto méně důležité býti vypuštěny. Patrně chtěl autor podati jen přehled všech známých důvodův o kulatosti země. Neváháme uvedené dílko, které, dokud jsme zkoušeli, všude uvádí data správná, studující mládeži doporučiti.

Dr. *V. Láska.*

Recueil de problèmes de Mathématiques classés par divisions scientifiques. Par *C. A. Laisant.* Paris, Gauthier-Villars 1893.

V lonském roč. časopisu (str. 254—255) promluvili jsme o I. a V. svazku této sbírky, která na sedmero svazkův jest rozpočtěna; při tom poukázali jsme k ceně její netoliko didaktické, ale i vědecké.

Máme před sebou nově vyšlý svazek II., věnovaný geometrii elementárné; obsahuje 202 strany a rozdělen jest v tyto oddíly: body, přímky a úhly (úlohy 1—33), kružnice (34—256), trojúhelníky (257—501), mnohoúhelníky (502—648), kuželosečky a jiné křivky (649—686), přímky a roviny v prostoru a mnohostěny (687—750), tělesa oblá (751—802), geometrie deskriptivní (803—813).

Z přehledu tohoto zřejma jest jakási nesouměrnost u výběru látky; připadáť na geometrii rovinnou úloh 686, na prostorovou toliko 127. To ovšem není vinou autora, jenž úloh sám netvořil, nýbrž pouze sbíral a spořádal material, nastřádaný v mathematických sbornících francouzských od r. 1842 až do doby nejnovější.

Povahou látky v tomto svazku nashromážděné odůvodněn jest ráz jeho elementárný; místy obsaženy jsou i věci zcela snadné, nevzbuzující zájmu vědeckého. Některé úlohy, jsouce z různých časopisů vyňaty, vyskytují se tu dvakráte; tak jsou identické úl. 275 a 278, 514 a 527, 608 a 613, 724 a 730. Rádi četli jsme v knize též jméno české; professor Jeřábek (Brněnský) jmenován jakožto původce úlohy 201 a řešitel úloh 382 a 588.

Těšíce se na další svazky cenné této sbírky, odporučujeme čtenářům svým svazek svrchu řečený, obsahující hojnost cvičiva geometrického, kterého i v našich školách středních s prospěchem lze užíti.

Prof. *A. Strnad.*

N. I. Lobačevskij.

Dne 10./22. října 1893 bylo tomu sto let, co se narodil slavný geometr ruský Lobačevskij.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij náleží bez odporu mezi ony učence století našeho, kteří vědu nejen obohatili, nýbrž také jí razili dráhy nové.

Duchaplní badatelé, jimž dopřáno bylo založiti nové směry věd jednotlivých, bývají často nuceni vyvraceti věty, jež až do doby jejich pokládány byly za bezpečny a samozřejmy.

Mezi zakladateli nových směrů vědeckých náleží Nikolaji Ivanoviči Lobačevskému místo čestné, takže zvěčnělý Clifford právem nazval jej „Koperníkem v geometrii“.

Od té doby, co Euklid nesmrtelné dílo své o geometrii zbudoval na několika málo definicích, axiomech a postulatech, přijatých docela bez důkazu, nebyla nikdy vyslovena pochybnost o pravdivosti těchto základů geometrických, nýbrž veškeré snažení učenců všech dob a zemí neslo se jenom k tomu, aby počet axiomův a postulatů přivedli na minimum. Shledáváme na př. celou řadu pokusů k tomu čelících, aby postulat Euklidův o protínání se přímek v rovině odvozen byl jakožto důsledek mathematický z jiných definicí, postulatův a axiomův Euklidových, avšak nikdo nestaral se o vyšetření toho, zda pravdivý jest onen základní postulat sám.